**Γεια σας και χαρά σας και πάλι καλά μου παιδιά!**!!

Καταρχάς ελπίζω κάθε φορά που επικοινωνούμε ότι σας βρίσκω καλά στην υγεία σας, όπως και τους δικούς σας, δυνατούς και γεμάτους αισιοδοξία.

Μπορεί να βρισκόμαστε από προχθές σε . . . διακοπές, αλλά όπως βλέπετε, δεν σας ξεχνάω και σας προτείνω να . . . συνεχιστεί η . . . μεταξύ μας επικοινωνία. Πάμε λοιπόν και πάλι, πιστεύω με «όρεξη» **πια** από την πλευρά σας, στα «δικά μας»!!!

**Καθώς περιμένουμε διευκρινήσεις σε σχέση με το τι θα γίνει τελικά με την εξεταστέα ύλη, θα ξεκινήσουμε από σήμερα επαναλήψεις!!! Επειδή, παιδιά, δεν είχα νέα σας σε σχέση με το υλικό των Μαθηματικών Προσανατολισμού για τα ολοκληρώματα, το οποίο σας έχω στείλει στα προηγούμενα τέσσερα μαθήματα, όπως ήδη σας έχω γράψει, σας έχω «χάσει» ως Τμήμα και … να είστε βέβαιοι ότι μου έχετε λείψει και μάλιστα πολύ!!! Πρέπει λοιπόν επιτέλους να κινητοποιηθούμε για να κερδίσουμε τον χαμένο χρόνο!!!**

Κινούμενοι λοιπόν στην κατεύθυνση των επαναλήψεων, θα ασχοληθούμε με το 2ο Κεφάλαιο του βιβλίου μας, που αναφέρεται στον Διαφορικό Λογισμό.

Ας ξεκινήσουμε λοιπόν με μια μικρή επανάληψη στη **Θεωρία** μέχρι και τον Ρυθμό μεταβολής:

**Έννοια Παραγώγου**

**Ορισμός**   
Μια συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη** σε ένα σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.pngτου πεδίου ορισμού της , αν υπάρχει το:   
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/049eaf4450e537807367cc354e19fa16.pngκαι είναι πραγματικός αριθμός.   
Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.png** και συμβολίζεται με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/66447ed70a147c40c5758c8cdba15806.png.   
Δηλαδή είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/73cf75bbc21a035878a78a129aa8cd10.png.   
Αν τώρα θέσουμε όπου http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5285dfae6bc262c1a06a187cec2685ad.pngτότε έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e665f75cc1036c2908cb7a1a9b8fb48.png.   
Πολλές φορές το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f3e429a04181da4ce874f3d5cb60c24e.pngσυμβολίζεται με Δ ενώ το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/89c6e581ad52974cc6fa9eb0bb974e13.pngσυμβολίζεται με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b64a1a313c4b67b340f4d074f91e9346.png. Άρα έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2114258f8a0addc39c04231b191c56e6.png.   
  
Ένας άλλος συμβολισμός της παραγώγου της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.pngείναι

http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fa16ef05dce09d1643da7f77bb2ab51d.pngή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/38f020b477359030f197ac2b6f74ac66.png|http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/46746a72f360dee999c17dcc64b1e741.png   
  
Αν τώρα το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.pngείναι ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png τότε αυτή θα είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.pngαν και μόνο αν υπάρχουν τα όρια:  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e31ee8b0125a7ec0d4455e56e43cb88f.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9d4d1ac9c36d0e236f007ef8dea75421.pngκαι   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e31ee8b0125a7ec0d4455e56e43cb88f.png= http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/46d5fb11d6edb269b3a7e982458b84c5.pngτότε θα είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/17428a9d940b59fdcbd2cc830161f12c.png.

**Παράγωγος και συνέχεια**

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/999f1a15529f10481e431764a79dab51.png.   
  
H http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/08cda1310cfb52fe7330f03cc553048a.pngαλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό αφού:   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9011f4c634a03a1f1d9d36b32c250253.png και   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b71d2658790341f4b187709a5e90bf52.png  
  
Παρατηρούμε λοιπόν ότι μια συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής σε κάποιο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.pngαλλά όχι παραγωγίσιμη. Αν όμως είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.pngτότε θα είναι και συνεχής όπως θα αποδείξουμε παρακάτω.  
  
**Θεώρημα**   
Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.pngτου πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.   
  
Απόδειξη   
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1944925a69669f398261109bf453c6f.pngέχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4bda0893c9ffdcdea008dc1c9a74a34e.png=http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/87862a17d814b8dc4d7a714fb6de0b17.png   
Τότε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c472416e5f87888f144c9b9bace5624d.png=   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d8c10f14f2052ee2809e07d68d4c00c0.pngαφού η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.png.   
  
Άρα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/568b44ba654f4723852c7b2decc21d18.pngδηλαδή η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.png.

**Σημαντικές Παρατηρήσεις**

1. Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.pngτότε δεν είναι και παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.png.
2. Αν στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/049eaf4450e537807367cc354e19fa16.pngθέσουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1f9ba77c2c35794a63dba39876b9137e.png  
     
   τότε για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e32ac24921ed94c0ad66ac4b81329574.pngέχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7cd4597197558a7d8611b4537c2b3e3b.pngάρα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/91313cde081e50e53f0f8ef0a92c3a6d.png  
     
   http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5a184a12e7ba625bbeb2ab324f091924.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a5d7583da11da30b35378e5254d5dbe3.png.

**Παραγωγίσιμες συναρτήσεις – Παράγωγος συνάρτηση**

Δίνουμε τώρα τους εξής **ορισμούς**:

Έστω συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Θα λέμε ότι:  
— H http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι παραγωγίσιμη στο Α ή απλά **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa069edf476453447d922f9a19f65fa2.png.  
— Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα** http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fd1eee41047dd13c435982cd6812ca01.pngτου πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5ca89d4b5ec2ad9537e4c313f4a85e27.png.  
— Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b72367467a7b7395674bf708412c9f80.pngτου πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fd1eee41047dd13c435982cd6812ca01.pngκαι επιπλέον ισχύει  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7a12df46e0506f2dff02f82b34d963f3.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5128bbb29da9c88d0de6efd61f669a86.png.

* Έστω http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0a7f1102a4d425f8e603daa4531282ab.pngτo σύνολο των σημείων του Α στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c47103c33f39f00ad8e0159f252fa7e3.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4731e8a4269af5ba88fff55e357732c4.png, ορίζουμε τη συνάρτηση:   
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cdc5a7832a6d81f8bae5dd5cd8df1dbb.png  
  η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της** http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png ή απλά **παράγωγος της** http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png.  
  H πρώτη παράγωγος της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png συμβολίζεται και με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/87a105850a9bb8c70e40d312ae532ac1.pngπου διαβάζεται “ντε εφ προς ντε χι”.  
  **Σχόλιο**: Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/361d4d3530ec9c2bf60d779b09e596c4.pngθα τη συμβολίζουμε και με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9d5846592386ec5a499b129e1344ac66.png.

Αν υποθέσουμε ότι το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0a7f1102a4d425f8e603daa4531282ab.pngείναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ae6a90878564be90081cba4b1334cf55.png, αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f** και συμβολίζεται με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/da8e1a7940a191a4bd470e58a167b533.png.  
  
Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος της f**, με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ee3f67c8ed139052fad433e20e72ea4d.png, και συμβολίζεται με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/98f7208f45467a96b79f979d28e86620.png. Δηλαδή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b96a807c921a1e25add4d4999a0d7ae8.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ee3f67c8ed139052fad433e20e72ea4d.png.

**Παράγωγος βασικών συναρτήσεων**

* ΄Εστω η σταθερή συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/21e9d40a4cb225f82205bac913ecb788.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9c5b0a62dc028b6237ebaff40e3fa134.png. Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c37a1787d79eb203fe064b7d30a5e9c.pngκαι ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/004de20041cbb1041eebf591080beb09.png, δηλαδή   
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e0c3d174e2701fb4218b163b060a1d2.png  
  Πράγματι, αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.pngείναι ένα σημείο του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c37a1787d79eb203fe064b7d30a5e9c.png, τότε για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bae8ae943701f53b4c309c87a0b3e4f3.pngισχύει:  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5437b324e56e16e58a2f89c2a512c747.png.  
  Επομένως:  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4e9048ac48b1fe889b99db21583cf7b0.png,  
    
  δηλαδή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e0b43808c7be625ab281c41dc2692b39.png.
* Έστω η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/13f2032c937b19f9fd55f98a084fab0e.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7afbf6eb11ccdb2a80131f926c2450b3.png. Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι παραγωγίσιμη στοhttp://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c37a1787d79eb203fe064b7d30a5e9c.png και ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e50eaa9c26c4d5a29600485eda43514e.png, δηλαδή  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b0ad61e9474d6ec9187e45a6b6728264.png  
  Πράγματι, αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.pngείναι ένα σημείο του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c37a1787d79eb203fe064b7d30a5e9c.png, τότε για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bae8ae943701f53b4c309c87a0b3e4f3.pngισχύει:  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/346788aa20525a8b045738591b104ec4.png.  
  Επομένως:  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fedc5952dd0c9ce41b3e481f77070ce4.png,  
    
  δηλαδή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9b30fa947d8c910b8af98d85be08fc9c.png.
* Έστω η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/05b0d3302e0eb6daf383715c101f9fdd.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7afbf6eb11ccdb2a80131f926c2450b3.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/dfe92c8af8af59d12702cff08d815bf6.png. Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c37a1787d79eb203fe064b7d30a5e9c.pngκαι ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2e4a59959c1ca58317c3b78b00fd7858.png, δηλαδή  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f9b74fe2eea4a928c1bbe5d043e9a927.png  
    
  Πράγματι, αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.pngείναι ένα σημείο του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c37a1787d79eb203fe064b7d30a5e9c.png, τότε για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bae8ae943701f53b4c309c87a0b3e4f3.pngισχύει:  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fc4425d143de2d776822e7d82803261c.pnghttp://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ba82e4307b5e399daebb14f26306b0ab.png  
  οπότε  
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6bbe8e5f0e782a16fc45416a071c5141.png  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ce8e7a148410262e022bab7261d0dead.png,  
    
  δηλαδή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c43d3049ad12aef9928623a34af34f8.png.
* Έστω η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e9c85ed7a26e435870c2c152952ac66.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/98f116983dad30211bddf2ce73cc0a42.png. Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d35546bf23496a6ff2a9574879d9dd0c.pngκαι ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2370e467ab7218e75c208e7906ed9a32.png, δηλαδή  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/56a6ae9d5d721a93b1f36b181dc1cfde.png  
    
  Πράγματι, αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.pngείναι ένα σημείο του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d35546bf23496a6ff2a9574879d9dd0c.png, τότε για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bae8ae943701f53b4c309c87a0b3e4f3.pngισχύει:  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6d75f9953ed9b8c196b0e60877307ff6.png  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6ad5a6593d2334ca96315a4c8f5f0bf7.png,  
    
  οπότε  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/04d167dc735c8e1c55ddcd7420e4a39f.png,  
    
  δηλαδή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/dd87e5c48067c3961fcac9212d7f0975.png.  
    
  Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e9c85ed7a26e435870c2c152952ac66.pngδεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 αφού   
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9e8aafd62d8068d665dd97d2e6a44b0b.png.
* Έστω η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/474621c3ede0d2b0da1df2413d5347f6.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7afbf6eb11ccdb2a80131f926c2450b3.png. Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c37a1787d79eb203fe064b7d30a5e9c.pngκαι ισχύει   
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a2ab44bb5331471273866099afd6beaf.png, δηλαδή  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e66bee6bbe3e57f6de5f132ccb67303a.png  
    
  Έστω η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/18665e8be052444c4430319ab437ba81.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7afbf6eb11ccdb2a80131f926c2450b3.png. Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c37a1787d79eb203fe064b7d30a5e9c.pngκαι ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7acd08c72c16aa5ba8687ced6e75225e.png, δηλαδή  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa787c0304cc021ef8a6aa50c09c6db4.png
* Έστω η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/691b674c85fc1d603302a3e27027c711.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7afbf6eb11ccdb2a80131f926c2450b3.png. Αποδεικνύεται ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c37a1787d79eb203fe064b7d30a5e9c.pngκαι ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ac96954a0ba832308f3eb57a5231e4e3.png, δηλαδή:  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8e56225c9972f3d3a3e9285ae30859ac.png.
* Έστω η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/10355a27b2fe2a4d52a0f811ffb0b9cf.png,http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0c6acfffffebe4d444a346bd84cd3da8.png . Αποδεικνύεται ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d35546bf23496a6ff2a9574879d9dd0c.pngκαι ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/57d7a18142767d447cec71aa75f2e23f.png, δηλαδή:  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5ecaf945ca4d6099a425818606a81a64.png.

**Κανόνες Παραγώγισης**

**Παράγωγος αθροίσματος**  
  
ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.png, τότε η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d84ffdc1521aecc669a0d1e0fe5ab328.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.pngκαι ισχύει:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/eb0f5fc36f5eb82b093d31a1922c1304.png

Απόδειξη  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bae8ae943701f53b4c309c87a0b3e4f3.png, ισχύει:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2c71becde41bb50fb98498b868c21e19.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ac81efd834b7fe0b05e737218a0054ce.png.  
Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.png, έχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7a67e74b758daddcb2fd7737824ccef5.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0ed5181466d7ddb992dd88ca8db2d35b.png  
δηλαδή  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/eb0f5fc36f5eb82b093d31a1922c1304.png.  
  
Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ’ ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/56254e3e0e193083215ce364c98f3f55.pngισχύει:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6604cc64bda1802e5803973324eafd9c.png.  
  
Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/deb00d6934f7887c3e83f23567ca8292.png, είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο Δ, τότε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d5e6ef716e4263e73c182f5ac3fc94c2.png.

