**Γεια σας και πάλι καλά μου παιδιά !!!**

Καταρχάς ελπίζω ότι και στη σημερινή μας επικοινωνία βρίσκω, εσάς και τις οικογένειές σας, καλά, δυνατούς και γεμάτος αισιοδοξία.

Παρόλο που οι . . . διακοπές συνεχίζονται – και εύχομαι να περνάτε καλά - όπως βλέπετε εξακολουθώ να σας σκέφτομαι. Πάμε λοιπόν και πάλι, πιστεύω με πολλή «όρεξη» από την πλευρά σας, στα «δικά μας» !!!

Ξεκινώντας το σημερινό μας μάθημα, ας κλείσουμε την παράγραφο της εκθετικής συνάρτησης βλέποντας υποδείξεις για τις λύσεις των Ασκήσεων 4 και 5 τις οποίες είχαμε για λύση από το προηγούμενο μάθημα.

Όσοι από σας έχετε ασχοληθεί με τις Ασκήσεις αυτές, να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με τις υποδείξεις και, αν χρειάζεται, να κάνετε τις αναγκαίες διορθώσεις. Όσοι πάλι δεν μπορέσατε να ασχοληθείτε, να μελετήσετε τις υποδείξεις και να προσπαθήσετε και μόνοι σας να τις λύσετε. Σε κάθε περίπτωση περιμένω ερωτήσεις και απορίες σας στο e-mail tzanetatos@sch.gr.

Είχαμε λοιπόν από το προηγούμενο μάθημα τις εξής **ασκήσεις**:

**4**. **Να λυθούν οι ανισώσεις:**

**i)**  < 1

**Υπόδειξη**

 < 1  < 50 (1)

Επειδή η εκθετική συνάρτηση με βάση το 5 είναι γνησίως αύξουσα (διότι 5 > 1), έχουμε ότι:

(1)  x2−5x + 6 < 0 (2)

Τώρα, το x2−5x + 6 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με ρίζες 3 και 2, οπότε (σύμφωνα με τη θεωρία για το πρόσημο τριωνύμου από την Α΄ Λυκείου) έχουμε ότι: (2) 2 < x < 3.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα x ∈(2, 3) .

**ii)**  > 

**Υπόδειξη**

Επειδή η εκθετική συνάρτηση με βάση το 7 είναι γνησίως αύξουσα (διότι 7 > 1), έχουμε ότι:

 > 2x−4 > x+1 2x−x > 1+4 x > 5.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα x ∈ (5, +∞).

**iii)**  < 

**Υπόδειξη**

Επειδή η εκθετική συνάρτηση με βάση το  είναι γνησίως φθίνουσα (διότι  <1), έχουμε ότι:

 < x+1 > 2x−4 x−2x > −4−1−x > −5 x < 5.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα x ∈ (−∞,5).

 **iv)** 

**Υπόδειξη**

 (1)

Επειδή η εκθετική συνάρτηση με βάση το  είναι γνησίως αύξουσα (διότι  > 1), έχουμε ότι:

(1)  2−3x < 3 −3x < 3−2 −3x < 1  x > x > .

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα x ∈ (, +∞).

**v)** 

**Υπόδειξη**



(1)

Επειδή η εκθετική συνάρτηση με βάση το  είναι γνησίως φθίνουσα (διότι  < 1), έχουμε ότι:

(1)  9x + 14 > −4 9x > −4−14 9x > −18  x > x > −2.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα x ∈ (−2, +∞).

**ΑΣΚΗΣΗ 5**

Να τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς: 1 ,  , 4 , 0,50,5 , 2 , 0,52. **Λύση**

Μετατρέπουμε αρχικά τους αριθμούς σε δυνάμεις με την ίδια βάση . Έχουμε ότι:

1= , = , 4 = 22 = =  4 =  , 0,50,5 =  , 2 = , 0,52= .

Οι αριθμοί τώρα: , , , , ,  είναι τιμές της εκθετικής συνάρτησης f(x)= , η οποία είναι γνησίως φθίνουσα , αφού < 1.

Αφού λοιπόν είναι: −2 < −1 < 0 < 0,5 <  < 2, συμπεραίνουμε ότι:

>  >  >  > >  

 4 > 2 > 1 > 0,50,5 >  > 0,52 0,52 <  < 0,50,5 < 1 < 2 < 4.

