**Γεια σας και χαρά σας και πάλι καλά μου παιδιά και Χρόνια Πολλά και Καλά !!!**

Καταρχάς ελπίζω ότι και στη σημερινή μας επικοινωνία βρίσκω, εσάς και τις οικογένειές σας, καλά, δυνατούς και γεμάτος αισιοδοξία.

Μετά το τέλος των διακοπών, στις οποίες θέλω να πιστεύω ότι περάσατε όμορφα, σας ξαναβρίσκω για να κάνουμε μια δυναμική επανεκκίνηση, καθώς, όπως σας έχω πει ήδη από προηγούμενα μαθήματα, εκτός από μια-δυο εξαιρέσεις, δεν έχω νέα σας σε σχέση με τα Μαθηματικά Προσανατολισμού. Οπότε επαναλαμβάνω ότι σας έχω «χάσει» ως Τμήμα και … να είστε βέβαιοι ότι μου έχετε λείψει και μάλιστα πολύ !!!

**Πρέπει συνεπώς να κινητοποιηθούμε για να κερδίσουμε τον χαμένο χρόνο. Πάμε λοιπόν και πάλι, πιστεύω πια με «όρεξη» από την πλευρά σας, στα «δικά μας» !!!**

Από το σημερινό μάθημα θα προσπαθήσουμε να κάνουμε μια μικρή επανάληψη της ύλης μας ξεκινώντας από το **Κεφάλαιο των Διανυσμάτων**:

Ας δούμε αρχικά περιληπτικά τη Θεωρία των τριών πρώτων παραγράφων από τα Διανύσματα:

*1.1* *Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ*

***Ορισμός του Διανύσματος***



* Στη Γεωμετρία το **διάνυσμα** ορίζεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο άκρο λέγεται **αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος, ενώ το δεύτερο λέγεται πέρας του διανύσματος. Το διάνυσμα με αρχή το *Α* και πέρας το *Β* συμβολίζεται με  και παριστάνεται με ένα βέλος που ξεκινάει από το *Α* και καταλήγει στο *Β*.

Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα λέγεται **μηδενικό διάνυσμα**. Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα  είναι μηδενικό διάνυσμα.

Για το συμβολισμό των διανυσμάτων χρησιμοποιούμε πολλές φορές τα μικρά γράμματα του ελληνικού ή του λατινικού αλφάβητου επιγραμμισμένα με βέλος. για παράδειγμα, 



* Η απόσταση των άκρων ενός διανύσματος , δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος *ΑΒ*, λέγεται **μέτρο** ή **μήκος** του διανύσματος  και συμβολίζεται με . Αν το διάνυσμα  έχει μέτρο 1, τότε λέγεται **μοναδιαίο** διάνυσμα.
* Η ευθεία ε πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα  λέγεται **φορέας** του .



Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος  μπορούμε να θεωρούμε οποιαδήποτε από τις ευθείες που διέρχονται από το *Α*.

Αν ο φορέας ενός διανύσματος  είναι παράλληλος ή συμπίπτει με μια ευθεία *ζ*, τότε λέμε ότι το  είναι παράλληλο προς τη *ζ* και γράφουμε .



* Δύο μη μηδενικά διανύσματα  και , που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς, λέγονται **παράλληλα ή συγγραμμικά** διανύσματα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα  και  έχουν **ίδια διεύθυνση** και γράφουμε .

Τα συγγραμμικά διανύσματα διακρίνονται σε ομόρροπα και αντίρροπα. Συγκεκριμένα:



⎯ Δύο μη μηδενικά διανύσματα  και  λέγονται **ομόρροπα**:

α) όταν έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία *ΑΓ* που ενώνει τις αρχές τους ή

β) όταν έχουν τον ίδιο φορέα και μία από τις ημιευθείες *ΑΒ* και *ΓΔ* περιέχει την άλλη. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα  και  έχουν την **ίδια** **κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και ίδια φορά) και γράφουμε .



⎯ Δύο μη μηδενικά διανύσματα  και  λέγονται **αντίρροπα**, όταν είναι συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα διανύσματα  και  έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά) και γράφουμε .

