**Γεια σας και χαρά σας καλά μου παιδιά !!!**

Καταρχάς ελπίζω ότι και στη σημερινή μας επικοινωνία βρίσκω, εσάς και τις οικογένειές σας, καλά, δυνατούς και γεμάτος αισιοδοξία.

**Παρόλο που οι . . . διακοπές συνεχίζονται – και εύχομαι να περνάτε καλά - όπως βλέπετε εξακολουθώ να σας σκέφτομαι. Όμως** **εξακολουθώ, εκτός από μια-δυο εξαιρέσεις, να μην έχω νέα σας σε σχέση με τα Μαθηματικά Προσανατολισμού. Οπότε επαναλαμβάνω ότι σας έχω «χάσει» ως Τμήμα και … να είστε βέβαιοι ότι μου έχετε λείψει και μάλιστα πολύ !!!**

**Πρέπει συνεπώς να κινητοποιηθούμε για να κερδίσουμε τον χαμένο χρόνο. Πάμε λοιπόν και πάλι, πιστεύω πια με «όρεξη» από την πλευρά σας, στα «δικά μας» !!!**

Ξεκινώντας το σημερινό μας μάθημα, ας δούμε τις λύσεις των ασκήσεων που είχαμε επάνω στον κύκλο, για τις οποίες υποδείξεις σας είχα στείλει στο προηγούμενο μάθημα. Όσοι από σας έχετε ασχοληθεί με τις ασκήσεις αυτές, να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με τις λύσεις και, αν χρειάζεται, να κάνετε τις αναγκαίες διορθώσεις. Όσοι πάλι δεν μπορέσατε να ασχοληθείτε, να μελετήσετε τις λύσεις και να προσπαθήσετε και μόνοι σας να τις λύσετε. Σε κάθε περίπτωση περιμένω τις απαντήσεις των ασκήσεων, ερωτήσεις και απορίες σας στο e-mail tzanetatos@sch.gr

Είχαμε λοιπόν από το προ-προηγούμενό μας μάθημα τις εξής ασκήσεις:

**ΑΣΚΗΣΗ 1**

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων, αν:

 α) έχει ακτίνα ρ=4.

 β) το Α(–3,4) είναι ένα σημείο του.

 γ) εφάπτεται στην ευθεία ε: x+y=4.

 δ) εφάπτεται στην ευθεία η: x+3=0.

**Λύση**

Έστω ρ η ακτίνα του κύκλου. Τότε η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: x2 + y2 = ρ2 (1), οπότε:

α) Για ρ=4 η (1) γίνεται: x2 + y2 = 42  x2 + y2 = 16.

β) Οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την (1).

Άρα η (1) για x=–3 και y=4 γίνεται: (–3)2+42 = ρ2  ρ2 = 9 +16 ρ2 = 25 

ρ = 5, διότι ρ > 0.

Οπότε για ρ=5 η (1) γίνεται: x2 + y2 = 52  x2 + y2 = 25.

γ) Το ρ είναι ίσο με την απόσταση του κέντρου Ο(0, 0) από την ευθεία ε: x+y = 4

x+y−4 = 0x+y+(−4) = 0.

Άρα ρ = d(O, ε) = = ====2ρ = 2

Οπότε για ρ=2 η (1) γίνεται:

 x2 + y2 = (2)2  x2 + y2 =22()2  x2 + y2 =4∙2  x2 + y2 = 8

δ) Το ρ είναι ίσο με την απόσταση του κέντρου Ο(0, 0) από την ευθεία η: x+3=0.

Άρα ρ = d(O, η) = = ==3 ρ = 3

Οπότε για ρ=3 η (1) γίνεται: x2 + y2 = 32  x2 + y2 =9

Παρατήρηση: Η ευθεία η: x+3=0 x=−3 είναι η ευθεία η κάθετη στον άξονα x’x που διέρχεται από το σημείο Σ(−3, 0). Άρα προφανώς η απόσταση του σημείου Ο(0, 0) από την ευθεία η είναι ίση με 3.

**ΑΣΚΗΣΗ 2**

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(5συνθ, 5ημθ).

**Λύση**

Είναι: (5συνθ)2 + (5ημθ)2 = 5(συνθ)2 + 5(ημθ)2 =5συν2θ + 5 ημ2θ = 5(συν2θ + ημ2θ) = 5∙1 = 5, διότι από την Τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι για κάθε θ∈r ισχύει: ημ2θ + συν2θ = 1.

