Καταρχάς ελπίζω ότι και στη σημερινή μας επικοινωνία βρίσκω, εσάς και τις οικογένειές σας, καλά, δυνατούς και γεμάτος αισιοδοξία.

**Γεια σας και χαρά σας και πάλι καλά μου παιδιά !!!**

Όπως βλέπετε αγαπημένοι μου μαθητές και αγαπημένες μου μαθήτριες, δεν σας έχω ξεχάσει. Άλλωστε να είστε βέβαιοι ότι αυτό δεν θα μπορούσε ποτέ να συμβεί. Οπότε μετά και το τέλος των . . . διακοπών, στις οποίες ελπίζω να περάσατε όμορφα, ας προσπαθήσουμε να κάνουμε επανεκκίνηση. Πάμε λοιπόν και πάλι, πιστεύω με πολλή «όρεξη» από την πλευρά σας, στα «δικά μας» !!!

Ξεκινώντας το σημερινό μας μάθημα, ας δούμε τις λύσεις των ασκήσεων 1 έως και 4, τις οποίες είχαμε για λύση από το προηγούμενο μάθημα.

Όσοι από σας έχετε ασχοληθεί με τις ασκήσεις αυτές, να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με τις λύσεις και, αν χρειάζεται, να κάνετε τις αναγκαίες διορθώσεις. Όσοι πάλι δεν μπορέσατε να ασχοληθείτε, να μελετήσετε τις λύσεις και στη συνέχεια να προσπαθήσετε και μόνοι σας να λύσετε τις ασκήσεις. Σε κάθε περίπτωση περιμένω ερωτήσεις και απορίες σας στο e-mail tzanetatos@sch.gr.

Είχαμε λοιπόν από το προηγούμενο μάθημα τις εξής **ασκήσεις**:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **1.** | Να υπολογισθούν, χωρίς τη χρήση υπολογιστή τσέπης, οι λογάριθμοι: | | |
|  | **i)** log100,001 | **ii)** | **iii)** 32 |
|  | **iv)** log9 | **v)** 16 | **vi)** |

**Λύση**

**i)**  Έστω ότι log100,001= x. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε ότι:

log100,001 = x 10x =0,001 10x = 10x = 10x = 10−3 x = −3



Άρα: log100,001 = −3

**ii)** Έστω ότι = x. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε ότι:



= x = = 10−x = −x = x = −.



Άρα: = −.



**iii)** Έστω ότι 32 = x. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε ότι:



32 = x = 32= 25 2−x = 25 −x = 5 x = −5.



Άρα: 32 = −5 .



**iv)** Έστω ότι log9= x. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε ότι:



log9= x9x = 9x =9x =9x =(32)x =

32x =2x =  x = .



Άρα: log9=  .



**v)** Έστω ότι 16 = x. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε ότι:



16 = x = 16 = 24 = 24 x = 4 x = 8 .



Άρα: 16 = 8 .



**vi)**  Έστω ότι = x. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε ότι:



= x ====



==x = − .



Άρα: =− .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **2.** | Για ποια τιμή του x ισχύει: | | |
|  | **i)** log10x = 3 | **ii)** log4x = − | **iii)** x = |

**Λύση**

Σύμφωνα με τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε ότι:

**i)** Για x > 0 ισχύει: log10x = 3 x = 103 = 1000



**ii)** Για x > 0 ισχύει: log4x = −x = x =  x =  x = 



x = 2−1x =



**iii)** x = x = x = x = x = x =



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **3.** | Για ποια τιμή του α ισχύει: | | |
|  | **i)** logα16 = 4 | **ii)** logα8 = | **iii)** logα0,1 = −3 |

**Λύση**

Για α > 0 και α ≠ 1 σύμφωνα με τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε ότι:

**i)** logα16 = 4 α4 = 16 α4 = 24 α = 2, αφού α > 0



**ii)** logα8 =  = 8



(υψώνουμε και τα δύο μέλη στην δύναμη , ώστε ο εκθέτης του α να γίνει 1)