**Παρατήρηση**

Ένα διάνυσμα μεταφέρεται σε άλλη θέση **μένοντας παράλληλο** στον εαυτό του. (Δεν το περιστρέφουμε, διότι έτσι αλλάζει η διεύθυνσή του, άρα έτσι προκύπτει άλλο διάνυσμα).

***Ίσα Διανύσματα***



Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **ίσα** όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα. Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα  και  είναι ίσα, γράφουμε . Τα μηδενικά διανύσματα θεωρούνται ίσα μεταξύ τους και συμβολίζονται με .

Εύκολα αποδεικνύεται ότι:



* Αν , τότε ,  και .
* Αν *Μ* είναι το μέσον του *ΑΒ*, τότε  και αντιστρόφως.



***Αντίθετα Διανύσματα***

Δύο διανύσματα λέγονται **αντίθετα**, όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα. Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα  και  είναι αντίθετα, γράφουμε



 ή .

Είναι φανερό ότι



Ειδικότερα, έχουμε .

***Γωνία δύο Διανυσμάτων***

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα  και . Με αρχή ένα σημείο *Ο* παίρνουμε τα διανύσματα  και .

Την κυρτή γωνία , που ορίζουν οι ημιευθείες *ΟΑ* και *ΟΒ*, την ονομάζουμε **γωνία των διανυσμάτων  και ** και τη συμβολίζουμε με  ή  ή ακόμα, αν δεν προκαλείται σύγχυση, με ένα μικρό γράμμα, για παράδειγμα ***θ***. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η γωνία των  και  είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου *Ο*. Είναι φανερό επίσης ότι  ή σε ακτίνια  και ειδικότερα:



* , αν .
* , αν .

Αν , τότε λέμε ότι τα διανύσματα  και  είναι **ορθογώνια** ή **κάθετα** και γράφουμε .

Αν ένα από τα διανύσματα  είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε ως γωνία των  και  μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία  με . Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα, , είναι ομόρροπο ή αντίρροπο ή ακόμη και κάθετο σε κάθε άλλο διάνυσμα.

**Παρατήρηση**

Για να βρούμε την γωνία δύο διανυσμάτων, πρέπει αυτά να έχουν την ίδια αρχή.

*1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ*

***Πρόσθεση Διανυσμάτων***

Έστω δύο διανύσματα  και . Με αρχή ένα σημείο *Ο* παίρνουμε διάνυσμα  και στη συνέχεια με αρχή το *Α* παίρνουμε διάνυσμα . Το διάνυσμα  λέγεται **άθροισμα** ή **συνισταμένη** των διανυσμάτων  και  και συμβολίζεται με .

Αποδεικνύεται ότι το άθροισμα των διανυσμάτων  και  είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου *Ο*, διότι, όπως φαίνεται και στο σχήμα, αν  είναι ένα άλλο σημείο και πάρουμε τα διανύσματα  και , επειδή  και , έχουμε  και , οπότε , που συνεπάγεται ότι και .



Το άθροισμα δύο διανυσμάτων βρίσκεται και με τον λεγόμενο *κανόνα του παραλληλόγραμμου*. Δηλαδή, αν με αρχή ένα σημείο *Ο* πάρουμε τα διανύσματα  και , τότε το άθροισμα  ορίζεται από τη διαγώνιο  του παραλληλόγραμμου που έχει προσκείμενες πλευρές τις  και .

***Ιδιότητες Πρόσθεσης Διανυσμάτων***



Για την πρόσθεση των διανυσμάτων ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης πραγματικών αριθμών. Δηλαδή, αν  είναι τρία διανύσματα, τότε:

1.  (Αντιμεταθετική ιδιότητα)
2.  (Προσεταιριστική ιδιότητα)
3. 
4. .

Η προσεταιριστική ιδιότητα μας επιτρέπει να συμβολίζουμε καθένα από τα ίσα αθροίσματα  και  με , το οποίο θα λέμε άθροισμα των τριών διανυσμάτων  και . Το άθροισμα περισσότερων διανυσμάτων ,  ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

.