Βρήκαμε λοιπόν ότι για κάθε θ∈r ισχύει: (5συνθ)2 + (5ημθ)2 = 5 =($\sqrt{5}$)2 .

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(5συνθ, 5ημθ) είναι ο κύκλος κέντρου Ο(0, 0) και ακτίνας $\sqrt{5}$.

**ΑΣΚΗΣΗ 3**

Να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(2,–3) και Β(–2,3) είναι διάμετρος του κύκλου x2+y2=13.

**Λύση**

● Ελέγχουμε πρώτα αν οι συντεταγμένες των σημείων Α, Β επαληθεύουν την εξίσωση x2+y2=13 του κύκλου:

○ Για το σημείο Α έχουμε ότι: 22+(−3) 2 = 4 + 9 = 13. Άρα οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση x2+y2=13 του κύκλου και συνεπώς το σημείο Α ανήκει στον κύκλο

x2+y2=13.

○ Για το σημείο Β έχουμε ότι: (−2) 2+3 2 = 4 + 9 = 13. Άρα οι συντεταγμένες του σημείου Β επαληθεύουν την εξίσωση x2+y2=13 του κύκλου και συνεπώς το σημείο Β ανήκει στον κύκλο

x2+y2=13.

● Βρίσκουμε τώρα το μέσο Μ του ΑΒ:

 η τετμημένη του Μ είναι: xM = == 0

η τεταγμένη του Μ είναι: yM = = =0

Συνεπώς το μέσο του ΑΒ είναι το σημείο Ο(0, 0), δηλ. το κέντρο του κύκλου x2+y2=13.

Αφού λοιπόν τα σημεία Α και Β είναι σημεία του κύκλου x2+y2=13 και το μέσο του ΑΒ είναι το κέντρο του κύκλου αυτού, συμπεραίνουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου x2+y2=13.

**ΑΣΚΗΣΗ 4**

Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου x2+y2=25, αν έχει μέσο το Μ(3,1).

**Λύση**

Έστω ΑΒ η χορδή, της οποίας ζητάμε την εξίσωση.

Τότε το απόστημα ΟΜ είναι κάθετο στην ευθεία ΑΒ, άρα:

λΟΜ∙λΑΒ = −1 (1) ,

όπου λΟΜ και λΑΒ  είναι αντίστοιχα οι συντελεστές διεύθυνσης των ΟΜ και ΑΒ .

Είναι: λΟΜ = =, άρα από την (1) έχουμε ότι:

∙λΑΒ = −1  λΑΒ = −3

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση της χορδής ΑΒ του κύκλου, η οποία διέρχεται από το σημείο Μ(3,1) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λΑΒ = −3, είναι:

y–1 = −3(x−3) y–1 = −3x+9 y = −3x+9+1 y = −3x+10.

**ΑΣΚΗΣΗ 5**

Δίνεται ο κύκλος x2+y2=25 και η ευθεία ε: y=x+4.

 α) Να δείξετε ότι η ευθεία τέμνει τον κύκλο.

 β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου της χορδής που ορίζουν ο κύκλος με την ευθεία.

**Λύση**

α) Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων του κύκλου και της ευθείας, δηλαδή λύνουμε το σύστημα: 

Η (1) λόγω της (2) γίνεται:

x2+(x+4)2=25 x2+x2+2∙4∙x+42 = 25 2x2+8x+16−25 = 0 2x2+8x−9 = 0 δευτεροβάθμια ως προς x με διακρίνουσα Δ = 82−4∙2∙(−9) = 64 + 72 = 136 > 0 , άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις x1,2=== 



Οπότε:

● Αν x = , τότε από την (2) έχουμε ότι:

y = +4 y = y = 

● Αν x = , τότε από την (2) έχουμε ότι:

y = +4 y = y = 

Άρα οι λύσεις του συστήματος (Σ) είναι:

 , 

Αφού λοιπόν το σύστημα (Σ) έχει δύο λύσεις, συμπεραίνουμε ότι η ευθεία τέμνει τον κύκλο.

β) Από το α) έχουμε ότι τα σημεία τομής Α και Β του κύκλου και της ευθείας είναι τα:

 και 

Οπότε οι συντεταγμένες του μέσου Μ της χορδής ΑΒ που ορίζουν ο κύκλος με την ευθεία είναι:

τετμημένη του Μ: xM =  ==  = −2

τεταγμένη του Μ: yM =  = = = 2

Άρα το μέσο Μ της χορδής ΑΒ που ορίζουν ο κύκλος με την ευθεία είναι το σημείο Μ(−2, 2).