 = α = α = α = α = 22 α = 4



**iii)** logα0,1 = −3 α−3  = 0,1



(υψώνουμε και τα δύο μέλη στην δύναμη , ώστε ο εκθέτης του α να γίνει 1)

= α = α = α = α =



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **4.** | Να αποδείξετε ότι: | |
|  | **i)** log23 + 2log24 − log212 = 2 | **ii)** 3log102 + log105 − log104 = 1 |
|  | **iii)** log1025 + log108 − log1032 = 1 − log102 | |
|  | **iv)** = 2 | |
|  | **v)** 2log2(2 + ) + log2(6 − 4) = 2 | |

**Λύση**

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες λογαρίθμων που έχουμε δει στη θεωρία έχουμε ότι:

**i)** log23 + 2log24 − log212 = log23 + log242 − log212 = log23 + log216 − log212 =

= log2(3∙16) − log212 = log248 − log212 = log2= log24 = 2, διότι log24 = 2 22 = 4



**ii)** 3log102 + log105 − log104 = log1023 + log105 − log104 = log108 + log105 − log104 =

= log10(8∙5) − log104 = log1040 − log104 = log10= log1010 = 1

**iii)** log1025 + log108 − log1032 = log1052 + log1023 − log1025 =

∙2log105 + ∙3log102 − ∙5log102 = log105 + log102 − log102 = log10(5∙2) − log102 =

= log1010 − log102 = 1 − log102

**iv)** Ο εκθέτης γράφεται:

log26−2log2 = log26−log2 = log26−log23 = log2 = log22 = 1 . Οπότε:

= 21 = 2



**v)** 2log2(2 + ) + log2(6 − 4) = log2(2 + )2 + log2(6 − 4) =



= log2(22 + 2∙2∙+)2 + log2(6 − 4) = log2(4 + 4+2) + log2(6 − 4) =



= log2(6 + 4) + log2(6 − 4) = log2(6 + 4)(6 − 4) = log2(62−(4)2) =



= log2(36−42) = log2(36−16∙2) = log2(36−32) = log24 = 2, διότι log24 = 2 22 = 4



Στη συνέχεια ας δούμε κάποιες **λυμένες ασκήσεις** επάνω στην έννοια **της λογαριθμικής συνάρτησης** (και των οποίων η αρίθμηση είναι συνέχεια της αρίθμησης των λυμένων ασκήσεων του προηγούμενου μαθήματος):

**ΑΣΚΗΣΗ 8**

Να τοποθετηθούν με αύξουσα σειρά οι αριθμοί: log1, 5, 1, log2, log, 0.



**Λύση**

Εκφράζουμε όλους τους αριθμούς ως δεκαδικούς λογαρίθμους.

Έχουμε ότι: 5 = logx x = 105 . Άρα: 5 = log105 .



Επίσης έχουμε ότι: 1 = log10 και 0 = log1.

Επειδή τώρα ισχύει: 1 < < 2 < 10 < 105  και η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το 10 είναι γνησίως αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι:



log1 < log < log2 < log10 < log105  0 < log < log2 < 1 < 5



**ΑΣΚΗΣΗ 9**

Να λυθούν οι εξισώσεις:

**i)** log(x+1)+log(x–2)=log18 , **ii)** logx2 = (logx)2 , **iii)**  ,

**iv)** log[log(x2+x+4)]=0 , **v)** 3x−1 = 2x+1 , **vi)** x1+logx=100

**Μεθοδολογία**

Η γενική μεθοδολογία επίλυσης αυτού του τύπου των **λογαριθμικών εξισώσεων** συνίσταται στο να εκφράσουμε (εάν βέβαια γίνεται) τα δύο μέλη της εξίσωσης ως λογαρίθμους με την ίδια βάση α, οπότε στη συνέχεια εφαρμόζουμε την ισοδυναμία:

logαx1 = logαx2x1 = x2 .