Δηλαδή, για να προσθέσουμε  διανύσματα , τα καθιστούμε διαδοχικά, οπότε το άθροισμά τους θα είναι το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου και ως πέρας το πέρας του τελευταίου. Επειδή μάλιστα ισχύουν η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης, το άθροισμα δε μεταβάλλεται αν αλλάξει η σειρά των προσθετέων ή αν μερικοί από αυτούς αντικατασταθούν με το άθροισμά τους.

***Αφαίρεση Διανυσμάτων***

Η διαφορά  του διανύσματος  από το διάνυσμα  ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων  και . Δηλαδή





Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν έχουμε δύο διανύσματα  και , τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα , τέτοιο, ώστε . Πράγματι,

.

***Διάνυσμα Θέσεως***



Έστω *Ο* ένα σταθερό σημείο του χώρου. Τότε για κάθε σημείο *Μ* του χώρου ορίζεται το διάνυσμα , το οποίο λέγεται **διάνυσμα θέσεως του *Μ*** ή **διανυσματική** **ακτίνα του *Μ***. Το σημείο *Ο*, που είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του χώρου, λέγεται **σημείο αναφοράς** στο χώρο.

Αν *Ο* είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα  έχουμε  και επομένως



Δηλαδή:

**“Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής”.**

***Μέτρο Αθροίσματος Διανυσμάτων***



Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το άθροισμα των διανυσμάτων  και . Από την τριγωνική ανισότητα γνωρίζουμε όμως ότι



και επομένως



*1.3* *ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ*

***Ορισμός Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα***

Έστω  ένας πραγματικός αριθμός με  και  ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Ονομάζουμε **γινόμενο του *λ* με το ** και το συμβολίζουμε με  ή  ένα διάνυσμα το οποίο:

* είναι ομόρροπο του , αν  και αντίρροπο του , αν  και
* έχει μέτρο .

Αν είναι  ή , τότε ορίζουμε ως  το μηδενικό διάνυσμα .



Για παράδειγμα, αν το διάνυσμα  του διπλανού σχήματος έχει μέτρο 2, τότε το διάνυσμα  είναι ομόρροπο με το  και έχει μέτρο , ενώ το διάνυσμα  είναι αντίρροπο με το , αλλά έχει και αυτό μέτρο ίσο με .

Το γινόμενο  το συμβολίζουμε και με .

***Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα***

Για το γινόμενο πραγματικού αριθμού με διάνυσμα ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

(1) 

(2) 

(3) 

Ως συνέπεια του ορισμού του γινομένου αριθμού με διάνυσμα και των παραπάνω ιδιοτήτων έχουμε:

**(i)  ή **

**(ii) **

**(iii) **

**(iv) **

**(v) Αν  και , τότε **

**(vi) Αν  και , τότε .**

***Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων***

Ας θεωρήσουμε δύο διανύσματα  και . Από τα διανύσματα αυτά “παράγονται”, για παράδειγμα, τα διανύσματα ,  κτλ.

Καθένα από τα διανύσματα αυτά λέγεται γραμμικός συνδυασμός των  και . Γενικά, ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** δύο διανυσμάτων  και  κάθε διάνυσμα της μορφής , όπου .

Ανάλογα ορίζεται και ο γραμμικός συνδυασμός τριών ή περισσότερων διανυσμάτων. Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα  είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των  και .

***Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων***

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Αν  είναι δύο διανύσματα, με , τότε

, όπου μοναδικό.

***Διανυσματική Ακτίνα Μέσου Τμήματος***



Ας πάρουμε ένα διάνυσμα  και ένα σημείο αναφοράς *Ο*. Για τη διανυσματική ακτίνα  του μέσου *Μ* του τμήματος *ΑΒ* έχουμε:

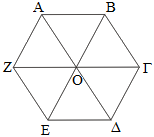
 και .