**ΑΣΚΗΣΗ 6**

Να δείξετε ότι η ευθεία ε: x+3y=10 είναι εφαπτομένη του κύκλου x2+y2=10.

**Λύση**

1ος τρόπος

Βρίσκουμε την απόσταση d(Ο, ε) του κέντρου Ο(0, 0) του κύκλου x2+y2=10 από την ευθεία ε: x+3y=10 x+3y−10 = 0  x+3y+(−10) = 0.

Είναι: d(Ο, ε) = ===  d(Ο, ε) = 

η απόσταση d(Ο, ε) του κέντρου Ο(0, 0) του κύκλου x2+y2=10 από την ευθεία ε: x+3y=10

ισούται με την ακτίνα του κύκλου.

Άρα η ευθεία ε: x+3y=10 είναι εφαπτομένη του κύκλου x2+y2=10.

2ος τρόπος

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων του κύκλου και της ευθείας, δηλαδή λύνουμε το σύστημα: 

Η (1) λόγω της (2) γίνεται:

(10−3y)2+y2=10102−2∙10∙3y+(3y)2+y2 = 10100−60y+9y2+y2−10 = 0

90−60y+10y2 = 0 10y2−60y+90= 0 10(y2−6y+9)= 0 y2−6y+9= 0 

(y−3)2 = 0 y = 3 διπλή λύση (3)

Αφού η εξίσωση (1) του συστήματος έχει διπλή λύση, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα των εξισώσεων του κύκλου και της ευθείας έχει διπλή λύση και επομένως η ευθεία ε: x+3y=10 είναι εφαπτομένη του κύκλου x2+y2=10.

Για να βρούμε το σημείο επαφής, θέτουμε στην (2), όπου y το 3 από την (3) και έχουμε ότι:

x= 10−3∙3 x=10−9 x=1.

Άρα το σημείο επαφής της ευθείας με τον κύκλο είναι το Σ(1, 3).

**ΑΣΚΗΣΗ 7**

Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου x2+y2=10, η οποία είναι:

α) Παράλληλη στην ευθεία η: x+3y=4

β) Κάθετη στην ευθεία ζ: 3x+y=2.

**Λύση**

α) Έστω Μ(x1, y1) το σημείο επαφής. Η ζητούμενη εφαπτομένη στο Μ έχει εξίσωση ε: **x1⋅x+y1⋅y =** 10 (1). Έχουμε δύο αγνώστους, τους x1 και y1, άρα θέλουμε δύο εξισώσεις. Έχουμε ότι:

Η εφαπτομένη ε έχει συντελεστή διεύθυνσης λε = και η ευθεία η έχει συντελεστή διεύθυνσης λη = −.

Αφού ε // η  λε = λη = −x1 =  **y1 (2)**

Το Μ είναι σημείο του κύκλου. Άρα  x12 + y12 = 10  (3).

Λύνουμε τώρα το σύστημα των εξισώσεων (2) και (3).

Η (3) λόγω της (2) γίνεται:  + y12 = 10  y12 + y12 = 10  y12 = 10 

10y12 = 10∙9 y12 = 9 y1 = 3 ή y1 = −3. Οπότε:

● Αν y1 = 3, τότε από την (2) έχουμε ότι: x1 =∙3 **= 1,**

**άρα το σημείο επαφής είναι το Μ(1, 3)**

και αντικαθιστώντας στην (1) το x1 με  **1 και το** y1 με 3 έχουμε ότι η ζητούμενη εφαπτομένη στο Μ έχει εξίσωση:

**1⋅x+3⋅y =** 10x+3y = 103y = −x+10y =−x+.

● Αν y1 = −3, τότε από την (2) έχουμε ότι: x1 = ∙(−3) **= −1,**

**άρα το σημείο επαφής είναι το Μ(−1,− 3)**

και αντικαθιστώντας στην (1) το x1 με  **−1 και το** y1 με −3 έχουμε ότι η ζητούμενη εφαπτομένη στο Μ έχει εξίσωση:

**−1⋅x+(−3)⋅y =** 10−x−3y = 10−3y = x+10y =−x−.

β) Έστω Μ’(x2, y2) το σημείο επαφής. Η ζητούμενη εφαπτομένη στο Μ’ έχει εξίσωση ε’: **x2⋅x+y2⋅y =** 10 (4). Έχουμε δύο αγνώστους, τους x2 και y2, άρα θέλουμε δύο εξισώσεις. Έχουμε ότι:

Η εφαπτομένη ε’ έχει συντελεστή διεύθυνσης λε’ =  και η ευθεία ζ έχει συντελεστή διεύθυνσης λζ = = −3.