**Λύση**

**i)** Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει: ( x+1 > 0 x > −1 και x−2 > 0 x > 2)x >2 .



Με τον περιορισμό αυτό και εφαρμόζοντας ιδιότητες λογαρίθμων η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

log[(x+1)∙(x–2)]=log18 log(x2−2x+x−2)=log18 log(x2−x −2)=log18



x2−x −2=18 x2−x −2−18 = 0 x2−x −20 = 0



δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x με ρίζες 5 και −4, από τις οποίες δεκτή ως ρίζα της αρχικής εξίσωσης είναι η x = 5, αφού σύμφωνα με τον περιορισμό πρέπει x >2 .

**ii)** Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει: x > 0 .

Με τον περιορισμό αυτό και εφαρμόζοντας ιδιότητες λογαρίθμων η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: 2logx = (logx)2 2logx−(logx)2 = 0logx(2−logx) = 0



( logx = 0 (1) ή 2−logx = 0 (2) ) . Με βάση τώρα τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε:

(1) x = 100 x = 1, δεκτή αφού σύμφωνα με τον περιορισμό πρέπει x > 0



(2) −logx = −2 logx = 2 x = 102 x = 100, δεκτή αφού σύμφωνα με τον περιορισμό πρέπει x > 0.



**iii)** Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει: ( x+1 > 0 x > −1 και 5x > 0 x > 0)x >0 .



Με τον περιορισμό αυτό και εφαρμόζοντας ιδιότητες λογαρίθμων η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:





(x+1)∙5x = 100 (x+1)∙ x = 20 x2+x −20 = 0 δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x με ρίζες 4 και −5, από τις οποίες δεκτή ως ρίζα της αρχικής εξίσωσης είναι η x = 4, αφού σύμφωνα με τον περιορισμό πρέπει x >0.



**iv)** Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει:

( x2+x+4 > 0 ,

το οποίο ισχύει για κάθε x∈r, διότι το x2+x+4 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα −15<0, άρα είναι πάντα ομόσημο του συντελεστή 1 του x2

και

log(x2+x+4) > 0 log(x2+x+4) > log1



(διότι η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το 10>1 είναι γνησίως αύξουσα)

x2+x+4 > 1x2+x+4 −1 > 0 x2+x+3 > 0 ,



το οποίο ισχύει για κάθε x∈r, διότι το x2+x+3 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα −11<0, άρα είναι πάντα ομόσημο του συντελεστή 1 του x2 )

Άρα η εξίσωση ορίζεται για κάθε x∈r και εφαρμόζοντας ιδιότητες λογαρίθμων ισοδύναμα γράφεται:

log[log(x2+x+4)] = log1 log(x2+x+4) = 1log(x2+x+4) = log10 x2+x+4 = 10



x2+x+4−10 = 0 x2+x−6 = 0



δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x με ρίζες 2 και −3, οι οποίες είναι και ρίζες της αρχικής εξίσωσης, διότι αυτή, όπως είδαμε παραπάνω, ορίζεται για κάθε x∈r.

**v)** Η εξίσωση ορίζεται για κάθε x∈r και επειδή τα δύο μέλη της είναι θετικά ισοδύναμα γράφεται: log3x−1 =log2x+1. Εφαρμόζοντας τώρα ιδιότητες λογαρίθμων η εξίσωση αυτή ισοδύναμα γράφεται:

(x−1)log3 = (x+1)log2 x∙log3−log3 = x∙log2+log2 x∙log3−x∙log2 = log2+log3



(log3−log2)x = log(2∙3) (log)x = log6 (log1,5)x = log6 x =  .