Συνεχίζοντας την παρουσίαση του 5ου Κεφαλαίου του βιβλίου μας, ας προσπαθήσουμε τώρα μαζί να δούμε τις έννοιες **του λογαρίθμου** και **της λογαριθμικής συνάρτησης**, έννοιες ιδιαίτερα χρήσιμες για την επόμενη χρονιά τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Φυσική.

Ξεκινάμε λοιπόν με την έννοια **του λογαρίθμου**:

Έστω θ > 0 και α > 0 με α ≠ 1.

Το σύμβολο **logαθ** διαβάζεται: **λογάριθμος του θ ως προς βάση α** (ή **με βάση α**) και ορίζεται με την εξής ισοδυναμία: **logαθ = x**  **αx = θ**

Δηλαδή:

ο **logαθ** **είναι o εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε το α για να βρούμε το θ.**

**Παρατήρηση 1**

**Ο αριθμός, του οποίου υπολογίζουμε τον λογάριθμο, είναι πάντα θετικός.**

**Παραδεiγματα:**

log28 = 3 , διότι: 23 = 8

log42 = , διότι: = =  = 21 = 2

log0,50,25 = 2, διότι: 0,52 = = = 0,25

log100,001 = −3, διότι: 10−3 = = = 0,001

**Παρατήρηση 2**

**Ο αριθμός που προκύπτει ως αποτέλεσμα στον υπολογισμό του λογαρίθμου ενός (θετικού πάντα) αριθμού μπορεί να είναι και αρνητικός.**

(βλέπε τελευταίο παράδειγμα)

**Παρατήρηση 3**

Από τον παραπάνω ορισμό του λογαρίθμου προκύπτουν τα εξής:

1) **Αν α > 0 με α ≠ 1 και x∈r, τότε: logααx  = x**, διότι: αx = αx

2) **Αν α > 0 με α ≠ 1 και θ > 0, τότε:** **= θ**, διότι: logαθ = x αx = θ = θ

3) **Αν α > 0 με α ≠ 1, τότε: logαα = 1**, διότι: α1 = α

4) **Αν α > 0 με α ≠ 1, τότε: logα1 = 0**, διότι: α0 = 1

**Ιδιότητες των λογαρίθμων**

**Αν α > 0 με α ≠ 1,τότε για οποιαδήποτε θ1, θ2, θ > 0 και κ∈r ισχύουν:**

**1)** **logα(θ1∙θ2) = logαθ1 + logαθ2**

**2) = logαθ1 − logαθ2**

**3) logαθκ = κ∙logαθ**

**Παρατήρηση**

**Αν α > 0 με α ≠ 1, τότε για οποιαδήποτε θ > 0 και ν∈Z+ ισχύει:**  = **∙logαθ,**

διότι: =, οπότε = = ∙logαθ.

**Δεκαδικοί λογάριθμοι** (ή **κοινοί λογάριθμοι**): Είναι οι λογάριθμοι με βάση το 10.

Έστω θ > 0.

**Τότε ο λογάριθμος του θ με βάση το 10 συμβολίζεται με logθ** (και όχι με log10θ) **και λέγεται δεκαδικός λογάριθμος του θ.**

Επομένως ισχύει η ισοδυναμία: **logθ = x**  **10x = θ** .

**Φυσικοί λογάριθμοι** (ή **νεπέριοι λογάριθμοι**): Είναι οι λογάριθμοι με βάση το e.

Έστω θ > 0.

**Τότε ο λογάριθμος του θ με βάση το e συμβολίζεται με lnθ (**και όχι με logeθ**)** **και λέγεται φυσικός λογάριθμος του θ.**

Επομένως ισχύει η ισοδυναμία: **lnθ = x**  **ex = θ** .

**Τύπος αλλαγής βάσης λογαρίθμων**

Αν α , β > 0 με α , β ≠ 1, τότε για κάθε θ > 0 ισχύει: logβθ =  .

Ερχόμαστε τώρα να δούμε την έννοια **της λογαριθμικής συνάρτησης**.

Έστω **α** **θετικός αριθμός με α ≠ 1**. Σύμφωνα με τα παραπάνω, για κάθε x > 0 ορίζεται ο λογάριθμος logαx. Επομένως αντιστοιχίζοντας κάθε x ∈ (0, +∞) στo logαx, ορίζουμε τη συνάρτηση:

f: (0, +∞) → r με f(x) = logαx,

η οποία λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση α**.