**Παράδειγμα**   
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/36c968f4908210ff9ab78ef16cf52527.png

**Παράγωγος γινομένου**  
  
ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.png, τότε και η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/92c5f2bf3dd41cf3025142281479952f.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.pngκαι ισχύει:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e371d6703298e8d12b43158d34dee5c1.png

Αν οι συναρτήσεις http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b2f5ff47436671b6e533d8dc3614845d.pngείναι παραγωγίσιμες σ’ ένα διάστημα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/659d23f0ed16cdb87b1d41c7b58b52f4.png, τότε για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d25baea42c72cd234aa1e059c2d736ef.pngισχύει:

http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1ef6126bab18eb611cec5b33728f21c.png.

**Παράδειγμα**   
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d8707c4c7aaf756e2aa9f4bbfdd1a0f9.png.

Το παραπάνω θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις.  
Έτσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4ab0567902405ff797d1e93fd7ee1b8e.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/99b61840ffeaadb7765f6334bfb9da29.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/800ceef18c0653a06219b71d836be7bb.png.

**Παράδειγμα**   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/91f8bbcd90b777de849a80dd3667f27e.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1a7224bf566984bef270dc5d02f302fe.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f6d9d54f8e38c21cee6f5ec4d2fbc180.png

Αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ’ ένα διάστημα Δ και http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9c5b0a62dc028b6237ebaff40e3fa134.png, επειδή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e0b43808c7be625ab281c41dc2692b39.png, σύμφωνα με το θεώρημα (2) έχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6b8e246f80220fe16b22ce98881c75ae.png.

**Παράδειγμα**   
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/98e32d34d297498ba8ae1a73b825bd5f.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6a7773e22268a70ad94c11fdc697a795.png.

**Παράγωγος πηλίκου**  
  
ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a439b891415cb02448ab9b7f40120cbf.png, τότε και η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0dcfa52d0c6b472338790943c26dc60e.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.pngκαι ισχύει:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/003de7f4388ac38381e4c59c05b3483d.png

Αν οι συναρτήσεις http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/abe0dfca3f8c0a4f028de971db134d17.pngείναι παραγωγίσιμες σ’ ένα διάστημα Δ και για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/56254e3e0e193083215ce364c98f3f55.pngισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bba1edb235ce2a3764da1f05a63ec51c.png, τότε για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/56254e3e0e193083215ce364c98f3f55.pngέχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/93d0fed8f8b6732926964fa2099fd4b6.png.

**Παράδειγμα**   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1f0af95551c6ff1299c0e9ac93e63b79.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9ac255b700508c09a0fe4fae6ea90387.png

Με τη χρήση των προηγούμενων προτάσεων μπορούμε πλέον να βρούμε τις παραγώγους μερικών ακόμη βασικών συναρτήσεων.

* Έστω η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/627df577520b8e8c372e21164299d91f.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5ea9a0c4fa19a240bc55f2cb641a78c2.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7b41af77e88165aa9341e58dc1354d23.png. Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/70d03f4db1d1516d96c6a4ce5bcacefd.pngκαι ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/34017fda2bd08c46ec031c1b8a7f99f9.png, δηλαδή  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/007ed0da82a7b9e4e6b41abaab647047.png  
    
  Πράγματι, για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/037420d48ecc3a5c22b97d0436d0fbc2.pngέχουμε:  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/185d1684f2d11a3b1f4acc2b45368e0f.png.  
    
  Είδαμε, όμως, πιο πριν ότι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c43d3049ad12aef9928623a34af34f8.png, για κάθε φυσικό http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/dfa859ac447e3a0f1db36f59f51a0350.png. Επομένως, αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/409286ac35bb5d7fddd112dcd2d22a03.png, τότε  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b0c41e8ee66ed66e46cbb95b8b18f674.png.
* Έστω η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/12ba6016265fa5aaf7cb8361478ae460.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e2ec427f2b3c41bb68d9dae198d92748.png. Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/44784d425d0e80ebd9dbdfc98d3988e8.pngκαι ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/20539ec24b6eb526b71f3c172b89f66e.png, δηλαδή  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/39f0daa7323e4ef22f190a9916e2844c.png  
    
  Πράγματι, για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0705031d854ce1ecc057b07a86960c73.pngέχουμε:  
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8602619d17f91f0818a563cffb6493c9.pnghttp://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa6aec8e660d292b0872268bd14d255f.png.
* Έστω η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/95275109392a2911a8dbba9a6037200e.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c5d7f37c12bb2e3cbc3ae967c0ddb21c.png. Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a6736446899c21b2d2608df9c87a4143.pngκαι ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f243a98684df12dbb2820b130f76c6e.png, δηλαδή  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2bcd478ca18b3a7323d45a39a7118352.png.

**Πίνακας παραγώγων βασικών συναρτήσεων**

|  |  |
| --- | --- |
| **Συνάρτηση** | **Παράγωγος** |
| **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/21e9d40a4cb225f82205bac913ecb788.png** | **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b28582446d44b9c5595ef89d9e9e69f6.png** |
| **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/13f2032c937b19f9fd55f98a084fab0e.png** | **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/21e51cdda7f69d7d0b610bc2776a32c5.png** |
| **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/05b0d3302e0eb6daf383715c101f9fdd.png** | **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/86c443b669f6fc6485b8b3ca2a432183.png** |
| **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e9c85ed7a26e435870c2c152952ac66.png** | **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/71c37adeb6c7d63e011939a5f230a86a.png** |
| **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/474621c3ede0d2b0da1df2413d5347f6.png** | **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f986c2beb835d81209efd79c1dca51d4.png** |
| **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/18665e8be052444c4430319ab437ba81.png** | **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1df26a79316551c3df1d3ffc3bc62f8a.png** |
| **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/691b674c85fc1d603302a3e27027c711.png** | **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/22469cfaaedada95dfb1ddedc7480450.png** |
| **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/10355a27b2fe2a4d52a0f811ffb0b9cf.png** | **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fd1838e8dc9fcf0064f33dcfd936b2c7.png** |
| **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c4036e6d525a2ac5394b0a6d43a59b5a.png** | **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6fb161a9f66f63a81259be91443bf78c.png** |
| **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/43ca3945b708d252a349d875ba6ced59.png** | **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9d19fd3c3422c10630083c2092a9d054.png** |

**Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης**

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.pngκαι η f είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/db223afeefbb4c1c6fd7aee30b2c3fe7.png, τότε η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/70890315fac65d107d40156207acecc2.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.pngκαι ισχύει   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/536cb4e5a2ea4dd0b3dbb1ab792b4e45.png

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/45767aa5fcd0a4f101e58378f9d2bbfc.png, τότε η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/70890315fac65d107d40156207acecc2.pngείναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/91f901c5bd9b9c2437d72df3893758b2.png.  
  
Δηλαδή, αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9d7d51d5c2c99ff156b846a5e4f4a861.png, τότε  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/67fed4514ac5ccb95d9f5e0a8f52f79d.png.

**Παράδειγμα**   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ca2a8e179e0091cce644204547729799.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6a7773e22268a70ad94c11fdc697a795.png.

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f2d37be037ec3dd132d70fb3cb1466ce.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9d7d51d5c2c99ff156b846a5e4f4a861.png, έχουμε τον τύπο   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/454da27f87073a921a4451040d1e8e8b.png  
που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας**.

**Παρατήρηση**   
Το σύμβολο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/025474915bfee3cd4032acad09577d70.pngδεν είναι πηλίκο. Στον κανόνα της αλυσίδας απλά συμπεριφέρεται ως πηλίκο, πράγμα που ευκολύνει την απομνημόνευση του κανόνα.

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι τα εξής:

* Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f79248efe1f9ce65ecb82ccc2215d964.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7453738c3b8338a33fd989495c552554.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d35546bf23496a6ff2a9574879d9dd0c.pngκαι ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e49dc62a6206f93c9a78b9ba5b55e797.png, δηλαδή  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8a137c496d4f5375ca3ee5d2019b0e6e.png  
    
  Πράγματι, αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5ce47adf0d4b2fdb1596f81628776c1a.pngκαι θέσουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/58d77cb22bcae2d29ef72b01ce3dc1e4.png, τότε έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/75fd06a9b7ec5999109f133ae6b5f9da.png. Επομένως:   
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/dcb961a97ee6e38d99a9770047c59308.png.  
  Αποδεικνύεται ότι, για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6df9574842c4c624e6b9145d35b72c02.pngη http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6c54f7e726ae798d7295e155cba27429.pngκαι η παράγωγός της είναι ίση με 0, επομένως δίνεται από τον ίδιο τύπο.
* Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7ae9df0d52e0e6e4781eeaefef78f306.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fd60edac63a0efc25833b9d2445950a5.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c37a1787d79eb203fe064b7d30a5e9c.pngκαι ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4358fb87e534f0899b859887a2a4d447.png, δηλαδή  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1515f2ccf6a6df8758ceb0e0b18dbc76.png  
  Πράγματι, αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/52b43e21ead66387f7d69faac5774ea4.pngκαι θέσουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5295ffec52e298425703dae9470dc981.png, τότε έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/75fd06a9b7ec5999109f133ae6b5f9da.png. Επομένως:  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c028f87b2dc9c6a542bcb0608e8cd13f.png.
* Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/962dcc3526cae1004ea2e3b3991564f9.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/037420d48ecc3a5c22b97d0436d0fbc2.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/70d03f4db1d1516d96c6a4ce5bcacefd.pngκαι ισχύει  
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/39130d674e890be03e89c429865f2e17.png  
  Πράγματι   
  — αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/705cf0909a324a19b0f87330bc866096.png, τότε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/784f871f4cb52fa3cd7610125fd55fc1.png, ενώ   
    
  — αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c0473a976fb8822fb3c6cc5f8725d0db.png, τότε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/eda8c77576301c890bb36049e96af72c.png, οπότε, αν θέσουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f031929552ace23d6ac3c860b3a1d2e8.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ba781968de984780f88e043eacc25326.png, έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1d6d4512588e3889ac3c01dd63b9c6b6.png. Επομένως,  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/dcb697e16a8c92c0b1a31a532cae40a4.png  
  και άρα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/39130d674e890be03e89c429865f2e17.png.

Ανακεφαλαιώνοντας, αν η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6a8c5f25d6f74fcbadf24fe6e151ed5a.pngείναι παραγωγίσιμη, τότε έχουμε:

|  |  |
| --- | --- |
| **Συνάρτηση** | **Παράγωγος** |
| **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0c92ababa6df5f30c197ddf13c8a072b.png** | **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f7915be86b3f30c726c1a8abefa9e04d.png** |
| **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f02ae2fdadaf717f2b07c80ad5b16b3.png** | **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4ac5714c24ee98572be616b074c297b6.png** |
| **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ccc0ac0b45094830afc9fb26a7a8f6c3.png** | **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/68ed8f2ccc47b35778ea93973546d8b1.png** |
| **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/406cba37dda0e4ded8f5b24cd8b6d1a8.png** | **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f7cf38d92c3b4181edc82b4e409f094c.png** |
| **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5d4bd91b6167725874f84980d5657727.png** | **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2726ce8d2743eb4d4381a51ccbe37efc.png** |
| **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0522c8d48e9f331028140f9b22e16993.png** | **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fbd59220307e918f71ded6556bb8ebf1.png** |
| **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5e486189b2b5e6093959a9c63ca82195.png** | **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e21f6419ae328dcb6e3b7325b7302a7b.png** |
| **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/48ea120885c74677aaaf1d06bf4d84b8.png** | **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/094213d8cc92ec2eae8f3185280eb76c.png** |
| **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b945272b5331eaf57a77ee66ac3d248.png** | **http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b9b5035dce41a4fa50f20fb2901aeac3.png** |

**Σημαντικές Παρατηρήσεις**

1. Οι κανόνες παραγώγισης ισχύουν για τις τιμές του x στις οποίες όλες οι συναρτήσεις που εμφανίζονται παραγωγίζονται.  
     
   Σχόλιο: Οι κανόνες παραγώγισης εφαρμόζονται μόνο σε ανοικτά διαστήματα.
2. Αν θέλουμε να βρούμε την παράγωγο του αθροίσματος (ή του γινομένου ή του πηλίκου ή της σύνθεσης) δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6e26d380f405f892c210bde80e6fbfbb.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.png, τότε γράφουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5e616cbbff3786f96f3f2804202a7f37.pngκαι όχι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c35c5101841e5f32bb3b9b3c66b5a5c8.pngγιατί http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82ff2836a56883e0a0ba20120d78d082.pngως παράγωγος της σταθερής συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d18caa7f6c81f0c9c313cf1b477c605f.png.   
   Αντίστοιχη προσοχή δίνουμε αν θέλουμε να βρούμε την παράγωγο του γινομένου ή του πηλίκου ή της σύνθεσης δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
3. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.pngτου πεδίου ορισμού της, δεν σημαίνει ότι και η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/92c5f2bf3dd41cf3025142281479952f.pngή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d84ffdc1521aecc669a0d1e0fe5ab328.pngή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0dcfa52d0c6b472338790943c26dc60e.pngδεν είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.png. Η εξέταση της παραγωγισιμότητας στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.pngσε οποιαδήποτε από τις παραπάνω συναρτήσεις γίνεται με την βοήθεια του ορισμού.
4. Μπορεί δύο συναρτήσεις http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/87c9583a9f8aaf9eafff5b9c1043ae55.pngνα μην είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.pngτου πεδίου ορισμού τους και η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d84ffdc1521aecc669a0d1e0fe5ab328.pngή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/92c5f2bf3dd41cf3025142281479952f.pngή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0dcfa52d0c6b472338790943c26dc60e.pngνα είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.png.

**Παράδειγμα**   
Οι συναρτήσεις http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/150a3bcbe7797610525176ecf8ab6fbd.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c7c25f7a94bdf2fd8f05190bbb37609b.png

δεν είναι παραγωγίσιμες στο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6c54f7e726ae798d7295e155cba27429.png, ενώ η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d84ffdc1521aecc669a0d1e0fe5ab328.pngέχει τύπο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/193d08812dc706ca20e030d979d16c68.pngκαι είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6c54f7e726ae798d7295e155cba27429.png.

1. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο συνάρτηση μιας συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png ορισμένης στο Α, θα δουλεύουμε ως εξής:

* 1. Με κανόνες παραγώγισης θα υπολογίζουμε την http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6a5add625f0ec9d77b4e8b81f0b802f0.png, στα ανοικτά διαστήματα του πεδίου ορισμού της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6560d35a421a084480f08cb1407f9429.png
  2. Εκεί που κλείνει το πεδίο ορισμού Α της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.pngή στα σημεία που αλλάζει ο τύπος της , θα δουλεύουμε πάντα με τον ορισμό της παράγωγου σε σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.png, για να βλέπουμε αν ορίζεται στη θέση αυτή παράγωγος , οπότε το σημείο αυτό του Α της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png, θα ανήκει στο πεδίο ορισμού της παραγώγου συνάρτησης , στην αντίθετη περίπτωση δεν θα ανήκει στο πεδίο ορισμού της παραγώγου συνάρτησης.

Σχόλιο: Δεν βρίσκουμε ποτέ το πεδίο ορισμού της παραγώγου συνάρτησης από τον τύπο της. Αλλά ακολουθούμε τα παραπάνω βήματα.

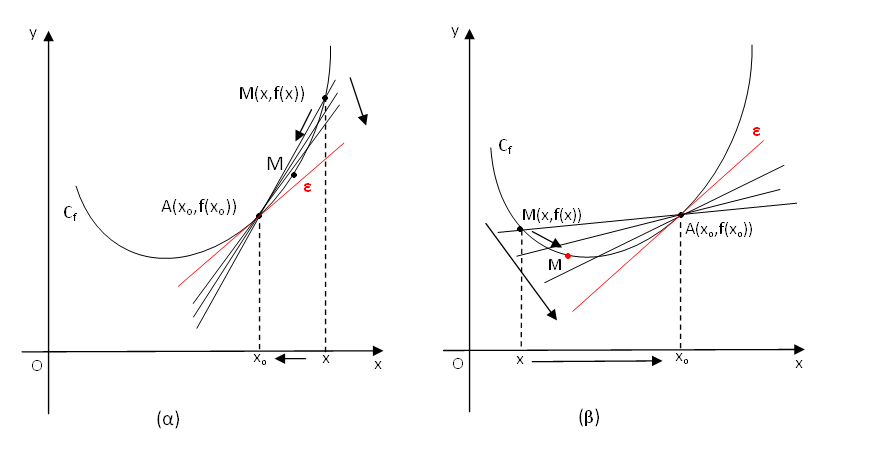
1. Η παράγωγος μίας συνάρτησης, δεν είναι κατά ανάγκη μία συνεχής συνάρτηση.
2. Αν μια συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png ορισμένη σε διάστημα Δ, αντιστρέφεται και η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/20bcc07709b970c2edf1706b1162a8ca.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/eb36c519eeac45653ced639396af3b46.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/03cc811f3efc977f8bfaed525c98896c.pngγια κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/56254e3e0e193083215ce364c98f3f55.pngτότε:  
     
   http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7a20a25b2ba1564206141f853c210391.png.  
     
   Πράγματι, για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/277f726bb2442f16caa0e0b9bad3d7da.pngισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/da857915284b2ff8aa1210a9e224c83f.pngεπομένως:  
     
   http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8861f4285df9b75cf7abeaf64a5ce981.png  
     
   http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f089d307428473ac20f7dd1e6732a0e5.png.
3. Αν υπάρχει η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6cdc9aa21c7b1e34c831c1190d997b03.png ( http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/eee797e8c7965f938b8003263f6146ff.png), σημαίνει ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f8d0843293b52d14d436e8dc207f1566.pngείναι συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.pngκαι ορίζεται σε σύνολο της μορφής http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be1db3ded3503c80335e50100e18dd55.pngή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/162038f88eb13e1dc7f2a823a79d41af.pngή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b88cd39870a99585164b52a7d05a8afe.png, με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1aeb6a1cbd2aeb15e248244b29be0afc.png.  
   Προσοχή ως προς την διαφορά που έχει ο συμβολισμός http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0087f822e0df893d2d51c341a0cd687f.png(νιοστή παράγωγος) με το συμβολισμό http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7914154c9c42e853f199e112cd6fe1b0.png(νιοστή δύναμη), αφού: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/474bf44076b777cb0e87328614af0375.pngενώ http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/faa667b0e01b140d4d9afb2b573200bc.png.
4. Αν μία συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, τότε η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6a5add625f0ec9d77b4e8b81f0b802f0.pngείναι περιττή.
5. Αν μία συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι περιττή και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, τότε η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6a5add625f0ec9d77b4e8b81f0b802f0.pngείναι άρτια.

**Παράδειγμα**   
  
H συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/474621c3ede0d2b0da1df2413d5347f6.pngείναι περιττή και παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c37a1787d79eb203fe064b7d30a5e9c.png, ενώ η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/05dc076e255d1f5e472cbf3de0c1f442.pngείναι άρτια.

1. Αν για τις συναρτήσεις http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8cb21062b9150afa35f43e33e31220a5.pngισχύει ότι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5e67233f19d74dd8527222ceb0f7f74a.pngτότε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ba0c78b1f6f02db7406dc27d3e6294fe.png.   
   Ενώ αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ba0c78b1f6f02db7406dc27d3e6294fe.pngδεν σημαίνει απαραίτητα ότι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5e67233f19d74dd8527222ceb0f7f74a.png.

**Παράδειγμα**   
  
Οι συναρτήσεις http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0715b526aeb5e800c0a4d6e5c8810e20.pngείναι παραγωγίσιμες στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c37a1787d79eb203fe064b7d30a5e9c.png ως πολυωνυμικές με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f5a34def8534748e84429aa0b932a5e8.png.  
Παρατηρούμε ότι ενώ http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ba0c78b1f6f02db7406dc27d3e6294fe.png, οι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/229618ff87fd85a0cf48167b44d9e08a.pngδεν είναι ίσες.

**Εφαπτομένη γραφικής παράστασης συνάρτησης**

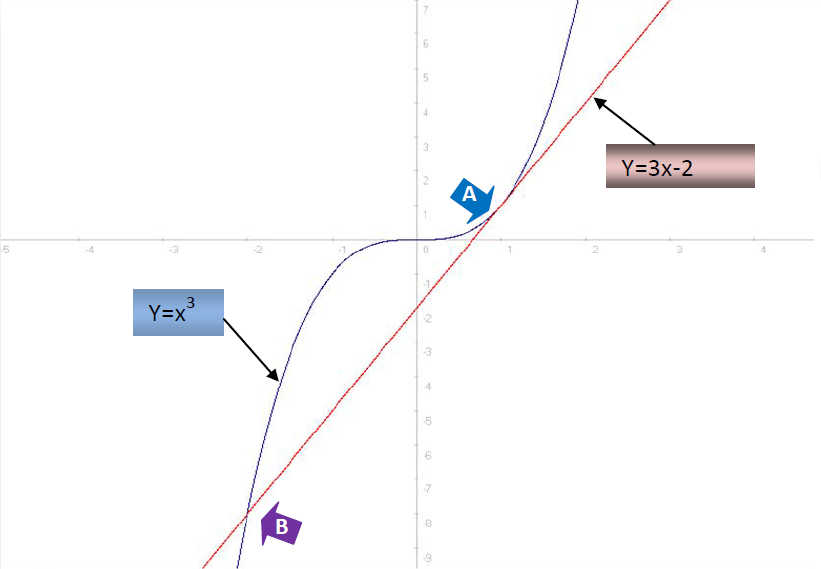
Έστω http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png μια συνάρτηση και http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/08290010a31b301c3ab7af7e347b0bcf.pngένα σημείο της γραφικής της παράστασης. Αν πάρουμε ακόμη ένα σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7630ccb204e7558585f5d134f4ecb0dc.png, της γραφικής παράστασης της f και την ευθεία ΑΜ που ορίζουν τα σημεία Α και Μ, παρατηρούμε ότι καθώς το x τείνει στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.pngμε οποιονδήποτε τρόπο, τότε όπως φαίνεται στα σχήματα (α) και (β), η τέμνουσα ΑΜ παίρνει μια οριακή θέση ε.  
  
Την οριακή θέση της ΑΜ ονομάζουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png στο Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης το όριο των κλίσεων των ευθειών ΑΜ, όταν βέβαια αυτό υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Δηλαδή ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι ο πραγματικός αριθμός http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/02fde71fc839b162486f8796f1f5b861.png  
  
**Συμπερασματικά:**  
  
**ΟΡΙΣΜΟΣ**

|  |  |
| --- | --- |
| Έστω http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png μια συνάρτηση και http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/08290010a31b301c3ab7af7e347b0bcf.pngένα σημείο της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/31879b93d2f1a7b4da6d37403f348d6f.pngΑν υπάρχει το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/86102c1455e721c54ecc652e16e08cf9.pngκαι είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/24228862db8fc3eb45bae9cd050265e4.pngστο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ. | http://www.study4exams.gr/math_k/graphs/MK_K3_E3/MK_K3_E3_S1_2.png |

Δηλαδή, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/08290010a31b301c3ab7af7e347b0bcf.pngείναι η:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e98a88a62460bedc49f2614a34dad9f7.png  
  
όπου http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fd028638797bc7443c680ae42d757232.png  
Όταν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ’ένα σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.pngτότε  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4e0d872774e5283cf7ec9f3dfc92fa61.png, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/24228862db8fc3eb45bae9cd050265e4.pngείναι η:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/757382edd58a1dd0462c4c963072f60d.png

* Ο αριθμός http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cf2594184106ba984937e667e86e0951.pngλέγεται κλίση της εφαπτομένης (ε) στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/08290010a31b301c3ab7af7e347b0bcf.pngή κλίση της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/24228862db8fc3eb45bae9cd050265e4.pngστο Α ή κλίση της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.pngκαι ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a48c018a0cbffd56c4999ab8aebe8846.pngπου σχηματίζει η εφαπτόμενη ευθεία με τον x′x.

**Σημαντικές Παρατηρήσεις**

1. Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/24228862db8fc3eb45bae9cd050265e4.pngέχει οριζόντια εφαπτομένη σ’ ένα σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.pngόταν και μόνο όταν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/46ac926ab7f77f0e43bc06270ca70c28.png. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/67741eea39b569e6a794152db735a6d1.png.  
     
   Φανερά, όταν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b58ef575777d92e2fa7c6f0d28d7cb43.pngγια κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png, η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/24228862db8fc3eb45bae9cd050265e4.pngδεν έχει σε κανένα σημείο της οριζόντια εφαπτομένη.
2. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/24228862db8fc3eb45bae9cd050265e4.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/08290010a31b301c3ab7af7e347b0bcf.pngμε τον x′x , τότε:
   * http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b01f3061835456b0e35e8e7d73e02f8f.png
   * http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/42a8b232833e96a425b4be6b4f3e173c.png
   * http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a3ad7164c3648deb22097c18a65484e7.png
3. Aν η εφαπτομένη (ε) της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/24228862db8fc3eb45bae9cd050265e4.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/08290010a31b301c3ab7af7e347b0bcf.pngείναι:
   * παράλληλη σε μια μη κατακόρυφη ευθεία (δ), τότε οι (ε) και (δ) θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, δηλαδή θα ισχύει:  
     http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fe7899b247192ee84316fe7fb80e26ad.png
   * ενώ αν είναι κάθετη σε μια μη οριζόντια ευθεία (δ), τότε το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των (ε) και (δ) θα είναι ίσο με – 1, δηλαδή θα ισχύει:  
     http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2454dea82d2c52211c0f3cd89085fdc8.png.  
     (Και αντίστροφα)
4. Για να εφάπτεται η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/24228862db8fc3eb45bae9cd050265e4.pngστον x′x, θα πρέπει να ισχύουν:  
     
   όπου http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.pngη τετμημένη του σημείου επαφής.  
   (Και αντίστροφα)
5. Οι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/24228862db8fc3eb45bae9cd050265e4.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/44c808ee9cf2dd1c575ad864122ff158.pngέχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.pngόταν και μόνο όταν:  
   http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e8db9f01cc1c90600382dec43cb4cf1f.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f3ff0106637316d7b7b3d62b09b641a.png.  
   Ειδικότερα:  
   Η ευθεία http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7529f7bb4d3b64d5c6873bb3760310b7.pngεφάπτεται στο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/08290010a31b301c3ab7af7e347b0bcf.pngτης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/24228862db8fc3eb45bae9cd050265e4.pngόταν και μόνο όταν οι εξισώσεις: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/da4eff3b63ecb64197368e799397a42b.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ed2f9652e31770adbad896b02ff3d5f2.pngέχουν κοινή λύση.
6. Η εφαπτομένη της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/24228862db8fc3eb45bae9cd050265e4.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/08290010a31b301c3ab7af7e347b0bcf.pngμπορεί να έχει και άλλο κοινό σημείο με την http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/24228862db8fc3eb45bae9cd050265e4.png.  
     
   Για παράδειγμα:  
     
   

**Ρυθμός μεταβολής**

**Ορισμός**

Αν δυο μεταβλητά μεγέθη http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c5ebbf97ec2ddee340ce732126a670c.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2da5a2c1045c8a6463e1b32b01010954.pngσυνδέονται με τη σχέση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7c1c9491ba7c6e8d6d2cfa82e39b22ca.png, όταν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/677cd66e889a6e3179a71add707c9294.pngείναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c71e8b2e4fc620512209be37a6b2a5cd.png,τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2da5a2c1045c8a6463e1b32b01010954.pngως προς το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c5ebbf97ec2ddee340ce732126a670c.png στο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c71e8b2e4fc620512209be37a6b2a5cd.png την παράγωγο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3f6a965385ed6872616fb0d66ceba82c.png.