Επομένως, . Άρα



**Μετά την επανάληψη της Θεωρίας, ας δούμε στη συνέχεια κάποιες λυμένες Ασκήσεις:**

**1.** Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ με κέντρο Ο. Να βρείτε ομάδες ίσων διανυσμάτων.

**Λύση**

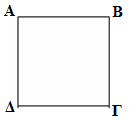
**i**) 

**ii**) 

**iii**) 

**2.** Αν ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο να εξετάσετε αν είναι σωστές οι παρακάτω σχέσεις:

**i**) , **ii)** , **iii)** .

**iv**) , **v)** , **vi)** 

**Απάντηση**

**i)** Είναι λάθος, διότι =

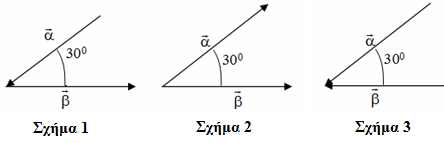
**ii)** Είναι λάθος

**iii)** Είναι σωστό

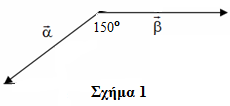
**iv)**, **vi)** Είναι σωστά, διότι το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει ίσες πλευρές

**v)** Είναι σωστό, διότι το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει ίσες διαγωνίους

**3.** Να βρείτε την γωνία των  και  στα παρακάτω σχήματα:

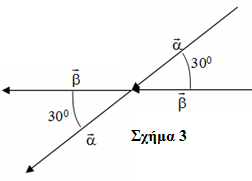


**Λύση**

 Στο **σχήμα 1** μεταφέρουμε το διάνυσμα , ώστε να έχει

την ίδια αρχή με το . Άρα =150o.

Στο **σχήμα 2** είναι**=**30o.



Στο **σχήμα 3** μεταφέρουμε τα διανύσματα και , ώστε

να έχουν την ίδια αρχή. Άρα =30o.

**4.** Αν  είναι μη μηδενικά διανύσματα, ποιες σχέσεις είναι σωστές;

**i**) = , **ii)** = , **iii)** =

**Απάντηση**

Προφανώς οι **i)** , **iii)** είναι λάθος, ενώ η **ii)** είναι σωστή, διότι οι γωνίες και είναι κατά κορυφή.

**5.** Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστές:

**i**) Αν  και  τότε   **ii**) Αν  και  τότε 

**iii**) Αν  τότε   **iv**) 

**Απάντηση**

Προφανώς οι **i)** , **ii)** είναι σωστές.

**6. Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Δ και Ε είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ, να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς ΒΓ και παράλληλο προς αυτήν.**

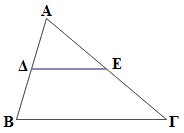
**Λύση**

1ος τρόπος

Έχουμε ότι: =+=2+2=2(+2)=2 =2 =

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι:

● // ΔΕ // ΒΓ και

● || = | ΔΕ = ΒΓ

2ος τρόπος: Εργαζόμαστε με τη λεγόμενη μέθοδο των διαδρομών:

Το διάνυσμα  σημαίνει «να πάμε από το Δ στο Ε».

Μία διαδρομή μέσω Α είναι:  (1)

Μία διαδρομή μέσω Β, Γ είναι:  (2)

Προσθέτουμε τις (1), (2) κατά μέλη και έχουμε ότι:



= , απ’ όπου, όπως και στον 1ο τρόπο προκύπτει ότι το **ΔΕ είναι ίσο με το μισό της πλευράς ΒΓ και παράλληλο προς αυτήν.**

**Παρατήρηση**

Η μέθοδος των διαδρομών χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να εκφράσουμε ένα διάνυσμα συναρτήσει άλλων διανυσμάτων ή όταν εργαζόμαστε επάνω σε σχήμα.

Γ

Β

Δ

Ε

Ζ

**7.** Για ένα τυχαίο εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ, να δείξετε ότι:

=

**Λύση**

1ος τρόπος

Έχουμε ότι: =

==+=

2ος τρόπος: Εργαζόμαστε με τη μέθοδο του σημείου αναφοράς, δηλαδή

επιλέγοντας ένα σημείο, το οποίο θεωρούμε ως αρχή όλων των διανυσμάτων:

Έστω Α το σημείο αναφοράς. Τότε έχουμε ότι:

=

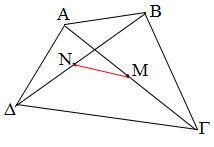
=

Α

**Παρατήρηση**

Η μέθοδος του σημείου αναφοράς χρησιμοποιείται **για να αποδείξουμε μία διανυσματική ισότητα.**

**8.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να

δείξετε ότι αν ,τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

**Λύση**

1ος τρόπος: Εργαζόμαστε με τη μέθοδο των διαδρομών:

Το διάνυσμα σημαίνει «να πάμε από το Μ στο Ν».