Ας θεωρήσουμε τώρα τη λογαριθμική συνάρτηση f(x) = logαx.

Επειδή:

logαx = y αy = x,

αν το σημείο Μ(ξ, η) είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης **y = logαx**, τότε το σημείο Ν(η, ξ) θα είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης **y = αx** και αντιστρόφως. Τα σημεία όμως Μ(ξ, η) και Ν(η, ξ) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xy και x’y’.

Επομένως:

**Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:**

**y = logαx** και **y = αx**

**είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xy και x’y’**.

 

Λαμβάνοντας τώρα υπόψη μας την παραπάνω συμμετρία και όσα ήδη έχουμε μάθει από προηγούμενα μαθήματα για την εκθετική συνάρτηση y = αx καταλήγουμε στα ακόλουθα συμπεράσματα:

* Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = logαx, όπου α > 1, είναι η εξής:

 και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:



* Έχει πεδίο ορισμού το (0, +∞)
* Έχει σύνολο τιμών το r
* Είναι γνησίως αύξουσα στο (0, +∞), δηλαδή για κάθε x1, x2 ∈ (0, +∞) ισχύει:

αν x1 < x2 , τότε logαx1 < logαx2

 απ΄ όπου προκύπτει ότι:

 (logαx < 0, αν 0 < x < 1) και (logαx > 0, αν x > 1)

* Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα των x στο σημείο Α(1, 0) και έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα των y, δηλαδή καθώς το x ελαττώνεται «πηγαίνοντας» προς το 0 η γραφική της παράσταση «πλησιάζει» τον αρνητικό ημιάξονα των y.
* Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = logαx, όπου 0<α<1, είναι η εξής:

 και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

* Έχει πεδίο ορισμού το (0, +∞)
* Έχει σύνολο τιμών το r
* Είναι γνησίως φθίνουσα στο (0, +∞), δηλαδή για κάθε x1, x2 ∈ (0, +∞) ισχύει:

αν x1 < x2 , τότε logαx1 > logαx2

 απ΄ όπου προκύπτει ότι:

 (logαx > 0, αν 0 < x < 1) και (logαx < 0, αν x > 1)

* Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα των x στο σημείο Α(1, 0) και έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα των y, δηλαδή καθώς το x ελαττώνεται «πηγαίνοντας» προς το 0 η γραφική της παράσταση «πλησιάζει» τον θετικό ημιάξονα των y.

**Παρατήρηση 1**

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = logx (δηλαδή της λογαριθμικής συνάρτησης με βάση το 10) είναι η εξής:



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  x | 1 | 10 |
| logx | 0 | 1 |

**Παρατήρηση 2**

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = lnx (δηλαδή της λογαριθμικής συνάρτησης με βάση το e) είναι η εξής:



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  x | 1 | e |
| lnx | 0 | 1 |

**Σχόλιο**

Από τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης f(x) = logαx , όπου α > 0 και α ≠ 1 προκύπτει ότι: αν x1 ≠ x2 , τότε logαx1 ≠ logαx2,

οπότε, με απαγωγή σε άτοπο, έχουμε ότι: αν logαx1 = logαx2, τότε x1 = x2 .

Επομένως ισχύει η ισοδυναμία: logαx1 = logαx2  x1 = x2 .

Η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την επίλυση εξισώσεων, όπου ο άγνωστος εμφανίζεται στον λογάριθμο. Οι εξισώσεις αυτές λέγονται **λογαριθμικές εξισώσεις**.

Αντίστοιχα οι ανισώσεις, όπου ο άγνωστος εμφανίζεται στον λογάριθμο, λέγονται **λογαριθμικές ανισώσεις** και η επίλυσή τους βασίζεται στη μονοτονία της αντίστοιχης λογαριθμικής συνάρτησης:

* Αν α > 1, τότε:

 logαx1 < logαx2 x1 < x2 , αφού η f(x) = logαx είναι γνησίως αύξουσα

* Αν 0 <α< 1, τότε:

 logαx1 < logαx2 x1 > x2 , αφού η f(x) = logαx είναι γνησίως φθίνουσα

Στη συνέχεια ας δούμε κάποιες **λυμένες ασκήσεις** επάνω στην έννοια **των λογαρίθμων**:

**ΑΣΚΗΣΗ 1**

Να υπολογιστούν οι λογάριθμοι:

ln$ \frac{1}{e^{3}}$

**i)** log5$\sqrt{5}$ , **ii)** log6$ \frac{1}{6}$

**Λύση**

 , **iii)** log10000 , **iv)**

**i)**  Έστω ότι log5$\sqrt{5}$ = x. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε ότι:

log5$\sqrt{5}$ = x 5x =$\sqrt{5}$ 5x =$5^{\frac{1}{2}}$ x = $\frac{1}{2}$ .