Αφού ε’ ζ  λε’∙λζ = −1 ∙(−3) = −1 = −13x2 = − **y2**  **y2 = −**3x2 **(5)**

Το Μ’ είναι σημείο του κύκλου. Άρα  x22 + y22 = 10  (6).

Λύνουμε τώρα το σύστημα των εξισώσεων (5) και (6).

Η (6) λόγω της (5) γίνεται: x22 + (−3x2)2 = 10   x22 + 9x22 = 10   10x22 = 10 

x22 = 1x2 = 1 ή x2 = −1. Οπότε:

● Αν x2 = 1, τότε από την (5) έχουμε ότι: **y2 = −**3∙1 **= −3,**

**άρα το σημείο επαφής είναι το Μ’(1, −3)**

και αντικαθιστώντας στην (4) το x2 με  **1 και το** y2 με **−3** έχουμε ότι η ζητούμενη εφαπτομένη στο Μ’ έχει εξίσωση:

**1⋅x+(−3)⋅y =** 10x−3y = 10−3y = −x+10y =x−.

● Αν x2 = −1, τότε από την (5) έχουμε ότι: **y2 = −**3∙(−1) **= 3,**

**άρα το σημείο επαφής είναι το Μ’(−1, 3)**

και αντικαθιστώντας στην (4) το x2 με  **−1 και το** y2 με **3** έχουμε ότι η ζητούμενη εφαπτομένη στο Μ’ έχει εξίσωση:

−**1⋅x+3⋅y =** 10−x+3y = 103y = x+10y =x+.

**ΑΣΚΗΣΗ 8**

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο Κ((1, 2) και διέρχεται από το Α(5, 5).

**Λύση**

Έστω ρ η ακτίνα του κύκλου. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: (x−1)2 + (y–2)2=ρ2 (1).

Το σημείο Α(5, 5) ανήκει στον κύκλο. Άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την (1),

οπότε θέτοντας στην (1) όπου x το 5 και όπου y το 5 έχουμε ότι:

 (5−1)2 + (5–2)2=ρ2 42 + 32 = ρ2  ρ2 = 25 ρ = 5, διότι ρ > 0.

Αντικαθιστούμε τώρα στην (1) το ρ με 5 και έχουμε ότι η ζητούμενη εξίσωση του κύκλου είναι: (x−1)2 + (y–2)2 = 52 (x−1)2 + (y–2)2 = 25.

**ΑΣΚΗΣΗ 9**

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο ΑΒ με Α(–2,1) και Β(4,5).

**Λύση**

 Έστω ρ η ακτίνα και Κ(x0 , y0) το κέντρο του κύκλου. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: (x− x0)2 + (y– y0)2=ρ2 (1).

Αφού το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(–2,1) και Β(4,5) είναι διάμετρος του κύκλου, το κέντρο Κ(x0 , y0) του κύκλου είναι το μέσο του ΑΒ. Έχουμε λοιπόν ότι:

x0 = ==1 (2) και y0 = ==3 (3)

Αφού το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(–2,1) και Β(4,5) είναι διάμετρος του κύκλου, η ακτίνα ρ του κύκλου ισούται με (ΑΒ). Έχουμε λοιπόν ότι:

ρ = (ΑΒ) = = ===

==2=ρ =  (4)

Λόγω τώρα των (2) , (3) και (4) η εξίσωση (1) γίνεται:

 (x−1)2 + (y–3)2 =(x−1)2 + (y–3)2 = 13 .

**ΑΣΚΗΣΗ 10**

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο Κ(1,2), ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία ε: 3x+4y=6.

**Λύση**

Έστω ρ η ακτίνα του κύκλου. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: (x−1)2 + (y–2)2=ρ2 (1).

Αφού ο ζητούμενος κύκλος εφάπτεται στην ευθεία ε, η ακτίνα ρ του κύκλου είναι ίση με την απόσταση d(Κ, ε) του κέντρου Κ από την ευθεία ε: 3x+4y=6 3x+4y−6=0.

Έχουμε λοιπόν ότι: ρ = d(Κ, ε) = ====1 ρ =1 (2)

Λόγω τώρα της (2) η εξίσωση (1) γίνεται:

 (x−1)2 + (y–2)2 =12 (x−1)2 + (y–2)2 = 1 .