**Σημαντικές Παρατηρήσεις**

1. O ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png, με τύπο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7c1c9491ba7c6e8d6d2cfa82e39b22ca.png, ως προς http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9dd4e461268c8034f5c8564e155c67a6.pngόταν το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9dd4e461268c8034f5c8564e155c67a6.pngτείνει στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngισούται με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/50bbd36e1fd2333108437a2ca378be62.pngστο σημείο της (http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9b66bca71bf039e1678ac2148fbac57d.png).
2. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7a52b64bc3b6fc5b02ec5112e4bd6b8a.pngως προς τον χρόνο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e358efa489f58062f10dd7316b65649e.pngτη χρονική στιγμή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/50572610df283ebd763c3e69130083f6.png, είναι η παράγωγος http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a17bdac81a9e97bb555475088835f76b.png, η οποία λέγεται επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/50572610df283ebd763c3e69130083f6.pngκαι συμβολίζεται http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b5585bf77f6f6f18dd71a50962228642.png, άρα: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b967dd521a149330a76c8249812b5aa0.png.
3. Στην οικονομία το κόστος παραγωγής Κ, η είσπραξη Ε, και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9dd4e461268c8034f5c8564e155c67a6.pngτου παραγόμενου προϊόντος.   
     
   Η σχέση που συνδέει τις παραπάνω συναρτήσεις είναι:   
   http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a0b85024d95326ef15e4b6a607c28423.png.  **(1)**   
   • Η παράγωγος http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2375d405e60d8833500f31c0d3318c73.pngπαριστάνει τον ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9dd4e461268c8034f5c8564e155c67a6.png,όταν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a34a56808bb16ac25bf9a6f2d2d0b2e2.pngκαι ονομάζεται οριακό κόστος στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.png.   
   • Η παράγωγος http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e0a0ede0921a7a581e9b36a34ff1068a.pngπαριστάνει τον ρυθμό μεταβολής της είσπραξης ως προς την ποσότητα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9dd4e461268c8034f5c8564e155c67a6.png, όταν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a34a56808bb16ac25bf9a6f2d2d0b2e2.pngκαι ονομάζεται οριακή είσπραξη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.png.   
   • Η παράγωγος http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/147327fcdc0e1e714670b9293d0dcce0.pngπαριστάνει τον ρυθμό μεταβολής του κέρδους P ως προς την ποσότητα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9dd4e461268c8034f5c8564e155c67a6.png,όταν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a34a56808bb16ac25bf9a6f2d2d0b2e2.pngκαι ονομάζεται οριακό κέρδος στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.png.  
     
   • Από την **(1)** προκύπτει ότι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a68aba03f8205054f60722d471362897.png.
4. Αν δυο μεγέθη http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9dd4e461268c8034f5c8564e155c67a6.png,http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/415290769594460e2e485922904f345d.png συνδέονται με τη σχέση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7c1c9491ba7c6e8d6d2cfa82e39b22ca.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαραγωγίσιμη ως προς http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9dd4e461268c8034f5c8564e155c67a6.pngτότε:   
   α) Αν το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/415290769594460e2e485922904f345d.pngαυξάνεται ως προς http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9dd4e461268c8034f5c8564e155c67a6.pngμε ρυθμό http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bccfc7022dfb945174d9bcebad2297bb.pngεννοούμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/72a881bb1b8918ba4b2fc8084ae5a67a.png.   
   β) Αν το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/415290769594460e2e485922904f345d.pngμειώνεται ως προς http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9dd4e461268c8034f5c8564e155c67a6.pngμε ρυθμό http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bccfc7022dfb945174d9bcebad2297bb.pngεννοούμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/eadee739aaa7bf79e77e4d0fc91e2e13.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7c51dee4cd461ebcbbecf8fcee8d236a.png.

Στη συνέχεια ας δούμε διάφορα **Παραδείγματα**:

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1**

Εκφώνηση  
Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c8f63a2fef6b66f92cfaea0681cedc98.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/71d6632eebc332f33ab4da83aed3c0a9.png.

Λύση

Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι ορισμένη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.png. Για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/42930e4d78e2fb85502e414964b7c5e6.png έχουμε:

http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1ef9173b39b6ff32612e4b592a18a81a.png

http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6388d08917fb269b32ab68ca3def5ca9.png

http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7da123c92dd6679d5ac0ea1ade255917.png.  
Άρα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/edcf258822d64b880f390d27370671e6.png.

Μεθοδολογία  
Για να υπολογίσουμε την http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ef42c1796a5f6b7c3efe3d34a4053830.pngόταν η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png δίνεται από έναν τύπο, υπολογίζουμε το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0ef4f9745b6ba92888189994f8dc93d6.png.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2**

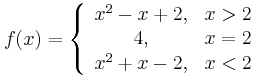
Εκφώνηση  
  
Nα εξετάσετε αν υπάρχει η παράγωγος της   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a932145ef21dcbb644c7d8f67423c66c.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/08cda1310cfb52fe7330f03cc553048a.png.

Λύση  
  
Για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e02699b4bd48ce13f10a0e5faf8e3683.pngείναι:  
  
Αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/86632da3532631e61b7e491ee6b5f623.pnghttp://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ade0fab4c6dedeefb9bcff5dfee049a5.pnghttp://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5f3f119edfe7b5c88dffc2fbebf74c93.pnghttp://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8330f459995adc8e138f3bc56b528162.pnghttp://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/49aa1a3e4f8b52336953381a364595e7.png.  
  
Αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/85550eccfa3a3f8f0e3ad2172cd897a6.pnghttp://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9bbedccb9c2297cdf3db30675ce4f4fa.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/64b241583560a1745cfec1278b4fdc11.png.  
  
Έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fab1b5df699a34ea573af0df61523f72.pnghttp://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7fcff6c540e39dd13780bd83cea14014.png.  
Άρα η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/daa5415485192cb7804412f9ef4106d4.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4fa9a3a7c44f4ec98c228b4ff5c30354.png.

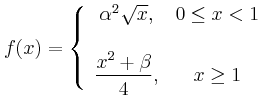
Μεθοδολογία  
Για να υπολογίσουμε την http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/292d9be2ccd05b87015efb6111d9d071.pngόταν η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png δίνεται από διπλό τύπο και το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngείναι το σημείο στο οποίο αλλάζει ο τύπος ,υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια   
(α) αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9e51e090d168b62f6e763a6995fbd223.pngτότε η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png παραγωγίσιμη με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/abc7460cb5e603ac8471cfdee0a2aad0.png.  
  
(β) αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f3d151b257e38d9e5c8f5c90e9fb7034.pngτότε η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png δεν είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.png.  
Αν ο τύπος της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png δεν αλλάζει στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.pngεργαζόμαστε όπως στο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ1.

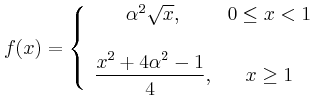
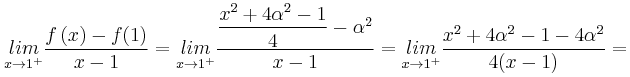
* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3**

Εκφώνηση  
Να εξετάσετε αν η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0a7b842f88235b695268863262a8e143.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/71d6632eebc332f33ab4da83aed3c0a9.png.

Λύση  
Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png γράφεται: .  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/49f800f6a17487df9bd707b818acbd8c.png, έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/23b932ee6d564b6c38d23f54d98ec7e0.pnghttp://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c0987106ef76953da63f2835c5a7508e.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/70a47d04893259734e11a302c9065e95.pnghttp://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fb4d8e8ed7a7f989bce3619efdab12bb.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a991fe8da1154ca274bc1181581a3c6a.png.  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9095c292773d0ec387c454840855fd47.png, έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b73cd74b5866f5cfd27771929536eb9a.pnghttp://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/151013a0dff3f3ace13941bcaa2790a1.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1f453f536ca66c8c6c029afc970ce2f0.pnghttp://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5e6835fe384a3024b9952d9d3ba40538.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/35a839ce6a51aa958558be9efb24bc7a.png.  
  
Έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1c7333dd3e021010daa77612988a5e17.png,  
  
άρα η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png δεν είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/71d6632eebc332f33ab4da83aed3c0a9.png.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4**

Εκφώνηση  
  
Να βρείτε τις τιμές των http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2bf550b9d8926339ee04d39b030bede4.png ώστε η συνάρτηση  
  
να είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e748797b9f70f14eeba3e0e4e31dbcb0.png.

Λύση  
  
Καταρχήν, θα πρέπει η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png να είναι συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e748797b9f70f14eeba3e0e4e31dbcb0.pngγιατί διαφορετικά δεν θα είναι ούτε παραγωγίσιμη, άρα πρέπει:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f96d9ef398c5028d36d8906138cd338.png.  
  
Έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a2b95ed28b20c11452dd999fecded76e.pngκαι  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a09cb7c1a3dd7805bc50ce50ba0a1041.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4c37cfdc1a41fd1963b097ab557c5c07.png.  
  
Άρα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5cd2bc835770225d76ea2bdf4501f6a7.png.  
  
Τότε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e1f393ead6a5e7ed1855df26c8d8b4f.png  **(1)**.  
  
Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png θα γίνει   
  
Για να είναι τώρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.pngπαραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e748797b9f70f14eeba3e0e4e31dbcb0.pngθα πρέπει:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/de9121d1ebf4f0539579bf54b5f96ab4.png.  
  
Είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9ceb0aaf691fc2f874cca5e2443a489c.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e7693047474a159bd2317833b8fd4c70.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/90c6735fa53253451ec66c38478bbf82.pngκαι   
  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1d17016299bd24a9fe5de000b1e3d5fb.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/96e0666e935aa89807c41996f6dbe272.png.  
Τότε έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4bd7a7e8b1c37330320a9e8ace06edfd.png.  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c6aeb91f5a441293a1c16b7d537c6af1.pngάρα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/dab584617b9835b55e336b851126aaf8.pngή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aab33a788898424779fbb58ba0e915c8.png.  
  
Τότε, λόγω της **(1)** είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1df5488d2b1cc3b0305ba47ee1d845d.png  
Άρα, για να είναι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/73547acb4a3fc3002fd596aa027dbdc1.png, πρέπει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/dab584617b9835b55e336b851126aaf8.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1df5488d2b1cc3b0305ba47ee1d845d.pngή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aab33a788898424779fbb58ba0e915c8.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1df5488d2b1cc3b0305ba47ee1d845d.png.

Μεθοδολογία  
Αν αναζητούμε παραμέτρους ώστε μια συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png να είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.png, καταρχήν απαιτούμε η f να είναι συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b21a666a81629962ade8afd967826ed.png.  
Τη σχέση που προκύπτει την αντικαθιστούμε στον τύπο της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png και απαιτούμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/36cfd2f5fa9a237c5c0f2dcb23314768.png.  
Τέλος λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτουν και προσδιορίζουμε τις παραμέτρους.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5**

Εκφώνηση  
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e8828234f4a6c3d6f01b52d54aee3611.png. Να αποδείξετε ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαραγωγίζεται στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f0ec1d844da2f01f5360aaf2be471ca.pngκαι να βρείτε την http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6d86a78e3371f77f588e2877f411b576.png.

Λύση  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2915aca00f796ab9165703b38b9b4e80.pngέχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0b75824881a0d81dfec104c6c6a4e44f.png, οπότε  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fab59e9840ac70538e8e7a511833e158.png.  
Άρα η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαραγωγίζεται στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f0ec1d844da2f01f5360aaf2be471ca.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3afb8185fa6f7ee49577467dcbb32d41.png.

Μεθοδολογία  
  
Aν το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngείναι σημείο μηδενισμού απόλυτης τιμής, τότε η παραγωγισιμότητα της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngεξετάζεται με τον ορισμό http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7446e972f0767b8eb4bef5134aea0413.png.  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f55158baaee3b0622fef63cea26cb639.pngυπολογίζουμε τον λόγο μεταβολής http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/783121b9b320f767bc0bc3f02a21e31a.pngκαι στη συνέχεια εξετάζουμε αν το όριο του λόγου μεταβολής, δηλαδή το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/02b54945071487c9261d1f75d8b4cc91.pngυπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.  
**Σημείωση:** Στο συγκεκριμένο παράδειγμα δεν χρειάστηκε να πάρουμε περιπτώσεις για την απόλυτη τιμή.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6**

Εκφώνηση  
  
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/25c2516c15299da12818bbdd6b39279e.png. Να αποδείξετε ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαραγωγίζεται στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f0ec1d844da2f01f5360aaf2be471ca.pngκαι να βρείτε την http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6d86a78e3371f77f588e2877f411b576.png.

Λύση  
Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngέχει πεδίο ορισμού το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/518674c609b29577fdf7ac5ac14540db.png.  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/887fb68a10cbd4369b27c90bee0334d8.pngέχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/de615b0f3f7fba688f5b1f346d657d5c.png, οπότε  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ce9f0f223e2e52f9f143893465fae7aa.png  
Άρα η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαραγωγίζεται στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f0ec1d844da2f01f5360aaf2be471ca.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3afb8185fa6f7ee49577467dcbb32d41.png.

Μεθοδολογία  
  
Aν το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngείναι σημείο μηδενισμού υπόρριζης ποσότητας, τότε η παραγωγισιμότητα της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngεξετάζεται με τον ορισμό http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ce41c2c3750d997229864d08dd6b20f0.png.  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f55158baaee3b0622fef63cea26cb639.pngυπολογίζουμε τον λόγο μεταβολής http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/783121b9b320f767bc0bc3f02a21e31a.pngκαι στη συνέχεια εξετάζουμε αν το όριο του λόγου μεταβολής, δηλαδή το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0eca4fbf5652c2cd79a2eaa2ede4626e.pngυπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7**

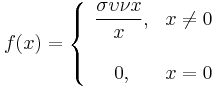
Εκφώνηση  
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3d06b3aa7a5c8463c1502e697170c8a2.png. Να εξετάσετε αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαραγωγίζεται στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1dc886349e3ef51c59a2f1945c30844a.png.

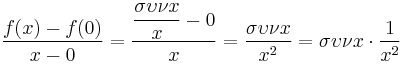
Λύση  
Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngέχει πεδίο ορισμού το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b9d1006acacad4add16064841936b057.png.  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e7ff1900efa5080a7bd8a3e36695a673.pngέχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/439355f6136c58aa2e3edb5e8c8fa52b.png, οπότε

http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9baaee402e4256bced9eb9c404c1ceb0.png,  
αφού http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/224019a561d348c2557d6c1e51899c86.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a393b613197a6c150275e5faf6251e41.pngγια http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/85b1e7d5128ddc0f24d549212c269cdb.png.  
Άρα η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν παραγωγίζεται στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1dc886349e3ef51c59a2f1945c30844a.png.