**vi)** Η εξίσωση έχει έννοια για x > 0 και x ≠ 1.

Με τον περιορισμό αυτό και επειδή τα δύο μέλη της είναι θετικά, η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: logx1+logx = log100. Εφαρμόζοντας τώρα ιδιότητες λογαρίθμων η εξίσωση αυτή ισοδύναμα γράφεται:

(1+logx)logx = 2 logx+logx∙logx = 2 logx+(logx)2–2 = 0 (logx)2+logx–2 = 0 (1)



Στη συνέχεια θέτουμε: logx = ω (2), οπότε η εξίσωση (1) λόγω της (2) ισοδύναμα γράφεται:

ω2+ω–2 = 0 δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς ω με ρίζες με ρίζες ω1 = 1, ω2 = –2.

Λόγω τώρα της (2) και αφού βρήκαμε ότι ω = 1 ή ω = –2, οι ρίζες της δοσμένης είναι οι ρίζες των εξισώσεων:

logx = 1 (3) και logx = –2 (4)

● (3) x = 101 x = 10

● (4)  x = 10−2  x = =

**ΑΣΚΗΣΗ 10**

Να λυθούν τα συστήματα:

**i)**  , **ii)**  , **iii)**  , **iv)** 

**Λύση**

**i)** Το σύστημα ορίζεται για x > 0 και y > 0. Με τους περιορισμούς αυτούς το σύστημα ισοδύναμα γράφεται:

 (Σ)

Τώρα θέτουμε:

** ,** οπότε το σύστημα (Σ) λόγω των (1) και (2) γράφεται ισοδύναμα:

 **,** το οποίο είναι αλγεβρικό σύστημα ως προς ω, φ και λύνεται με τη βοήθεια των τύπων Vieta από τη θεωρία της δευτεροβάθμιας εξίσωσης της Άλγεβρας της Α’ Λυκείου ως εξής:

Λόγω των (3) και (4) έχουμε ότι τα ω, φ είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης:

t2 – (4log2)t + 3(log2)2 = 0, που είναι οι: log2, 3log2.

Οπότε έχουμε για τα ω, φ τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση: **** , 2η περίπτωση: ****

Στην 1η περίπτωση και λόγω των (1), (2) έχουμε ότι οι λύσεις του συστήματος (Σ), άρα και του δοσμένου, είναι οι λύσεις του συστήματος:

**** **** ********

Στην 2η περίπτωση και λόγω των (1), (2) έχουμε ότι οι λύσεις του συστήματος (Σ), άρα και του δοσμένου, είναι οι λύσεις του συστήματος:

**** **** ********

Επομένως οι λύσεις του δοσμένου συστήματος είναι οι:

**** ,  **** .

**ii)** Το σύστημα έχει έννοια για x > 0 και y > 0 με y≠1. Με τους περιορισμούς αυτούς και επειδή τα δύο μέλη των εξισώσεων είναι θετικά, το σύστημα ισοδύναμα γράφεται:  (Σ)

Εφαρμόζοντας τώρα ιδιότητες λογαρίθμων το σύστημα (Σ) ισοδύναμα γράφεται:

 (Σ1)

Στη συνέχεια θέτουμε:

** ,** οπότε το σύστημα (Σ1) λόγω των (1) και (2) γράφεται ισοδύναμα:

 **,** το οποίο είναι αλγεβρικό σύστημα ως προς ω, φ και λύνεται με τη βοήθεια των τύπων Vieta από τη θεωρία της δευτεροβάθμιας εξίσωσης της Άλγεβρας της Α’ Λυκείου ως εξής:

Λόγω των (3) και (4) έχουμε ότι τα ω, φ είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης:

t2 – (log6+1)t + log6 = 0, που είναι οι: log6, 1.