**ΑΣΚΗΣΗ 11**

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση x2+y2+6x–8y=0 παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το

κέντρο και την ακτίνα του.

 β) Να δείξετε ότι τα σημεία Ο(0,0) και Α(–6,8) είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου αυτού.

**Λύση**

**α)** Η εξίσωση x2+y2+6x–8y=0 είναι της μορφής x2+y2+Αx+Βy+Γ=0, όπου Α=6, Β=–8 και Γ=0.

Εφαρμόζοντας τη σχετική θεωρία, βρίσκουμε το Α2+Β2−4Γ. Έχουμε ότι:

Α2+Β2−4Γ = 62+(−8)2−4∙0 = 36+64 = 100 > 0  Α2+Β2−4Γ = 100 > 0 .

Άρα, σύμφωνα με τη θεωρία, η εξίσωση x2+y2+6x–8y=0 παριστάνει κύκλο με:

● κέντρο το σημείο , δηλ. το σημείο , δηλ. το σημείο 

και

● ακτίνα ρ = ===== 5 ρ = 5

Σημείωση: Η εξίσωση του κύκλου γράφεται: (x−(−3))2 + (y–4)2 =52 (x+3)2 + (y–4)2 = 25.

β) Για να δείξουμε ότι τα σημεία Ο(0,0) και Α(–6,8) είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου: x2+y2+6x–8y=0 (1), θα δείξουμε ότι τα σημεία Ο και Α ανήκουν στον κύκλο και ότι το μέσο του ΑΒ είναι το κέντρο του κύκλου.

**● Το σημείο** Ο(0,0) ανήκει στον κύκλο, διότι οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την (1), αφού: 02+02+6∙0–8∙0=0.

**● Το σημείο** Α(–6,8) ανήκει στον κύκλο, διότι οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την (1), αφού: (–6)2+82+6∙(–6)–8∙8=36+64−36−64=0.

● Βρίσκουμε τώρα το μέσο Μ του ΑΒ:

 η τετμημένη του Μ είναι: xM = == −3

η τεταγμένη του Μ είναι: yM = = = 4

Συνεπώς το μέσο Μ του ΑΒ είναι το κέντρο του κύκλου.

Μετά τον κύκλο, που μας απασχόλησε στα προηγούμενα μαθήματα, ας δούμε τώρα **ενημερωτικά** και **περιληπτικά** τους ορισμούς, τις εξισώσεις και τις βασικές ιδιότητες τριών ακόμη κωνικών τομών, **της παραβολής**, **της έλλειψης** και **της υπερβολής**, έννοιες τις οποίες θα συναντήσουμε στην επόμενη τάξη τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Φυσική και οι οποίες βρίσκουν εφαρμογή στην καθημερινή μας ζωή.

***ΠΑΡΑΒΟΛΗ***

***Ορισμός Παραβολής***



Έστω μια ευθεία *δ* και ένα σημείο *Ε* εκτός της *δ*. Ονομάζεται **παραβολή** με **εστία** το σημείο *Ε* και **διευθετούσα** την ευθεία *δ* ο γεωμετρικός τόπος *C* των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από την *Ε* και τη *δ*. Αν *Α* είναι η προβολή της εστίας *Ε* στη διευθετούσα *δ*, τότε το μέσο *Κ* του *ΕΑ* είναι προφανώς σημείο της παραβολής και λέγεται **κορυφή** της.

***Εξίσωση Παραβολής***

* Έστω *C* μια παραβολή με εστία *Ε* και διευθετούσα *δ*. Θα βρούμε την εξίσωση της παραβολής *C* ως προς σύστημα συντεταγμένων  με αρχή *Ο* την κορυφή της παραβολής και άξονα  την κάθετη από το *Ε* στην *δ*.

 

Αν στο σύστημα αυτό η τετμημένη της εστίας *Ε* είναι , τότε η εξίσωση της διευθετούσας θα είναι .

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραβολής, ένα σημείο  θα ανήκει στη *C*, αν και μόνο αν ισχύει:

 .

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της παραβολής *C* με εστία  και διευθετούσα  είναι:



Για παράδειγμα, η παραβολή με εστία το σημείο  και διευθετούσα την ευθεία  έχει  και επομένως έχει εξίσωση .



Ο αριθμός ***p*** λέγεται **παράμετρος** της παραβολής και η  παριστάνει την απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα.