Μεθοδολογία  
  
Aν το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngείναι σημείο μηδενισμού υπόρριζης ποσότητας, τότε η παραγωγισιμότητα της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngεξετάζεται με τον ορισμό http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7446e972f0767b8eb4bef5134aea0413.png.  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f55158baaee3b0622fef63cea26cb639.pngυπολογίζουμε τον λόγο μεταβολής http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/783121b9b320f767bc0bc3f02a21e31a.pngκαι στη συνέχεια εξετάζουμε αν το όριο του λόγου μεταβολής, δηλαδή το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/02b54945071487c9261d1f75d8b4cc91.pngυπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8**

Εκφώνηση  
Δίνεται η συνάρτηση .  
  
Να εξετάσετε αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαραγωγίζεται στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f0ec1d844da2f01f5360aaf2be471ca.png.

Λύση  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2915aca00f796ab9165703b38b9b4e80.pngέχουμε:   
  
, οπότε   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4267b8468a8e5df501577297bf7dbbb6.png  
  
γιατί http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/86fe9f4510ac418efafcdb33b52ee0db.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fade54f50fad071a9a4ed99a2cdd8fb.png.   
  
Άρα η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν παραγωγίζεται στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f0ec1d844da2f01f5360aaf2be471ca.png.

Μεθοδολογία  
  
Aν δίνεται ξεχωριστά η τιμή της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.png, τότε η παραγωγισιμότητα της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngεξετάζεται με τον ορισμό http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c058877685f4f9b36daa453f2d953a15.png.   
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f55158baaee3b0622fef63cea26cb639.pngυπολογίζουμε τον λόγο μεταβολής http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/425ee4223e26ed6cbf85738979df6b66.pngκαι στη συνέχεια εξετάζουμε αν το όριο του λόγου μεταβολής, δηλαδή το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0400004fc18bc1c5c5158d5833e8a3a9.pngυπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.   
  
Σημείωση: Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ένας 2ος τρόπος για να αποδείξουμε ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν παραγωγίζεται στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f0ec1d844da2f01f5360aaf2be471ca.pngείναι η ασυνέχεια της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f0ec1d844da2f01f5360aaf2be471ca.png.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9**

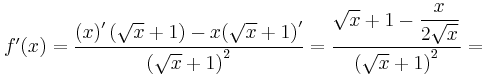
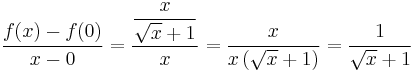
Εκφώνηση  
  
Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngστο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/258726a2e688fcb36dc3baaf35d56c5f.pngόταν:  
  
i. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/430542477aca96d5e2bd2e238d578e07.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/309ea22abc66ed0ba4494daf638a248a.png.  
  
ii. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/40698e0b2a91ae42fce9ece2b3558f0c.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c0d650af5dd5443995ce244b3ce1a7e1.png.  
  
iii. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9b26c51e31aa3008c7bc6490df004c6a.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/12a14601bb2f6bd508dcc56c8d43ff11.png.  
  
iv. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8d3432fe82848d122cee3444319bdb3e.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d8946769c84800193961ab66fc78a3f1.png.  
  
v. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/931c8d939769d8999cd5807f1e1f7b80.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f36bb24d0d9e5bee4b9b693e9a816a9a.png.

Λύση  
i. Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngέχει πεδίο ορισμού το σύνολο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1948655d957907def5c317d11eb83610.png.  
  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e2f3aee6d0f93ab46e9ddbb49f314c91.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f5269c54fc6630524bf5d09abbb9e338.png.  
  
Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη και στο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/309ea22abc66ed0ba4494daf638a248a.png, με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b130cfe145d37c221f334418924af854.png.  
  
ii. Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngέχει πεδίο ορισμού το σύνολο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/833a0817f4931767a5dbd9a094bd0a77.png.  
  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο σύνολο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a3f888c4c6e33e3824190ba1c6159cec.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d397f39ff07b69900585b2b2c930e965.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f46d12955f4c0a8eee43cc38acd6750.png.  
  
Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη και στο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c0d650af5dd5443995ce244b3ce1a7e1.png, με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6213b78aa5c4b6001b81741dce783ecf.png.  
  
iii. Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngέχει πεδίο ορισμού το σύνολο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1948655d957907def5c317d11eb83610.png.  
  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/23de9adeb10cb7870519e25452b37227.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f5269c54fc6630524bf5d09abbb9e338.png.  
  
Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη και στο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/12a14601bb2f6bd508dcc56c8d43ff11.png, με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/120175f37a48fdccf4c40d5f73f3e420.png  
iv. Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngέχει πεδίο ορισμού το σύνολο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b348d96a8cadce8b42c42c1676652b48.png.  
  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/55bdcc9391711bd78b13fe1fd640856d.png.  
Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη και στο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2a14ef3eff5b6e6c0303c3ba4ee79232.png, με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/12162d8a66fe202759b67c3e4c66f0b6.png.  
  
v. Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngέχει πεδίο ορισμού το σύνολο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1948655d957907def5c317d11eb83610.png.  
  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81036bba53f5cf97b99ae20ac65f346c.png.  
  
Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη και στο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d7113dd5f40df23a5a8de9bf335d1ba0.png, μεhttp://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1ffd44e9f469c58e7eb3be428085388c.png

Μεθοδολογία  
  
Έστω μια συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngπαραγωγίσιμη και http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ea3781478b88eca61bff839a72c19eea.png. Αφού η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, θα ορίζεται ο παράγωγος αριθμός της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngγια κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ea3781478b88eca61bff839a72c19eea.png, δηλαδή ο αριθμός http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0056583993d99b9424a3622a6f2a9b2c.png. Ο υπολογισμός του αριθμού http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0056583993d99b9424a3622a6f2a9b2c.pngμε τον ορισμό της παραγωγισιμότητας συνάρτησης σε σημείο, πολλές φορές είναι αρκετά δύσκολος, γι’ αυτό υπολογίζουμε την παράγωγο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0df2b965bdea53ef4027894b8affeb5a.pngμε τη βοήθεια των κανόνων παραγώγισης και των παραγώγων των βασικών συναρτήσεων και θέτουμε στον τύπο του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0df2b965bdea53ef4027894b8affeb5a.pngόπου x το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/258726a2e688fcb36dc3baaf35d56c5f.png.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10**

Εκφώνηση  
  
Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων.  
  
i. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c8fbf4c6a6126db7e12d278f59bd6365.png  
  
ii. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6aeeef0748b6a9209625d2d0e347c783.png  
  
iii. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a7269b17b905a0745399c2437788abec.png

Λύση  
  
i. 1ος Τρόπος:  
  
Το πεδίο ορισμού της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/833a0817f4931767a5dbd9a094bd0a77.png. Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a3f888c4c6e33e3824190ba1c6159cec.png, σαν γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e04122a9dfbf89c7ef9e052072bdbae5.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b655ff4c5b7921d7446104fc7c855115.png(1)  
  
Εξετάζουμε αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο 0.  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f46d12955f4c0a8eee43cc38acd6750.pngέχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3021c4b99dcd08d241577693182be9d8.png  
  
οπότε  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7ff460f85e9958802cf7b4cfc57fba93.png  
  
Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο 0 με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8155da38daf3a6e85f2be32c3afae534.png. (2)  
  
Επομένως η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη και από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6d7c0063f0c86318daf2648dc83a2699.png.  
  
2ος Τρόπος:  
  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6a56f8f184fc01a38fb39c9cd9e38d29.png  
  
Αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/eccc2c2708e9f422e5de195be14029dc.png.  
  
Αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9a7a2ebbce505cc32805dab289aeb537.pngόπως παραπάνω με τον ορισμό.  
  
ii. Το πεδίο ορισμού της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/833a0817f4931767a5dbd9a094bd0a77.png.  
  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a3f888c4c6e33e3824190ba1c6159cec.png, σαν πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με  
  
  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ea3d3352ef25777ae81a82aec719310d.png(1)  
  
Εξετάζουμε αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο 0.  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f46d12955f4c0a8eee43cc38acd6750.pngέχουμε:  
  
οπότε  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9266097f1d457574b00643d7b37bac83.png  
  
Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο 0 με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9d136b47b2ede80a6ef2020e2ef31aa1.png(2)  
  
Επομένως η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη. Με βάση τις σχέσεις (1) και (2) η παράγωγος της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngορίζεται ως εξής:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a586ba8ad9d611b6309f0dcaab57dc2b.png  
  
iii. Το πεδίο ορισμού της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/833a0817f4931767a5dbd9a094bd0a77.png.  
  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a3f888c4c6e33e3824190ba1c6159cec.png, σαν άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/75cf07753cf43c9d16d46b3ac216f727.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c95c9e628370a9d19d4edc56eaa51dd8.png(1)  
  
Εξετάζουμε αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο 0.  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f46d12955f4c0a8eee43cc38acd6750.pngέχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/016c66fea7857448d87c64f29aaa5091.png  
  
οπότε  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/06d4ad96690277332379c466a1992d67.png  
  
Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngδεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.  
  
Έτσι η παράγωγος της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngορίζεται ως εξής:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b16f11e938e27b06f2013d5d98c07c40.png.

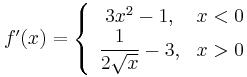
Μεθοδολογία  
  
Έστω μια συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7a73ba25b098ddc0a8fad852c336e6ca.pngέτσι ώστε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b8ff6c6689247b101c7d9923af33db00.pngή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fab56e77ca488a46afb1df75185a8bb5.pngή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/72cbd33107d1dadb1cb56fb7eb543fcf.png  
  
Αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3678967d254282d11705a61a55c04fbd.pngείναι το πεδίο ορισμού της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7a73ba25b098ddc0a8fad852c336e6ca.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7f2feb8cd7d112c7f38b8c01724de754.pngείναι το σύνολο των σημείων του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3678967d254282d11705a61a55c04fbd.pngστα οποία οι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/28578af031523755437b3d01d8ad7bc0.pngείναι παραγωγίσιμες, τότε η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7a73ba25b098ddc0a8fad852c336e6ca.pngθα είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7f2feb8cd7d112c7f38b8c01724de754.png.  
  
Αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6bba1f57537f90ff068dc40c6a8e6730.pngείναι το σύνολο των σημείων του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3678967d254282d11705a61a55c04fbd.pngώστε μια τουλάχιστον από τις http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/28578af031523755437b3d01d8ad7bc0.pngνα μην είναι παραγωγίσιμη, τότε δεν μπορούμε εκ των προτέρων να γνωρίζουμε αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7a73ba25b098ddc0a8fad852c336e6ca.pngείναι παραγωγίσιμη σ’ αυτά τα σημεία.  
  
Για να εξετάσουμε αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7a73ba25b098ddc0a8fad852c336e6ca.pngείναι παραγωγίσιμη σ’ αυτά τα σημεία, εφαρμόζουμε τον ορισμό της παραγωγισιμότητας μιας συνάρτησης σε σημείο.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11**

Εκφώνηση  
  
Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων  
  
i. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a6fb789e0e612c80b56abc4c2a7ee21f.png  
  
ii. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/742ad2b9c12f67ddf326765fe0bb939b.png

Λύση  
  
i.

* Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5c5f67932d222dd39481db86f664e66c.pngσαν πολυωνυμική συνάρτηση, με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/289cbab6c587699382996eb089d7a8e0.png
* Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a3f888c4c6e33e3824190ba1c6159cec.pngσαν άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/75ca1a6b895b254258c23070572228ac.png.
* Εξετάζουμε αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο 0.  
    
  Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7e3ed209d91ebbbcc39dc924dd07b438.pngέχουμε:  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d317c48e0087d2f9c5617266398a65fe.png  
    
  οπότε  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0557d6dbcf75d825da22e13f9e6ed145.png  
    
  Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f46d12955f4c0a8eee43cc38acd6750.pngέχουμε:  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa3fd62bdb993a62b2fcf2ec385bcf6c.png  
    
  οπότε  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d0a22a5a0793bc4897a2227cda5e9b34.png  
    
  Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngδεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Έτσι η παραγωγός της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngορίζεται ως εξής:  
  
  
  
ii.

* Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5c5f67932d222dd39481db86f664e66c.pngσαν άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e8df4ee34f98d7d7901115d4b718208f.png.
* Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/51ab9586b0535e2b28e8e221303c0c89.pngσαν πολυωνυμική συνάρτηση, με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8430f1f44408baa5eed4b83a9f18f993.png.
* Εξετάζουμε αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο 0.  
    
  Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7e3ed209d91ebbbcc39dc924dd07b438.pngέχουμε:  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e425afb92c317f7d71961777b8193e97.png  
    
  οπότε  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a50cba0ace2825af6f12a6403052847c.png  
    
  Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f46d12955f4c0a8eee43cc38acd6750.pngέχουμε:  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/113b4a94ca149b86707bdf4fdc76912b.png  
    
  οπότε  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c6ad7b289f80376c54f6263eff511f8c.png  
    
  Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο 0 με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8155da38daf3a6e85f2be32c3afae534.png.

Έτσι η παράγωγος της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngορίζεται ως εξής:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a6bdbf9e9276e28a921f27de77e4c302.png

Μεθοδολογία  
Για να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngτης οποίας ο τύπος δίνεται με κλάδους, κάνουμε τα εξής:  
  
1. Αξιοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης και τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων βρίσκουμε την παράγωγο της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngσε κάθε κλάδο χωριστά, με εξαίρεση τα κλειστά άκρα του πεδίου ορισμού και τα σημεία http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/258726a2e688fcb36dc3baaf35d56c5f.pngαλλαγής του τύπου της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.png, στα οποία η παραγωγισιμότητα της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngεξετάζεται με τον ορισμό.  
  
2. Ειδικά για το σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/75d2593b1bca434cfb15f73523a9b5cb.pngαλλαγής του τύπου της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngεξετάζουμε καταρχάς αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/75d2593b1bca434cfb15f73523a9b5cb.png.

1. Αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngδεν είναι συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/75d2593b1bca434cfb15f73523a9b5cb.png, τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/75d2593b1bca434cfb15f73523a9b5cb.png
2. Αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/75d2593b1bca434cfb15f73523a9b5cb.png, τότε:  
   Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/588c033baeeab351a59b234d8d9c33d4.pngυπολογίζουμε τον λόγο μεταβολής http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b39b049512fbcbe57c8dc7de056ee934.pngκαι στη συνέχεια εξετάζουμε αν το δεξιό πλευρικό όριο   
   του λόγου μεταβολής , δηλαδή το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ff3a1158be54bfdf1a8caf3292a37cb8.pngυπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.
   * Αν το όριο αυτό δεν υπάρχει ή είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3abc5b1e3663b5ab6a8c56b5cd11058b.png, τότε η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngδεν είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/75d2593b1bca434cfb15f73523a9b5cb.png.
   * Αν το όριο αυτό υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε συνεχίζουμε ως εξής:  
     Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/386a55a88a6da17835ec0d7c0001f980.pngυπολογίζουμε τον λόγο μεταβολής http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b39b049512fbcbe57c8dc7de056ee934.pngκαι στη συνέχεια εξετάζουμε αν το αριστερό πλευρικό όριο του λόγου μεταβολής, δηλαδή το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f883117e7843bec1927dbe4fb50c7db.pngυπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.   
     Σε περίπτωση που και το δεύτερο όριο είναι πραγματικός αριθμός, τότε εξετάζουμε αν τα δύο πλευρικά όρια είναι ίσα ή άνισα.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12**

Εκφώνηση  
  
Έστω οι συναρτήσεις http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be6c217c61c877e655980977308565bc.pngμε τύπους  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0e65f041978773caadba094a1629b5b8.pnghttp://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a8f44fffb57d798583038ce93b8105d2.png  
i. Να εξετάσετε αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/17f7e7aaa0bec82b07b1d620eb829f44.pngγια κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8bfd60f2c8265fb13321ba7b5465b70d.png.  
ii. Να εξετάσετε αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/91c9ba6747a83686f47f1dec155c39db.pngγια κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8bfd60f2c8265fb13321ba7b5465b70d.png.

Λύση  
  
i. Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a3f888c4c6e33e3824190ba1c6159cec.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8844b7cceb8d83404f9006a4b1ce7764.pngγια κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f46d12955f4c0a8eee43cc38acd6750.png.  
  
Εξετάζουμε αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/06cb4717b0ccefca776dd7000a51c7da.png.

Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f46d12955f4c0a8eee43cc38acd6750.pngέχουμε:  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b7cb16fc0dd7bbab651bac05aab2eb71.png  
οπότε  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f7e11b44ce5c226f65da990975c0b6ee.png  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7e3ed209d91ebbbcc39dc924dd07b438.pngέχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6b971d2332c514277d5b4f583c760eb9.png  
οπότε  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c79385f9ccb030ce802badb094c46e45.png  
  
Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο 0 με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8155da38daf3a6e85f2be32c3afae534.png.  
  
Έτσι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/42296e9a3745c8a8435857365b6ae835.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8844b7cceb8d83404f9006a4b1ce7764.pngγια κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8bfd60f2c8265fb13321ba7b5465b70d.png.  
  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be6c217c61c877e655980977308565bc.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a3f888c4c6e33e3824190ba1c6159cec.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7ff07c6ba22f892994a8e575335226f6.pngγια κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f46d12955f4c0a8eee43cc38acd6750.png.  
  
Εξετάζουμε αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be6c217c61c877e655980977308565bc.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/06cb4717b0ccefca776dd7000a51c7da.png.  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f46d12955f4c0a8eee43cc38acd6750.pngέχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/047d5e4a6b3e47651f983588c744362b.png  
οπότε  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2bdd20100923759874b31794b29697c2.png  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7e3ed209d91ebbbcc39dc924dd07b438.pngέχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5ebf2a7504353e17c9f129f634941621.png  
οπότε  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7c74c8608b756de0881b39f281433fc0.png  
  
Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be6c217c61c877e655980977308565bc.pngείναι παραγωγίσιμη στο 0 με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fccd9467aad14df34f7bdafb5c9d108b.png.  
  
Έτσι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be6c217c61c877e655980977308565bc.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/42296e9a3745c8a8435857365b6ae835.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7ff07c6ba22f892994a8e575335226f6.pngγια κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8bfd60f2c8265fb13321ba7b5465b70d.png.  
  
Επομένως ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/17f7e7aaa0bec82b07b1d620eb829f44.pngγια κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8bfd60f2c8265fb13321ba7b5465b70d.png.  
  
ii. Για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8bfd60f2c8265fb13321ba7b5465b70d.pngείναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/43a4c8545dff039b94fcaa8f03e695d1.png.   
Άρα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/385b292a6a26876c81b41e986643ebe4.pngγια κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e9ff9921423cb599e3b92caba52f8b49.png.  
Σχόλιο: Αν οι συναρτήσεις http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/28578af031523755437b3d01d8ad7bc0.pngείναι παραγωγίσιμες σ’ ένα διάστημα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/412b6a82e4f6059a97951d4bd141df74.png, ώστε  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/17f7e7aaa0bec82b07b1d620eb829f44.pngγια κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1f8edc1b90e2f45c93b12e8ce498cdbe.png  
δεν έπεται ότι  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/91c9ba6747a83686f47f1dec155c39db.pngγια κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1f8edc1b90e2f45c93b12e8ce498cdbe.png

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13**

Εκφώνηση  
  
Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων  
i. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c144b5e3bf61f5851adb3ef68ceccf53.png  
ii. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1bbf827a45beeb8e4e7c52058a7f6628.png  
iii. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f2aec9ec346cf1eca422f49cbcbc521.png  
iv. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9482ab9c7bf3517e137e24bbdaa6e663.png

Λύση  
  
i. Το πεδίο ορισμού της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7a73ba25b098ddc0a8fad852c336e6ca.pngείναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f2d47789640695db33cc0dc75e0aa443.png.  
Θέτουμε:  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c7d35ef99febed27e2d8ed730dd2bcce.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0c7602f01d5e14056397222bdb02b42b.png  
Είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/58d0ef529c95330e7cd8757d21554c09.png.  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be6c217c61c877e655980977308565bc.pngείναι παραγωγίσιμη με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/eecff9c18dee6960d32c057976c000cb.png.  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e7cfab43e78010a97094cedfb32f1a17.png.  
Έτσι θα είναι και η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7a73ba25b098ddc0a8fad852c336e6ca.pngπαραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f81436a1ad43919061459eb198256acb.pngii. Το πεδίο ορισμού της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7a73ba25b098ddc0a8fad852c336e6ca.pngείναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a0c24a7518703f0eb128f547a14e3f4b.png.  
Θέτουμε:  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7cc719f3d6b474e2deb55b6f820884e5.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c8161eedb9b832ca93cf36bfbb1109f2.png  
Είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/58d0ef529c95330e7cd8757d21554c09.png.  
  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be6c217c61c877e655980977308565bc.pngείναι παραγωγίσιμη σαν πολυωνυμική συνάρτηση με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/53e3b34d2a8540cc3193d1582c1eeed9.png.   
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/70ef5aa5ffbd408b07006aee7d0f195f.png.   
Έτσι θα είναι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7a73ba25b098ddc0a8fad852c336e6ca.pngπαραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με,  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/59fdb7549e6717419f343738e1e0ae38.png  
iii. Το πεδίο ορισμού της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7a73ba25b098ddc0a8fad852c336e6ca.pngείναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a0c24a7518703f0eb128f547a14e3f4b.png.  
Θέτουμε:  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/67b1b1273c3146b168e4012f86bbb7e7.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c5eb808c5c1bc58a5c97049afe376fc0.png  
Είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/58d0ef529c95330e7cd8757d21554c09.png  
  
Θέτουμε:  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a0eccebcd9d4d0bca063c1d5cc71df9a.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5bae88a351eb4ed14db825fbcda53512.png  
Είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e20d6b77f5cd6bc362f25515311ac67d.png  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/88139dad4db5b1cf7e39cac588b840ec.pngείναι παραγωγίσιμη με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cb495521238d1aab4241f73a2f74cef5.png.   
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fc476e7cd2095ed8974a770bc9ab922f.pngείναι παραγωγίσιμη με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/057e10770b272292ab4e8095c127ecd0.png.   
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be6c217c61c877e655980977308565bc.pngείναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5d58e74ff09fccbf2779fb436f434fa9.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3d73ecbc11170255e4e41c090c347f87.png  
Επίσης έχουμε ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ef19d7b3d02fed6164b909de5f0afdae.png.  
Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7a73ba25b098ddc0a8fad852c336e6ca.pngείναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/009054fb3b8484eb3747180388687301.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5d1fa483aea7053c052d665b1134db37.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/77f3afa9e187fe87c108ca76cd240c59.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4e0064a52ccd4c8f62fea749ddc722dc.png  
  
iv. Το πεδίο ορισμού της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7a73ba25b098ddc0a8fad852c336e6ca.pngείναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a0c24a7518703f0eb128f547a14e3f4b.png.  
Θέτουμε:  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1704feb3ecc4bb59bb841db3559cbe62.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b8407ff12eab23b787ce0e8194f5fdbe.png  
Είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/58d0ef529c95330e7cd8757d21554c09.png.  
  
Θέτουμε:  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7c2e3b6114083762b146198893184911.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7c9e425bc4e9122d99478fd56e4dd00d.png  
Είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e20d6b77f5cd6bc362f25515311ac67d.png  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/88139dad4db5b1cf7e39cac588b840ec.pngείναι παραγωγίσιμη σαν άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8340946dba9184f2bc60227ff41b2e83.png  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fc476e7cd2095ed8974a770bc9ab922f.pngείναι παραγωγίσιμη με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/893edb790dd50f695a85cb4ecd891ea9.png.   
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be6c217c61c877e655980977308565bc.pngείναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d7b8722d93f62d33eb14b34d6ddf7f0a.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f0d839d472c7f3b4ef986a23c8f2c179.pnghttp://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1533e4372751af711df66cef198ef2c1.png  
Επίσης έχουμε ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη με  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/33079f697176044637a6fd28f6ccc3a6.png  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7a73ba25b098ddc0a8fad852c336e6ca.pngείναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/08638d26ffb4822e4f65d7d8c14b9ca0.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e8df9eedaa3a7b0dd6b3f2cd0516ba31.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ead82db9110ecb9f72e36cb62b1e8117.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cb030fae8eb16ad6f723114132305c30.png

Μεθοδολογία  
  
Έστω οι συναρτήσεις http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4ee42a8fd56228cda78e7d9c5a655903.pngώστε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/58d0ef529c95330e7cd8757d21554c09.png.  
Αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/28578af031523755437b3d01d8ad7bc0.pngείναι παραγωγίσιμες τότε η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7a73ba25b098ddc0a8fad852c336e6ca.pngείναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7925abb60e9814ce8931981c279ecc20.png, για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/099efd9887d74e22d3d1983a3eebd650.png

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14**

Εκφώνηση  
  
Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος των συναρτήσεων  
  
i. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/eac48e4457e6812aa01efcb76f962d3e.png.  
  
ii. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7ae93e5a08aa786e09d3147d73a6e3d1.png.

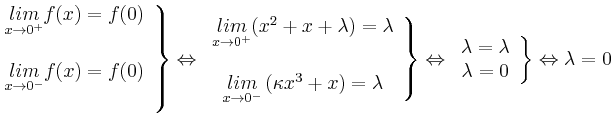
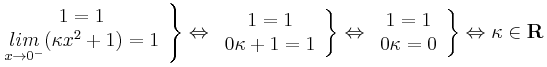
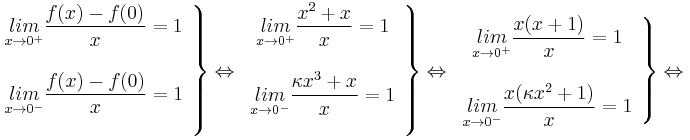
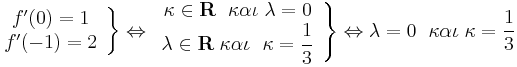
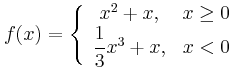
Λύση  
  
i. Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8cd3404cde7ec33f22fdacc146d82a9a.pngσαν πολυωνυμική με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c19238b6566a9a71ec982a7f1428fdde.png.  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5e625725a705eb2e2df63cd3c0b703e7.pngσαν πολυωνυμική με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b8f460b1ed74b788e4605dafb1186a82.png.  
  
Εξετάζουμε αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/37705de0752d1027f8fc3b3f390c448d.png.  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/df24611b961afa58392671ff9910ea33.pngέχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b96f4fbe3d029a976c2d609f2e1a6a62.png  
  
οπότε  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/daf172d1b6d2c71b525eca80b434f9e8.png  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aeb2a768285cf51a6423f01cc5152f3c.pngέχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4de16a45eb934d9246f2022093d5007f.png  
  
οπότε  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c6839a50f2de0a3fd1e8191454e3e304.png  
  
άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/37705de0752d1027f8fc3b3f390c448d.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/10742f7cea69171580651f913f921037.png.  
  
Έτσι η παράγωγος της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9d568a005a14828b5b7da6d9a577f949.png  
  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3cc36f2771bda32ce82dbb290d491d15.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8cd3404cde7ec33f22fdacc146d82a9a.pngσαν πολυωνυμική με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2f3f1bdcc4e113f08a1038c4d82335d5.png.  
  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3cc36f2771bda32ce82dbb290d491d15.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5e625725a705eb2e2df63cd3c0b703e7.pngσαν πολυωνυμική με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e70f9b3c94d36eae372da979e98899b.png.  
  
Εξετάζουμε αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3cc36f2771bda32ce82dbb290d491d15.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/37705de0752d1027f8fc3b3f390c448d.png.  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/df24611b961afa58392671ff9910ea33.pngέχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1203dd07928b7f919e9f57a129b8a997.png  
  
οπότε  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/17cd2861e9bdbc4d8962119d11f579ca.png  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aeb2a768285cf51a6423f01cc5152f3c.pngέχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6d3df7d5569cb3de3b900eb07ccd720d.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/74b6fa3af7792286120c924d62c671c2.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d72b145fa4de16c08b4048e3d47bf8aa.png  
  
οπότε  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d6d0dae12655dc6cbd2a251bea13f806.png  
  
Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngδεν είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο 1.  
  