Οπότε έχουμε για τα ω, φ τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση: **** , 2η περίπτωση: ****

Στην 1η περίπτωση και λόγω των (1), (2) έχουμε ότι οι λύσεις του συστήματος (Σ1), άρα και του δοσμένου, είναι οι λύσεις του συστήματος:

**** **** ****

Στην 2η περίπτωση και λόγω των (1), (2) έχουμε ότι οι λύσεις του συστήματος (Σ1), άρα και του δοσμένου, είναι οι λύσεις του συστήματος:

**** **** ****

Επομένως οι λύσεις του δοσμένου συστήματος είναι οι:

**** , **** .

**iii)** Το σύστημα ορίζεται για x > 0 και y > 0.

Με τους περιορισμούς αυτούς και εφαρμόζοντας ιδιότητες λογαρίθμων το σύστημα ισοδύναμα γράφεται:

 

**Πολλαπλασιάζοντας τώρα κατά μέλη τις (1) , (2) έχουμε ότι:**

**x∙y∙ = 9∙4** x2 = 36 ( x = 6 δεκτή ή x = −6 απορρίπτεται διότι πρέπει x > 0 )

Για x = 6 η (1) **γίνεται: 6y = 9** y = y = 

Επομένως η λύση του δοσμένου συστήματος είναι:

** .**

**iv)** Το σύστημα έχει έννοια για x > 0 και y > 0 με x≠1 και y≠1. Με τους περιορισμούς αυτούς και επειδή τα δύο μέλη της πρώτης εξίσωσης (όπως άλλωστε και της δεύτερης) είναι θετικά, το σύστημα ισοδύναμα γράφεται:  (Σ)

Εφαρμόζοντας στη συνέχεια ιδιότητες λογαρίθμων και δυνάμεων το σύστημα (Σ) ισοδύναμα γράφεται:

 (Σ1)

Θέτοντας τώρα στην (1) όπου x το 2y από την (2), η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα:

y∙log2y = 2y∙logy log2y = 2logy log2y = logy2 2y = y2 2y−y2 = 0 

y(2−y) = 0 

( y = 0 απορρίπτεται, διότι πρέπει y > 0 ή 2−y = 0 y = 2 δεκτή )

Τέλος από την (2) για y = 2 έχουμε ότι: x = 2∙2 x = 4

Επομένως η λύση του δοσμένου συστήματος είναι:

**** .

**ΑΣΚΗΣΗ 11**

Να συγκριθούν οι αριθμοί:

**i)** log723 και log722 , **ii)** log0,811 και log0,814

**Λύση**

**i)** Οι log723 και log722 είναι οι τιμές της λογαριθμικής συνάρτησης f(x) = log7x αντίστοιχα για 23 και 22. Επειδή η λογαριθμική συνάρτηση f(x) = log7x είναι γνησίως

αύξουσα, αφού η βάση της είναι το 7 > 1, έχουμε ότι:

23 > 22 log723 > log722.

**ii)** Οι log0,811 και log0,814 είναι οι τιμές της λογαριθμικής συνάρτησης f(x) = log0,8x αντίστοιχα για 11 και 14. Επειδή η λογαριθμική συνάρτηση f(x) = log0,8x είναι γνησίως φθίνουσα, αφού η βάση της είναι το 0,8 < 1, έχουμε ότι:

11 < 14 log0,811 > log0,814.

**ΑΣΚΗΣΗ 12**

Να λυθούν οι ανισώσεις:

**i)** log(6x−12) > log18 , **ii)** ln(3x+10e) < 1 , **iii)** ln[log(4x+2)] > 0

**Μεθοδολογία**

Η γενική μεθοδολογία επίλυσης αυτού του τύπου των **λογαριθμικών ανισώσεων** συνίσταται στο να εκφράσουμε (εάν βέβαια γίνεται) τα δύο μέλη της ανίσωσης ως λογαρίθμους με την ίδια βάση α, οπότε στη συνέχεια εφαρμόζουμε τις ισοδυναμίες:

● Αν α > 1, τότε: logαx1 < logαx2x1<x2, αφού η f(x)=logαx είναι γνησίως αύξουσα



● Αν 0 <α< 1, τότε: logαx1 < logαx2x1>x2, αφού η f(x)=logαx είναι γνησίως φθίνουσα



**Λύση**

**i**) Για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει: 6x−12 > 0 6x > 12 x > 2 (1)

Με τον περιορισμό αυτό και επειδή η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το 10 είναι γνησίως αύξουσα (διότι 10 > 1), έχουμε ότι:

log(6x−12) > log18 6x−12 > 18 6x > 18+12 6x > 30 x > x > 5 (2)



Οι (1) και (2) συναληθεύουν για x > 5.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα x ∈ (5, +∞).