* Αν τώρα πάρουμε σύστημα συντεταγμένων  με αρχή *Ο* την κορυφή της παραβολής και άξονα  την κάθετη από το *Ε* στη *δ*, αποδεικνύεται ότι η παραβολή *C* έχει εξίσωση:





Η εξίσωση αυτή γράφεται ισοδύναμα  και παριστάνει τη γραφική παράσταση της γνωστής μας από την Α΄ Λυκείου συνάρτησης

, όπου ****

Για παράδειγμα, η εξίσωση  παριστάνει

την παραβολή που έχει  και άρα έχει εστία το σημείο  και διευθετούσα την ευθεία .

***Ιδιότητες Παραβολής***

Έστω μια παραβολή . (1)

* Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι τα *p* και *x* (με ) είναι ομόσημα. Άρα, κάθε φορά η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο άξονας  και η εστία *Ε*. Επομένως, η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η διευθετούσα *δ* και η εστία *Ε*.
* Αν το σημείο  είναι σημείο της παραβολής, δηλαδή, αν , τότε και το σημείο  θα είναι σημείο της ίδιας παραβολής, αφού . Αυτό σημαίνει ότι ο άξονας  είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής. Επομένως, η κάθετη

από την εστία στη διευθετούσα είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής και λέγεται **άξονας** της παραβολής.

***ΕΛΛΕΙΨΗ***

***Ορισμός Έλλειψης***



Έστω  και *Ε* δύο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται **έλλειψη** με **εστίες** τα σημεία  και *Ε* ο γεωμετρικός τόπος *C* των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα  και *Ε* είναι *σταθερό* και μεγαλύτερο του . Το σταθερό αυτό άθροισμα το παριστάνουμε συνήθως με **2*α*** και την απόσταση των εστιών  και *Ε* με **2*γ***.

 H απόσταση  ονομάζεται **εστιακή απόσταση** της έλλειψης.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό:

α) Ένα σημείο *Μ* του επιπέδου είναι σημείο της έλλειψης, αν και μόνο αν:



β) Ισχύει: , δηλαδή  οπότε ***γ* < *α***. Αν , τότε τα σημεία  συμπίπτουν, οπότε η έλλειψη γίνεται κύκλος με κέντρο το *Ε* και ακτίνα *α*.

***Εξίσωση Έλλειψης***



* Έστω μια έλλειψη *C* με εστίες  και *Ε.* Θα βρούμε την εξίσωση της έλλειψης ως προς σύστημα συντεταγμένων  με άξονα των  την ευθεία  και άξονα των  τη μεσοκάθετο του .

Αν  είναι ένα σημείο της έλλειψης *C*, τότε θα ισχύει: .

Επειδή , οι εστίες  και *Ε* θα έχουν συντεταγμένες  και  αντιστοίχως.

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της έλλειψης *C* με εστίες τα σημεία ,  και σταθερό άθροισμα  είναι



Για παράδειγμα, η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία ,  και σταθερό άθροισμα  είναι  αφού .



* Αν τώρα πάρουμε σύστημα συντεταγμένων  με άξονα των  τη μεσοκάθετο του  και άξονα των *y* την ευθεία , αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της έλλειψης *C* είναι



Για παράδειγμα, η έλλειψη με εστίες ,  και σταθερό άθροισμα  είναι

 αφού .

***Ιδιότητες Έλλειψης***

Έστω μια έλλειψη



, όπου 

* Αν  είναι ένα σημείο της έλλειψης *C*, τότε τα σημεία ,  και  ανήκουν στην *C*, αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της. Αυτό σημαίνει ότι η παραπάνω έλλειψη έχει τους άξονες  και  άξονες συμμετρίας και την αρχή των αξόνων κέντρο συμμετρίας. Επομένως, η ευθεία που ενώνει τις εστίες  της έλλειψης και η μεσοκάθετος του  είναι άξονες συμμετρίας της έλλειψης, ενώ το μέσο *Ο* του  είναι κέντρο συμμετρίας της. Το σημείο *Ο* λέγεται **κέντρο** της έλλειψης.
* Από την εξίσωση της έλλειψης για  βρίσκουμε , ενώ για  βρίσκουμε . Επομένως, η έλλειψη *C* τέμνει τον άξονα  στα σημεία  και , ενώ τον άξονα  στα σημεία  και . Τα σημεία  λέγονται **κορυφές** της έλλειψης, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα  και , τα οποία έχουν μήκη  και , λέγονται **μεγάλος άξονας** και **μικρός άξονας** αντιστοίχως. Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο οποιαδήποτε συμμετρικά ως προς *Ο* σημεία  και  της έλλειψης λέγεται **διάμετρος** της έλλειψης. Αποδεικνύεται ότι:

,

δηλαδή ότι κάθε διάμετρος της έλλειψης είναι μεγαλύτερη ή ίση από το μικρό άξονα και μικρότερη ή ίση από το μεγάλο άξονα της έλλειψης.