Μία διαδρομή μέσω Α, Δ είναι:  (1)

Μία διαδρομή μέσω Γ, Β είναι:  (2)

Προσθέτουμε τις (1), (2) κατά μέλη και έχουμε ότι:

2 4 (3)

Από υπόθεση έχουμε ότι: 4 (4)

Από (3) και (4) έχουμε ότι: = = =

το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

2ος τρόπος: Εργαζόμαστε με τη μέθοδο του σημείου αναφοράς:

Έστω Α το σημείο αναφοράς. Τότε έχουμε ότι:

4 (4)

Το ΑΝ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΑΒΔ

(5)

Το Μ είναι το μέσο του ΑΓ (6)

Λόγω των (5) και (6) η (4) τώρα γίνεται:

το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

**9.** Αν και κ+λ+μ=0, όπου κ, λ, μ∈R\*, να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

**Λύση**

Εργαζόμαστε με τη μέθοδο του σημείου αναφοράς:

Έστω Α το σημείο αναφοράς. Τότε έχουμε ότι:

( διότι από υπόθεση είναι: κ+λ+μ=0 )

Αφού λοιπόν τα διανύσματα είναι παράλληλα και έχουν ένα κοινό άκρο (το Α) , συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

**Παρατήρηση 1**

Για να δείξουμε λοιπόν ότι τρία σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι δύο από τα διανύσματα είναι παράλληλα.

**Παρατήρηση 2**

Ανάλογα θα εργαζόμασταν, αν επιλέγαμε ως σημείο αναφοράς το Β ή το Γ.

**10.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε σημείο Μ ώστε: .

**Λύση**

1ος τρόπος

Εργαζόμαστε με τη μέθοδο του σημείου αναφοράς:

Έστω Α το σημείο αναφοράς. Τότε η σχέση, που θέλουμε να ισχύει γράφεται ως εξής:

το σημείο Μ συμπίπτει με το σημείο Α.

2ος τρόπος

Εργαζόμαστε πάλι με τη μέθοδο του σημείου αναφοράς, αλλά με διαφορετικό σημείο αναφοράς:

Έστω Β το σημείο αναφοράς. Τότε η σχέση, που θέλουμε να ισχύει γράφεται ως εξής:

το σημείο Μ συμπίπτει με το σημείο Α.

**Παρατήρηση 1**

Για να βρούμε τη θέση κάποιου σημείου Μ, το οποίο ικανοποιεί κάποια διανυσματική σχέση μαζί με άλλα γνωστά σημεία, προσπαθούμε να φτιάξουμε μία ισότητα δύο διανυσμάτων με το ένα άκρο του ενός να είναι το ζητούμενο σημείο Μ.

**Παρατήρηση 2**

Ανάλογα με τον 2ο τρόπο θα εργαζόμασταν, αν επιλέγαμε ως σημείο αναφοράς το Γ ή το Δ.

**11.** Αν , να δείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ συμπίπτουν.

**Λύση**

1ος τρόπος

Εργαζόμαστε με τη μέθοδο του σημείου αναφοράς:

Έστω Α το σημείο αναφοράς. Τότε έχουμε ότι:



τα διανύσματα τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο Α, είναι ίσα

τα ίσα διανύσματα έχουν και κοινό πέρας τα σημεία Κ και Λ συμπίπτουν.

2ος τρόπος

Εργαζόμαστε πάλι με τη μέθοδο του σημείου αναφοράς, αλλά με διαφορετικό σημείο αναφοράς:

Έστω Κ το σημείο αναφοράς. Τότε έχουμε ότι:



το είναι το μηδενικό διάνυσμα τα άκρα του Κ και Λ συμπίπτουν.

**Παρατήρηση 1**

Για να **δείξουμε ότι δύο σημεία Κ και Λ συμπίπτουν εργαζόμαστε ως εξής:**

1ος τρόπος

Δείχνουμε ότι ισχύει , οπότε τα ίσα διανύσματα με την ίδια αρχή Α έχουν και το ίδιο πέρας, άρα Κ≡Λ.