**ii)** Για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει: 3x+10e > 0 3x > −10e x >  (1)

Με τον περιορισμό αυτό και επειδή είναι 1 = lne, η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται: ln(3x+10e) < lne .

Eπειδή η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το e είναι γνησίως αύξουσα (διότι e>1) έχουμε ότι η τελευταία ανίσωση ln(3x+10e) < lne ισοδύναμα γράφεται:

3x+10e < e 3x < e−10e 3x < −9e x < x < −3e (2)



Οι (1) και (2) συναληθεύουν για  < x < −3e .

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα x ∈.

**iii)** Για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει:

( 4x +2 > 0 4x > −2 x > − x > −



και

log(4x+2) > 0



( διότι 0 = log1 )

log(4x+2) > log1



(διότι η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το 10 είναι γνησίως αύξουσα (αφού 10>1))

4x+2 > 1 4x > 1−2 4x > −1 x > − )



Άρα για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει x > − (1)

Με τον περιορισμό αυτό και επειδή είναι 0 = ln1, η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται: ln[log(4x+2)] > ln1 .

Eπειδή η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το e είναι γνησίως αύξουσα (διότι e>1), έχουμε ότι η τελευταία ανίσωση ln[log(4x+2)] > ln1 ισοδύναμα γράφεται:

log(4x+2) > 1 (διότι 1 = log10)



log(4x+2) > log10 .

Eπειδή τώρα η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το 10 είναι γνησίως αύξουσα (διότι 10>1), έχουμε ότι η τελευταία ανίσωση log(4x+2) > log10 ισοδύναμα γράφεται:

4x+2 > 10 4x > 10−2 4x > 8 x > x > 2 (2)



Οι (1) και (2) συναληθεύουν για x > 2.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα x ∈ (2, +∞).

Με τη βοήθεια των παραπάνω λυμένων ασκήσεων, ας προσπαθήσουμε τώρα να λύσουμε τις εξής **ΑΣΚΗΣΕΙΣ** (και των οποίων η αρίθμηση είναι συνέχεια της αρίθμησης των ασκήσεων για λύση του προηγούμενου μαθήματος):

**5.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

**i)** log(x + 1) + log(x − 1) = log2 , **ii)** log(x − 1) + logx = 1 − log5 ,

**iii)** log(x2 + 1) − logx = log2 **iv)** 5x = 21−x

**6.** Να λυθούν τα συστήματα:

**i)** , **ii)**

**7.** Να συγκριθούν οι αριθμοί:

**i)** log32   και   log35 , **ii)** log0,35   και   log0,37 , **iii)** log(x2 + 1)   και   log2x

**8.** Να λυθούν οι ανισώσεις:

**i)** logx2 > (logx)2 , **ii)** log(x2 − 4) < log3x , **iii)**  xlogx > 10

… και κατά τα γνωστά, τις ερωτήσεις σας και τις λύσεις των Ασκήσεων μπορείτε να τις στείλετε στο e-mail: tzanetatos@sch.gr

**Να είστε καλά και να προσέχετε !!!**

Ο καθηγητής σας της Άλγεβρας

Γεράσιμος Τζανετάτος

\*\*\* Οι ασκήσεις για λύση και οι εκφωνήσεις των ii) και v) από τη λυμένη Άσκηση 9 προέρχονται από το σχολικό βιβλίο, ενώ οι εκφωνήσεις της λυμένης Άσκησης 8 και των i), iii), iv) και vi) από τη λυμένη Άσκηση 9 προέρχονται από τον ιστότοπο [plansmath.blogspot.com](http://www.study4exams.gr).