* Τέλος, από την εξίσωση της έλλειψης, έχουμε:

 .

Ομοίως: .

Άρα, η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες ,  και , .

***Εκκεντρότητα Έλλειψης***

Μια παράμετρος που καθορίζει τη μορφή της έλλειψης είναι η εκκεντρότητα της έλλειψης. Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της έλλειψης  και τη συμβολίζουμε με ***ε***, το λόγο . Επειδή , είναι , οπότε  και άρα

 .

Επομένως, όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα τόσο μικραίνει ο λόγος  και κατά συνέπεια τόσο πιο επιμήκης γίνεται η έλλειψη (Σχ. α).

Όταν το *ε* τείνει στο μηδέν, τότε ο λόγος  τείνει στο 1 και επομένως η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος. Όταν, όμως, το *ε* τείνει στη μονάδα, τότε ο λόγος  τείνει στο 0 και επομένως η έλλειψη τείνει να εκφυλιστεί σε ευθύγραμμο τμήμα.

Οι ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα, άρα ίδιο λόγο , λέγονται **όμοιες** (Σχ. β).

 

 (α) (β)

***ΥΠΕΡΒΟΛΗ***

***Ορισμός Υπερβολής***

Έστω και *Ε* δύο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται **υπερβολή** με εστίες τα σημεία και *Ε* ο γεωμετρικός τόπος *C* των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα και *Ε* είναι *σταθερή* και μικρότερη του . Την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων κάθε σημείου της υπερβολής από τις εστίες την παριστάνουμε συνήθως με 2*α*, ενώ την απόσταση των εστιών με 2*γ*.

Η απόσταση ονομάζεται **εστιακή απόσταση** της υπερβολής.

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό:

α) Ένα σημείο *Μ* είναι σημείο της υπερβολής, αν και μόνο αν:

.

β) Ισχύει δηλαδή , οπότε .

***Εξίσωση Υπερβολής***

* Έστω *C* μια υπερβολή με εστίες και *Ε*. Θα βρούμε την εξίσωση της *C* ως προς σύστημα συντεταγμένων με άξονα των *x* την ευθεία και άξονα των *y* τη μεσοκάθετη του .

Αν είναι ένα σημείο της υπερβολής *C*, τότε θα ισχύει:



Επειδή , οι εστίες και *Ε* θα έχουν συντεταγμένες και αντιστοίχως.

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της υπερβολής *C* με εστίες τα σημεία , , και σταθερή διαφορά 2*α* είναι:



|  |
| --- |
| , όπου  |

Για παράδειγμα, η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία και σταθερή διαφορά είναι: , αφού

* Αν τώρα πάρουμε σύστημα συντεταγμένων με άξονα των *y* την ευθεία και άξονα των *x* τη μεσοκάθετο του , αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της υπερβολής *C* είναι:



|  |
| --- |
| , όπου . |

Για παράδειγμα, η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία και σταθερή διαφορά , είναι:

, αφού .

* Τέλος, αν είναι , τότε η υπερβολή λέγεται **ισοσκελής** και η εξίσωσή της γράφεται: ***a*2.**

***Ιδιότητες Υπερβολής***

Έστω μια υπερβολή *C*, η οποία ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων έχει εξίσωση , όπου .



* Αν είναι ένα σημείο της υπερβολής *C*, τότε και τα σημεία ,και ανήκουν στην *C*, αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της. Αυτό σημαίνει ότι η υπερβολή *C* έχει τους άξονες και άξονες συμμετρίας και την αρχή των αξόνων κέντρο συμμετρίας. Επομένως, η ευθεία που ενώνει τις εστίες της υπερβολής και η μεσοκάθετη του είναι άξονες συμμετρίας της υπερβολής, ενώ το μέσο *Ο* του είναι κέντρο συμμετρίας της. Το σημείο *Ο* λέγεται **κέντρο** της υπερβολής.

* Από την εξίσωση της υπερβολής για βρίσκουμε . Συνεπώς, η υπερβολή τέμνει τον άξονα στα σημεία , και . Τα σημεία αυτά λέγονται **κορυφές** της υπερβολής. Από την ίδια εξίσωση για προκύπτει η εξίσωση , η οποία είναι αδύνατη στο **R**. Επομένως, **η υπερβολή *C* δεν τέμνει τον άξονα** .