 Άρα: log5$\sqrt{5}$ = $\frac{1}{2}$ .

**ii)** Έστω ότι log6$ \frac{1}{6}$ = x. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε ότι:

log6$ \frac{1}{6}$ = x 6x = $\frac{1}{6}$ 6x = 6−1 x = −1 .

Άρα: log6$ \frac{1}{6}$ = −1 .

**iii)** Έστω ότι log10000 = x. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε ότι:

log10000 = x10x = 10000 10x = 104 x = 4 .

Άρα: log10000 = 4 .

Τότε σύμφωνα με τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε ότι:

ln$ \frac{1}{e^{3}}$ = x.

**iv)** Έστω ότι

ex = $\frac{1}{e^{3}}$  ex = e−3 x = −3 .

ln$ \frac{1}{e^{3}}$ = x

ln$ \frac{1}{e^{3}}$ = −3 .

Άρα:

**ΑΣΚΗΣΗ 2**

Να βρεθεί για ποια τιμή του x ισχύει:

**i)** log0,3x=2 , **ii)** logx=3 , **iii)** log3x = 4 , **iv)** lnx = −2 , **v)** log4x=−3 , **vi)** log4|x–1|=2

**Λύση**

Σύμφωνα με τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε ότι:

**i)** Για x > 0 ισχύει: log0,3x=2  x = 0,32 = 0,09

**ii)** Για x > 0 ισχύει: logx=3 x = 103 = 1000

**iii)** Για x > 0 ισχύει: log3x = 4 x = 34 = 81

**iv)** Για x > 0 ισχύει: lnx = −2 x = e−2 = $\frac{1}{e^{2}}$

**v)** Για x > 0 ισχύει: log4x=−3 x = 4−3 =$ \frac{1}{ 4^{3}}$ = $\frac{1}{64}$

**vi)** Για x ≠ 1, ισχύει: log4|x–1|=2  |x–1| = 42 |x–1| = 16 

( x–1 = 16 x = 17 ή x–1 = −16 x = −15 )

**ΑΣΚΗΣΗ 3**

Να βρεθεί για ποια τιμή του x, όπου x > 0 και x ≠ 1, ισχύει:

**i)** logx25=2 , **ii)** logx64 = $\frac{3}{2}$ , **iii)** logx32=–5 , **iv)** logx100 = −2

**Λύση**

Σύμφωνα με τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε ότι:

**i)** logx25=2 x2 = 25  x2 = 52 x = 5, αφού x > 0

**ii)** logx64 = $\frac{3}{2}$ = 64 

(υψώνουμε και τα δύο μέλη στην δύναμη , ώστε ο εκθέτης του x να γίνει 1)

 x =  x = x = x = 42 x = 16

**iii)** logx32=–5 x−5 = 32 x−5 = 25 

(υψώνουμε και τα δύο μέλη στην δύναμη , ώστε ο εκθέτης του x να γίνει 1)

x =2−1 x =

**iv)** logx100 = −2 x−2 = 100x−2 = 102 = 102 x2 = x2 = 

 x = = 0,1, αφού x > 0

**ΑΣΚΗΣΗ 4**

Να δειχθεί ότι:

**i)** =10 , **ii)** =12 , **iii)**  ,

**iv)** 

**Λύση**

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες λογαρίθμων που είδαμε παραπάνω στη θεωρία έχουμε ότι:

**i)** = = = 10

 **ii)** ==== =12

 **iii)** Ο εκθέτης γράφεται:

2−log5 = 2−log=2∙1−log=2∙log10−log= log102−log= log100−log= =log=log=log=log20 2−log5 = log20. Οπότε:

= = 20

**iv)** == =

== ===

====

**ΑΣΚΗΣΗ 5**

Να λυθεί η εξίσωση: 2(logx8)2 + logx64 + logx8 = 9 ( 1), όπου x > 0 με x ≠ 1.