2ος τρόπος

β) Δείχνουμε ότι ισχύει , οπότε στο μηδενικό διάνυσμα τα άκρα του συμπίπτουν, άρα Κ≡Λ.

**Παρατήρηση 2**

Ανάλογα θα εργαζόμασταν, αν επιλέγαμε ως σημείο αναφοράς το Β ή το Γ (1ος τρόπος) ή αν επιλέγαμε ως σημείο αναφοράς το Λ (2ος τρόπος).

**12. Δίνονται τα σημεία Α, Β και Γ. Να δείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ το διάνυσμα**

είναι σταθερό.

**Λύση**

Εργαζόμαστε με τη μέθοδο του σημείου αναφοράς:

Έστω Α το σημείο αναφοράς. Τότε έχουμε ότι το διάνυσμα γράφεται:

==

=

= σταθερό διάνυσμα, αφού τα σημεία Α, Β, Γ είναι σταθερά.

**Παρατήρηση**

Για να **δείξουμε λοιπόν ότι ένα διάνυσμα είναι σταθερό, δείχνουμε ότι είναι ίσο με έναν γραμμικό συνδυασμό σταθερών διανυσμάτων.**

**13.** Αν , να δείξετε ότι .

**Λύση**

Εργαζόμαστε με τη μέθοδο του σημείου αναφοράς:

Έστω Κ το σημείο αναφοράς. Τότε έχουμε ότι:



Τώρα, με τη βοήθεια των παραπάνω λυμένων ασκήσεων, ας προσπαθήσουμε να λύσουμε τις ακόλουθες **ασκήσεις:**

Α

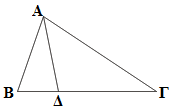
**1.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Να εξετάσετε αν είναι σωστές οι σχέσεις:

**i)**  και

**ii)** 

Β

Γ



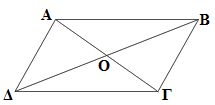
**2.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς του ΒΓ.

**i)** Να υπολογίσετε τα αθροίσματα: ,



**ii)** Να συγκρίνετε τα και



**3.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ονομάζουμε Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ.

**i)** Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

, ,



,



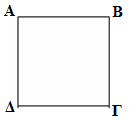
, ,



**ii)** Να συγκρίνετε τις διαφορές:

**α)** και **β)** και **γ)** και



****

**4.** Σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ να συγκρίνετε τα:

**i)** και



**ii)** και



**5.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να δείξετε ότι



**6.** Αν , να δείξετε ότι τα σημεία Α και Β συμπίπτουν.

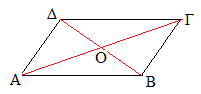


**7.** Να δείξετε ότι:

**i)** = , **ii)** = , **iii)** =



**8**. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

**i**) **ii**)



**iii**) **iv**)



**v**) **vi**)



**9.** Αν =6, να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων: .



**10.** Έστω , , . Να εκφράσετε τα διανύσματα



συναρτήσει των .



**11.** Αν , να δείξετε ότι .



**12.** Αν , να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.



**Αφού λοιπόν διαβάσετε πολύ καλά την περίληψη της θεωρίας και τις λυμένες ασκήσεις, στη συνέχεια ασχοληθείτε με τις ασκήσεις για λύση, οι οποίες είναι παρόμοιες με τις λυμένες.**

Περιμένω τις ερωτήσεις σας και τις προσπάθειές σας για λύση των ασκήσεων μέχρι και την επόμενη Τετάρτη 29 Απριλίου στο e-mail: tzanetatos@sch.gr

**Να είστε καλά και να προσέχετε !!!**

Ο καθηγητής σας των Μαθηματικών Προσανατολισμού

Γεράσιμος Τζανετάτος

\*\*\* Η περίληψη της θεωρίας προέρχεται από το σχολικό βιβλίο, ενώ οι εκφωνήσεις των ασκήσεων, τα σχήματα των λυμένων ασκήσεων 1, 2, 3, 6, 8 και τα σχήματα των ασκήσεων για λύση 2, 3, 4, 8 προέρχονται από τον ιστότοπο [plansmath.blogspot.com](http://www.study4exams.gr).