* Τέλος, από την εξίσωση της υπερβολής, έχουμε:

  ή .

Επομένως, τα σημεία της υπερβολής *C* βρίσκονται έξω από την ταινία των ευθειών και , πράγμα που σημαίνει ότι η υπερβολή αποτελείται από δύο χωριστούς κλάδους.

***Ασύμπτωτες Υπερβολής***

* Έστω μια υπερβολή *C* με εξίσωση

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σημείο της υπερβολής με και . Αποδεικνύεται ότι όταν το *x* *αυξάνει απεριόριστα*, η απόσταση *ΜΡ* του *Μ* από την ευθεία *τείνει* προς το μηδέν. Έτσι, το άνω τεταρτημόριο του δεξιού κλάδου της υπερβολής πλησιάζει όλο και περισσότερο την ευθεία , χωρίς ποτέ να συμπέσει με αυτή.

 Γι’αυτό την ευθεία τη λέμε *ασύμπτωτο* του δεξιού κλάδου της υπερβολής. Λόγω συμμετρίας της υπερβολής ως προς τον άξονα , ο δεξιός κλάδος της θα έχει ασύμπτωτο και την ευθεία , οπότε, λόγω συμμετρίας της υπερβολής και ως προς τον άξονα , ο αριστερός κλάδος της θα έχει ασύμπτωτες τις ίδιες ευθείες. Άρα, οι **ασύμπτωτες** της υπερβολής είναι οι ευθείες:



Είναι φανερό ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι διαγώνιες του ορθογώνιου *ΚΛΜΝ* με κορυφές τα σημεία , , και . Το ορθογώνιο αυτό λέγεται **ορθογώνιο****βάσης** της υπερβολής.

Για παράδειγμα, οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες και .

* Αν η υπερβολή *C* έχει εξίσωση , τότε οι ασύμπτωτες της είναι οι ευθείες:

 και .

***Εκκεντρότητα Υπερβολής***

Όπως στην έλλειψη έτσι και στην υπερβολή μία παράμετρος που καθορίζει το σχήμα της είναι η εκκεντρότητα. Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της υπερβολής , και τη συμβολίζουμε με ***ε***, το λόγο .

Επειδή , είναι , οπότε και άρα,

 .



Επομένως, η εκκεντρότητα *ε* προσδιορίζει το συντελεστή διεύθυνσης της ασυμπτώτου της, δηλαδή χαρακτηρίζει το ορθογώνιο βάσης, άρα τη μορφή της ίδιας της υπερβολής. Όσο η εκκεντρότητα μικραίνει και τείνει να γίνει ίση με 1, ο λόγος , άρα και το *β*, μικραίνει και τείνει να γίνει ίσο με 0. Κατά συνέπεια, όσο πιο μικρή είναι η εκκεντρότητα της υπερβολής τόσο πιο επίμηκες είναι το ορθογώνιο βάσης και κατά συνέπεια τόσο πιο κλειστή είναι η υπερβολή.

Στην περίπτωση της ισοσκελούς υπερβολής είναι , οπότε .

Θα σας πρότεινα να «ρίξετε μια ματιά» στα παραπάνω - **χωρίς βέβαια να μπείτε στη διαδικασία να τα μάθετε** - γιατί, όπως ήδη αναφέρθηκε στην αρχή του σημερινού μας μαθήματος, είναι έννοιες τις οποίες θα συναντήσετε - χωρίς ασφαλώς τόσες λεπτομέρειες - του χρόνου.

Ως προς την συνέχεια των μαθημάτων μας, από το επόμενο θα ξεκινήσουμε επαναλήψεις στις οποίες ελπίζω και εύχομαι όλοι σας να δώσετε δυναμικά το «παρών».

… και κατά τα γνωστά, τις ερωτήσεις σας και τις λύσεις σας των ασκήσεων από τον κύκλο μπορείτε να τις στείλετε στο e-mail: tzanetatos@sch.gr

**Να είστε καλά και να προσέχετε και βέβαια Χρόνια Πολλά και Καλά με Υγεία !!!**

Ο καθηγητής σας των Μαθηματικών Προσανατολισμού

Γεράσιμος Τζανετάτος

\*\*\* Η περίληψη της θεωρίας της παραβολής, της έλλειψης και της υπερβολής προέρχονται από το σχολικό βιβλίο.