**Λύση**

Η (1) γράφεται: (1)2(logx8)2 + logx82 + logx8 − 9 = 0 

2(logx8)2 +2logx8+ logx8 − 9 = 0 2(logx8)2 + 3logx8 − 9 = 0 (2)

Τώρα θέτουμε: logx8 = ω (3). Άρα η (2) λόγω της (3) γράφεται:

2ω2 + 3ω − 9 = 0 δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς ω με ρίζες  και −3.

Οπότε λόγω της (3) και αφού βρήκαμε ότι ω =  ή ω = −3, έχουμε ότι οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι ρίζες των εξισώσεων: logx8 =  (4) και logx8 = −3 (5)

* (4)  logx23=  3logx2 =  logx2 = = 2 =2x = 4
* (5)  logx23= −3 3logx2 = −3 logx2 = −1x−1 = 2 = 2 x = 

**ΑΣΚΗΣΗ 6**

Αν logα=5, logβ=−6 και logγ=3, να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

**i)** log(α2γ3) , **ii)** log

**Λύση**

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες λογαρίθμων που είδαμε παραπάνω στη θεωρία έχουμε ότι:

**i)** log(α2γ3) = logα2 + logγ3 = 2logα + 3logγ = (αντικαθιστούμε τις τιμές των λογαρίθμων)

 = 2∙5 + 3∙3 = 10 + 9 = 19

**ii)** log= log(α2∙β) − log= logα2 + logβ − logγ = 2logα + logβ − logγ =

 (αντικαθιστούμε τις τιμές των λογαρίθμων)

 = 2∙5 + (−6) − ∙3 = 10 − 6 −1 = 3

**ΑΣΚΗΣΗ 7**

Αν log2=α και log3=β, να υπολογιστούν συναρτήσει των α και β οι αριθμοί:

log5, log6, log8, log50, log72.

**Λύση**

log5 = log=log10−log2 = 1 – α

log6 = log(2∙3) = log2 + log3 = α + β

log8 = log23 = 3log2 = 3α

log50 = log(5∙10) = log5 + log10 = log+ 1 = log10−log2 + 1= 1 – α + 1 = 2 – α

log72 = log(8∙9) = log8 + log9 = log23 + log32 = 3log2 +2 log3 = 3α + 2β

Τώρα και με τη βοήθεια των παραπάνω λυμένων ασκήσεων ας προσπαθήσουμε να λύσουμε τις ακόλουθες **ασκήσεις**:

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

|  |  |
| --- | --- |
| **1.** | Να υπολογισθούν, χωρίς τη χρήση υπολογιστή τσέπης, οι λογάριθμοι: |
|   | **i)** log100,001 | **ii)**  | **iii)** 32 |
|   | **iv)** log9 | **v)** 16 | **vi)**  |
| **2.** | Για ποια τιμή του x ισχύει: |
|   | **i)** log10x = 3 | **ii)** log4x = − | **iii)** x =  |
| **3.** | Για ποια τιμή του α ισχύει: |
|   | **i)** logα16 = 4 | **ii)** logα8 =  | **iii)** logα0,1 = −3 |
| **4.** | Να αποδείξετε ότι: |
|   | **i)** log23 + 2log24 - log212 = 2 | **ii)** 3log102 + log105 - log104 = 1 |
|   | **iii)** log1025 + log108 - log1032 = 1 - log102 |
|   | **iv)** = 2 |
|   | **v)** 2log2(2 + ) + log2(6 - 4) = 2 |

… και κατά τα γνωστά, τις ερωτήσεις σας και τις λύσεις των Ασκήσεων μπορείτε να τις στείλετε στο e-mail: tzanetatos@sch.gr

**Να είστε καλά και να προσέχετε και βέβαια Χρόνια Πολλά και Καλά με Υγεία !!!**

Ο καθηγητής σας της Άλγεβρας

Γεράσιμος Τζανετάτος

\*\*\* Η περίληψη της θεωρίας και οι ασκήσεις για λύση προέρχονται από το σχολικό βιβλίο, ενώ οι γραφικές παραστάσεις των λογαριθμικών συναρτήσεων y = logx και y = lnx και οι εκφωνήσεις των λυμένων ασκήσεων προέρχονται από τον ιστότοπο [plansmath.blogspot.com](http://www.study4exams.gr).