Επομένως η δεύτερη παράγωγος της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngέχει τύπο:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a3ecdd970d2bf8db91571c4793f483d1.png  
  
ii. Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bae771eff52e72d2a399d7cb068f1aba.pngως πολυωνυμική, με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/75f169d78fbf71560eed2f85954a27a2.png.  
  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7f90b7674b54b3f419a04c05c72e5606.pngως πολυωνυμική, με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8ffa54882cdf75cd0ce791dcec309503.png.  
  
Εξετάζουμε αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/06cb4717b0ccefca776dd7000a51c7da.png.   
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f46d12955f4c0a8eee43cc38acd6750.pngέχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0deed68c84d53d42208b02260c9a95f1.png  
  
οπότε  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6499e0c133b08eef8b3cf8f67715630f.png  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7e3ed209d91ebbbcc39dc924dd07b438.pngέχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b7cb16fc0dd7bbab651bac05aab2eb71.png  
  
οπότε  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bda3ff56c05fceb459b055d084712b0f.png  
  
Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο 0.  
  
Επομένως η παράγωγος της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bb7498786b716ae1d70963545fa56bd9.png  
  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3cc36f2771bda32ce82dbb290d491d15.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bae771eff52e72d2a399d7cb068f1aba.pngως πολυωνυμική, με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e740abebaf0770b55036a774728dc7b3.png.  
  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3cc36f2771bda32ce82dbb290d491d15.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7f90b7674b54b3f419a04c05c72e5606.pngως πολυωνυμική, με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e3992be948d1c12e74286947a965b062.png.  
  
Εξετάζουμε αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3cc36f2771bda32ce82dbb290d491d15.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/06cb4717b0ccefca776dd7000a51c7da.png.   
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f46d12955f4c0a8eee43cc38acd6750.pngέχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6655fc1cc7cd5a609c5a68c195d256cd.png  
  
οπότε  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8d6678cb0684040f02401d9e427bac17.png  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7e3ed209d91ebbbcc39dc924dd07b438.pngέχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/869b96dcc7a586e91e90317e6a89ff8d.png  
  
οπότε  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/43a1937634760187d735514e0bf0a478.png  
  
Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο 0 με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0a96268f0fe8ad0dab67711872d99b2f.png.  
  
Επομένως η δεύτερη παράγωγος της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6ae52a81203f3b0907441d2bd7784cff.png

Μεθοδολογία  
Για να ορίσουμε τις συναρτήσεις http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/909d0e3a3d9f53e7943dc6d3a6e5fa36.pngκ.ο.κ, προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού τους, ως εξής:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2dc125f1510e582cc90a6300ce16d9ea.pngη http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3bdf79cfcc0795979ee99908a088ce19.pngνα παραγωγίζεται στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9854c430f23cbdfd56dde9d0017c8f44.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/926ca75fdad477410d33b63b2dbfa2ab.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9fb2d44b794575abfe8d4cb385256de8.png.  
Ο τύπος της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b490036243286b87bc7dfcfedac848ea.pngπροσδιορίζεται από τη σχέση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/caf1c48f0433ec6c9eb59d7d672a26ab.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/926ca75fdad477410d33b63b2dbfa2ab.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9fb2d44b794575abfe8d4cb385256de8.png.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15**

Εκφώνηση  
  
Έστω η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngμε τύπο  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c9195a6aba921640c0f8007a1b96544f.png  
  
Να βρεθούν οι τιμές των http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d49e20ee8cfc75b90d6412e88c34a03d.pngώστε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c9a9fce9dd45129b54fe11124d6837ca.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ef9e9e2c8d8973ad0c51eb8e2d2da591.png.

Λύση

* Αφού http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngπαραγωγίσιμη στο 0 τότε η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngσυνεχής στο 0. Έτσι έχουμε:  
    
    
  Έτσι ο τύπος της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngγίνεται:  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/699a8d3a49bd536989862c55e958d0f0.png  
    
  Αφού η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngπαραγωγίζεται στο 0 με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c9a9fce9dd45129b54fe11124d6837ca.pngτότε έχουμε:  
    
  Άρα για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/76e0db3e77393a933d833ab20fd814b0.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d531239306a3d20d05162008e49ed69c.pngη http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο 0 με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c9a9fce9dd45129b54fe11124d6837ca.png.
* Για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d86187e23bba47a7e2ee3d4506a5488e.pngη http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5c5f67932d222dd39481db86f664e66c.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/04207107414dba3b0829e57c4e11b686.png.   
  Άρα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cdaca4e67f6cb77c50a618e55c3404ec.png.  
  Όμως http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/67f04e8bf158512196df590aa6770a9f.png.  
  Άρα για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/79e96923983c4f7546d7745275e5a062.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/42db6e6ca2c4576e0ca4eaecc74db904.pngη http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο -1 με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ef9e9e2c8d8973ad0c51eb8e2d2da591.png.  
  Έτσι έχουμε:  
  Επομένως ο τύπος της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngγίνεται:  
    
    
  Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngείναι παραγωγίσιμη στο 0 και στο -1, με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c9a9fce9dd45129b54fe11124d6837ca.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ef9e9e2c8d8973ad0c51eb8e2d2da591.png.

Μεθοδολογία  
  
Αν μας δίνεται μια συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.png, όπου ο τύπος της περιέχει μια παράμετρο (ή περισσότερες παραμέτρους), πρέπει να γνωρίζουμε ότι δεν πρόκειται για μια συνάρτηση, αλλά για μια οικογένεια συναρτήσεων, τόσων συναρτήσεων όσες είναι οι τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος (αντίστοιχα οι παράμετροι).  
Έτσι όταν ζητούνται οι τιμές της παραμέτρου (αντίστοιχα των παραμέτρων) ώστε η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngνα έχει κάποια ιδιότητα, αναζητούμε την συνάρτηση ή τις συναρτήσεις από την οικογένεια των συναρτήσεων που έχει την ιδιότητα αυτή.  
Με την υπόθεση ότι η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngικανοποιεί την ιδιότητα, βρίσκουμε τις τιμές της παραμέτρου ή των παραμέτρων. Αντικαθιστούμε τις τιμές της παραμέτρου ή των παραμέτρων στον τύπο της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngκαι επαληθεύουμε αν η προκύπτουσα συνάρτηση είναι η ζητούμενη.  
Έτσι αν μας δίνεται μια συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.png, όπου ο τύπος της περιέχει μια παράμετρο ή περισσότερες παραμέτρους και ζητείται να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου ή των παραμέτρων ώστε η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngνα παραγωγίζεται σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της ή να είναι παραγωγίσιμη, βρίσκουμε τις συναρτήσεις της οικογένειας των συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο συγκεκριμένο σημείο ή είναι συνεχείς. Από αυτές τις συναρτήσεις βρίσκουμε ποιες είναι παραγωγίσιμες στο συγκεκριμένο σημείο ή παραγωγίσιμες.

* + **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16**

Εκφώνηση  
  
Έστω μια παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.pngσυνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png, τέτοια ώστε για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/56140322cf5d319a84e8fbd6f32f357a.pngνα ισχύει:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8527bc0af8d3ea10217c5dff1f1e0271.png   **(1)**  
Να βρείτε:

1. την παράγωγο της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/71d6632eebc332f33ab4da83aed3c0a9.png.

ii. την εξίσωση της εφαπτομένης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1fd016b2cf4af2ad47235455c1ce7f3c.pngστο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/414f1f1a56f8962f31a9b689d819a321.png.

Λύση

* 1. Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της **(1)** έχουμε:  
       
     http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d5211da06b443c784d432d28b343830c.png  
     http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fd39d74b2c9dbdb88f14e5d7de9ba3e5.png  
     http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6707a49edc5c805b1377dfc77de069e6.png**(2)**, για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be28fb2f9e26976e330bb728dae915a6.png  
     Για x = 0 από την **(2)** παίρνουμε  
     http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/317d608d16d75b6504e6131f04d025ec.png
  + Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngστο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/414f1f1a56f8962f31a9b689d819a321.pngείναι η: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f5c4e91de6d16bdb135434c73d91883e.png   **(3)**  
    Η **(1)** για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e11729b0b65ecade3fc272548a3883fc.pngδίνει: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0fa4c77846c25a126e94e3ea9e020748.pngοπότε από την **(3)** έχουμε:  
    http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/378b9b227d335f88e4836e7ac6dd0b94.pngπου είναι και η ζητούμενη εφαπτομένη.

Μεθοδολογία  
Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngμιας παραγωγίσιμης συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.png σε ένα σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a3365ff3229cd75445cd7b8f9aea326c.png, βρίσκουμε την http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/84f1dc43e4380c311b84d22ae886e2df.pngκαι χρησιμοποιούμε τη σχέση: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/91e2d9f68c7071c155a4aa3e25fd7598.png.

* + **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17**

Εκφώνηση  
  
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9b8fb23aefe64980880a9c92c17944d0.png. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων στη γραφική παράσταση της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png, που διέρχονται από το σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ecbebb72dccaa922a4ae93ecc1509766.png.

Λύση  
  
Είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2cc797ea36c726dc6a185ef183a1d0f2.png, οπότε αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bb7fba34bcfa6f2b816c6de35c99f5e0.pngείναι το σημείο επαφής τότε έχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9573e66e0fc15fd124c6e617d2855a39.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/017c51266cdacbc86517161f5239cf25.png  
  
Η εξίσωση εφαπτομένης (ε) της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1fd016b2cf4af2ad47235455c1ce7f3c.pngστο Α είναι:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5cad5e4cc8a59898679452caac5eb75c.png   (1)  
Επειδή τώρα, η (ε) διέρχεται από το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ecbebb72dccaa922a4ae93ecc1509766.pngοι συντεταγμένες του επαληθεύουν την (1), οπότε η τελευταία για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e11729b0b65ecade3fc272548a3883fc.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5687b621ef29eb01e41fee6f62e69d40.pngδίνει:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/31a39dfdea973615016249b946481e16.pngή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cf28b387d58dfd09d9c3cd73b257da0b.png  
Για τις τιμές που προσδιορίσαμε, από την (1) έχουμε:

Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/71d6632eebc332f33ab4da83aed3c0a9.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5aae9cb7b4cf6a393debbcbec3790e45.png Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cf28b387d58dfd09d9c3cd73b257da0b.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9980f60792e2827d40f64a44fb470032.png

Μεθοδολογία  
  
Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngμιας παραγωγίσιμης συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.png από ένα σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d9b3fd5ca8d4e46f35b60d80ada47743.pngπου δεν ανήκει στη http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngχρησιμοποιούμε την εξίσωση: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5ebd67cb5f85afba865136daaf006aa1.png   (1)  
και προσδιορίζουμε το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngθέτοντας στην (1), http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b7daa04b66028e2523f7c74ec3ee106d.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f132de363b075b75bbbcbf7c3aff3ba6.png.

* + **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18**

Εκφώνηση  
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/068da6e84c99be827011069979c92a6c.png.  
Να βρείτε σε ποιο σημείο Α της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/24228862db8fc3eb45bae9cd050265e4.pngη εφαπτομένη:

1. Έχει συντελεστή διεύθυνσης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0724159bb947b0e92d85f31f864722c2.png.
2. Είναι παράλληλη στην ευθεία http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a705bb3d6ede6df9ea5576e586a16900.png.
3. Είναι κάθετη στη διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου των αξόνων.
4. Είναι παράλληλη στον x′x.
5. Σχηματίζει γωνία http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cda7f62220dfb4727117031386f4ff3f.pngμε τον x′x.

Σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/24228862db8fc3eb45bae9cd050265e4.pngστα σημεία επαφής.

Λύση  
  
Είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3f8b914b46f7c74833e588fd06cd3d6c.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be28fb2f9e26976e330bb728dae915a6.png, οπότε αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bb7fba34bcfa6f2b816c6de35c99f5e0.pngείναι το σημείο επαφής της εφαπτομένης και της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/24228862db8fc3eb45bae9cd050265e4.png, ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/24228862db8fc3eb45bae9cd050265e4.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b39de096886da096136777793d2f0af.pngείναι:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/31fe8be524144af9f972874298396037.png

Επομένως:

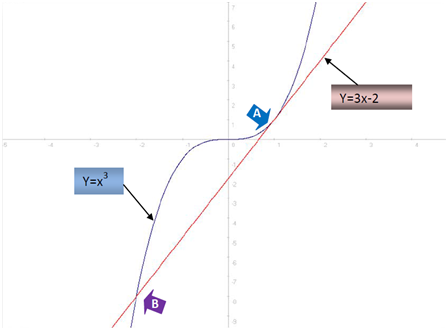
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/544b1c499d1b69af25e245e0a647cc8c.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a43652335af878b66e6a254eb9b90a3a.png  
Δηλαδή το σημείο επαφής είναι το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f5d59e5f59ebb8c24acaf49e02a4ddc.png, και η εξίσωση της εφαπτομένης στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b39de096886da096136777793d2f0af.pngείναι η:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/111a88be5154d8843bab7974e9fbe4a5.png.

1. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/589c5c943beb3f8e4bdf91480f144109.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/dfb2f259ad5db505bc8c35d4cc5bf228.png.  
   Δηλαδή το σημείο επαφής είναι το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/41a7336855c6cc0326c86f7bb0e1a714.png, και η εξίσωση της εφαπτομένης στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b39de096886da096136777793d2f0af.pngείναι η:  
   http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d8bf3f15bb0c6c4f105db21849bff21d.png.
2. Η διχοτόμος του 1ου και 3ου τεταρτημορίου είναι η ευθεία http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0202704944b14baea4ac51ef6b5da6fc.pngοπότε η εφαπτομένη (ε) είναι κάθετη στην (ζ) όταν και μόνο όταν:  
     
   http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9e27156f34f6b4c2074a2aaee4b2b6fd.png  
     
   http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9c0aecc271d7059930b836ef0fbd2c4b.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/07a6c9294c80992677fad07ba987d6b5.png.  
   Δηλαδή το σημείο επαφής είναι το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5832b1f1c62495a8e2494c84a324b286.png, και η εξίσωση της εφαπτομένης στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b39de096886da096136777793d2f0af.pngείναι η: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1805ddd69a971409c67838a968a48aa7.png.
3. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/34ab504605f403524fcb656baaaa6969.pngκαι  
   http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/97aa497eed69e576f8e6fffed27be2f5.png.  
   Δηλαδή το σημείο επαφής είναι το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1d8cb3fc2f2cddbc2d415ad53b85c891.pngκαι η εξίσωση της εφαπτομένης στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b39de096886da096136777793d2f0af.png είναι η: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/945b2cf453fa86c3eb455737e0f43c92.png.
4. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1c17ae0c3b77297b79a66a65284d701e.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/07a6c9294c80992677fad07ba987d6b5.png  
   Δηλαδή το σημείο επαφής είναι το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5832b1f1c62495a8e2494c84a324b286.png, και η εξίσωση της εφαπτομένης στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b39de096886da096136777793d2f0af.pngείναι η: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1805ddd69a971409c67838a968a48aa7.png.

Μεθοδολογία  
Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngσε ένα σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a3365ff3229cd75445cd7b8f9aea326c.png, μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png, η οποία έχει μια ειδική θέση (παράλληλη, κάθετη, κτλ.) προσδιορίζουμε το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngαπό τη συνθήκη που ικανοποιεί ο συντελεστής διεύθυνσης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d6197c34f7ac8aa7e91922c036d2ac57.png.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 19**

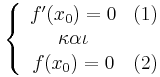
Εκφώνηση  
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b5e07b20f2279940667f56e484c09ded.png.  
Α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/225f3a2fe079ad32fe361267934ba48e.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fb4cfe23692dae1b9437307cdc8a3a63.png.  
Β) Να βρεθούν τα κοινά σημεία της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/225f3a2fe079ad32fe361267934ba48e.pngμε την εφαπτομένη της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/225f3a2fe079ad32fe361267934ba48e.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fb4cfe23692dae1b9437307cdc8a3a63.png.

Λύση  
Α) Επειδή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/89d0ddd5332327d7781eca2240c9bef1.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/344c9d30393280eb6c6fba9142d735f8.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ec83a7f45ea65530ebc1d0fd56ab5952.pngη εξίσωση της εφαπτομένης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/225f3a2fe079ad32fe361267934ba48e.pngστο σημείο της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d469a6dfb6c71d8d0d8d8bba4b8990dd.png, είναι:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/43f456cdcbfd52eb19488b0314cb1875.pngΒ) Τα κοινά σημεία της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/225f3a2fe079ad32fe361267934ba48e.pngμε την εφαπτομένη της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/225f3a2fe079ad32fe361267934ba48e.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1634e4aa64e799c15a4f6fa2494e955a.pngπροσδιορίζονται από τη λύση της εξίσωσης: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/98d4785d40cc3793629a0e407487835e.png   **(1)**  
Από το ερώτημα (Α) μια λύση της **(1)** είναι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1634e4aa64e799c15a4f6fa2494e955a.png.  
Για την εύρεση των άλλων λύσεων της **(1)**, εργαζόμενοι κατά τα γνωστά με το σχήμα Horner παίρνουμε:  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aea3ab1e2e363254ef84f4c97f2fe87a.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f82b41663320a7c02318804adda04a7c.png.  
Επομένως τα ζητούμενα σημεία είναι τα: Α(1,1) και Β(-2,-8).  
  


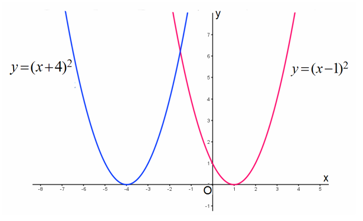
Μεθοδολογία  
Για να βρούμε τα κοινά σημεία της εφαπτομένης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngσε ένα σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b36846b1bec01ee5e8bdb70c12815b6c.png, μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png, με την http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.png, λύνουμε την εξίσωση: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3524f489ae85b2d78f39bed95a606c9a.png.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 20**

Εκφώνηση  
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bc688e50c90bc7e9276b6b4093b58007.png. Να βρείτε τις τιμές του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c78f6d0f108bd13554e62804d0790f42.pngγια τις οποίες η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον άξονα x′x.

Λύση  
H http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.png είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a3c246d92d1dbf8fe298cd6645d8dfeb.pngοπότε η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngεφάπτεται στον άξονα x′x όταν και μόνο όταν:  
  
  
  
Είναι:

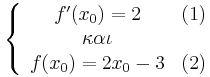
* + (1)  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7350e6d1e8d7070424a9a316fc3962b5.png  (3)
  + (2)  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b21be712bb93d7613c6dd01e12222dae.png  
      
    http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/072eb30ff3b43680c73f215051394157.pnghttp://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8f0a4347ee169d2cf2e1a3f54fde8d23.png, άρα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/889a8c77476727cb7a9d15b66400c787.png, οπότε: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/45b6eabea17764b6e519f8c712a69966.pngή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/603b5e2d26371a24295bf70f8c010665.png

Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngεφάπτεται στον x′x για τις τιμές: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/45b6eabea17764b6e519f8c712a69966.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/603b5e2d26371a24295bf70f8c010665.png.  
Οι γραφικές παραστάσεις της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png για τις τιμές τουκ που υπολογίσαμε φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:  


Μεθοδολογία  
Για να εφάπτεται η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngστον x′x στο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a3365ff3229cd75445cd7b8f9aea326c.pngόπου η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.png είναι παραγωγίσιμη, πρέπει:  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8f4ea2d6e5e64d80a919d0946c7a489b.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d67b6348bbc2c949f7209726fd84d5d0.png

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21**

Εκφώνηση  
Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f416c5cb8f38f44dd351f9249cd344e.pngεφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/da489b0a5390b0e754740c7f021d3f9b.png.

Λύση  
  
H http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.png είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a0c0b89cfc038a6b22033c66e7f12b50.png, οπότε η ευθεία (ε) εφάπτεται στην http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngστο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a3365ff3229cd75445cd7b8f9aea326c.pngόταν και μόνο όταν:  
  
  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e53fa3bf052d64464464cb134d6394b7.pnghttp://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/00432b4ddfc195d0bf9239af567e3e7c.png  
Άρα η ευθεία (ε) εφάπτεται στη γραφική παράσταση της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.png στο σημείο Α(-1,-5).

Μεθοδολογία  
Για να εφάπτεται η ευθεία http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8ef64fb47efd8135b283dbb0eb631fbd.pngστην http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngμιας παραγωγίσιμης συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a77a9d2ded5fbe14e92b6684832887d4.pngστο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a3365ff3229cd75445cd7b8f9aea326c.pngπρέπει οι εξισώσεις:  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cf8808b60c9e2bd02a00bc9d97f69ead.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/372119e95af31f155a8563cec3dd4b8e.pngνα έχουν κοινή λύση.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22**

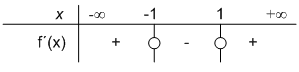
Εκφώνηση  
Δίνεται η συνάρτηση: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4f8de9c8e6ac4555df7178aae5a23a7e.png.   
  
i. Να αποδείξετε ότι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/71d6632eebc332f33ab4da83aed3c0a9.png.   
  
ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngστο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/67b3160d4191584e716584257c07bdf1.png.   
  
iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngστο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f6bd210144f08847f266419bca229a80.png.

Λύση  
i. Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/71d6632eebc332f33ab4da83aed3c0a9.png, αφού http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/31b793dd1101cd16e357303dffdc467b.png.   
Θα εξετάσουμε αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/71d6632eebc332f33ab4da83aed3c0a9.png.   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/897808e01bba94b832e206d2c4d2d8bb.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d4b5e8c32fc9d0629d3cc3f350092cb4.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/15a507e6a07df0fd742e8dc16c3846e4.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/137d1291294ce02b57754d1559de888d.png  
Άρα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/117711fec6274027d7afbbb914bccb5c.png.   
ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/67b3160d4191584e716584257c07bdf1.pngδίνεται από τον τύπο:   
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b61e2754931fe8f7909949f9e22763a0.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d8bda979855a6d5384184466bacf2013.png.   
iii. Το σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f6bd210144f08847f266419bca229a80.pngανήκει στον πρώτο κλάδο της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.png, οπότε για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9095c292773d0ec387c454840855fd47.pngέχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7be04f1e1226e11363546fc5f3570849.png, με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b7dcb42d0d6c88063a5d6e780704cd9.pngέτσι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a0dd9140c698245200945545d6954334.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6e0b096795b24f2015d260eb10bf3250.png.   
Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f6bd210144f08847f266419bca229a80.pngείναι:   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/58281863733835d7e24396134e65e027.png

Μεθοδολογία  
Όταν έχουμε συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδιπλού τύπου και θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.png, στο οποίο αλλάζει τύπο, εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα της μόνο με τον ορισμό της παραγώγου στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.png.   
Αφού βρούμε την http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6963ebf8ca0e396164c0ff2793e9339e.png, χρησιμοποιούμε τον τύπο της εφαπτομένης:   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bf22235e40a2b2430ec10d962c0b27cb.png.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23**

Εκφώνηση  
  
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a68ad405462257d1d151377b58eee411.png.  
  
α) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png ως προς http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c5ebbf97ec2ddee340ce732126a670c.png στο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ed579823cc48cf48766dd90708865685.png.  
  
β) Για ποιες τιμές του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c5ebbf97ec2ddee340ce732126a670c.png ο ρυθμός μεταβολής της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png ως προς http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c5ebbf97ec2ddee340ce732126a670c.png είναι θετικός και για ποιες αρνητικός;  
  
γ) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c5d2a2ab531b8b3ed562047e4ef63583.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f4ab3c96f8877e9f3a412f487dc5d666.pngως προς http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c5ebbf97ec2ddee340ce732126a670c.png στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/496b66e132f2b66ac1d13785d3611b34.png.

Λύση  
α) Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png είναι παραγωγίσιμη με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/336ed93844cd3a2e08f6f21019a6f826.png,οπότε ο ρυθμός μεταβολής της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png ως προς http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c5ebbf97ec2ddee340ce732126a670c.png στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ed579823cc48cf48766dd90708865685.png θα είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/744d81a92d3fa972141c55cb9f4f7bfd.png.  
  
β) το πρόσημο της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/eddf5e0243f416d728861a58c36d9ef5.pngφαίνεται στον παρακάτω πίνακα.  
  
  
  
Άρα για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bc0a324261529fa5ba68db088dfde828.pngo ρυθμός μεταβολής είναι θετικός.  
  
Ενώ για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/94498a6d0dc1b05ddc5ddb1e6a0ad452.pngo ρυθμός μεταβολής είναι αρνητικός .  
  
γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fdcd62ac12357b574e43177995fa146c.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ea2e50740b78c552ccec9a8322a6aae6.pngείναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/336ed93844cd3a2e08f6f21019a6f826.png.   
Τότε ο ρυθμός μεταβολής της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/eddf5e0243f416d728861a58c36d9ef5.pngως προς http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c5ebbf97ec2ddee340ce732126a670c.png θα ισούται με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6980b39f1e303aa02aa9802d73d0cfde.png.   
Άρα ο ρυθμός μεταβολής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bed4e95ad746cede9b29a1ce0bd1f9d2.pngθα είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/98c7ab1ed46de09dc899fe85a20fd1b4.png.

Μεθοδολογία  
Αν αναζητούμε το ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png, με τύπο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2a775720013b90949953db1f0b8c8beb.png, ως προς http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c5ebbf97ec2ddee340ce732126a670c.png στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a4dbe85be3748dd293626e82fa781093.pngαρκεί να υπολογίσουμε το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1fcc3ddf4821f6425d65fead359f40a8.png.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24**

Εκφώνηση  
  
Μια εταιρία εκτιμά ότι το κόστος παραγωγής http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c5ebbf97ec2ddee340ce732126a670c.png μονάδων ενός από τα προϊόντα της δίνεται από τη σχέση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/915ef58ea1d4a4a4f4df060268fd076a.pngευρώ, ενώ η τιμή πώλησης από την συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6a3e8a2d0474fec92b1486ff7e7abad8.pngευρώ. Nα βρείτε το οριακό κέρδος για πώληση 15 μονάδων του προϊόντος.

Λύση  
Η συνάρτηση που συνδέει το κέρδος http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/26ac99baf405f378717596eecc8ac783.png,το κόστος http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a2780cb6b8ff6ef086d4025893f4b654.pngκαι τις πωλήσεις http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2bd657d27e14d83868a7aa77cff27af7.pngείναι: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7862af530f2c3d77c47852752fec8f5c.png(1)   
Παραγωγίζοντας τη (1) θα πάρουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c35c6d4d9dfa7b881507770fb85ee4b6.png(2)  
  
Όπου http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/66167d3139d9e88093309257fbcebdc2.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9afe7eda4d246385759952e20abd8d11.png  
  
Τότε η (2) θα δώσει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/00090fc1f81202dfb5e00cef7736279a.png.   
To οριακό κέρδος για πώληση 15 μονάδων του προϊόντος ισούται με το ρυθμό μεταβολής του κέρδους για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3a0b1f04508b899593d4757bb3ced6b5.pngάρα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d0d439ba5248e3a3291f39860b3989ea.pngμονάδες/μονάδα παραγωγής

Μεθοδολογία  
Σε προβλήματα της οικονομίας εκφράζουμε το κόστος http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a2780cb6b8ff6ef086d4025893f4b654.png, το κέρδος http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/26ac99baf405f378717596eecc8ac783.pngκαι την είσπραξη http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2bd657d27e14d83868a7aa77cff27af7.pngμέσω του τύπου http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/96f9cd0c3150cd347379d5d2c47deed9.pngκαι παραγωγίζοντας τα δυο μέλη της παραπάνω εξίσωσης εμφανίζουμε τους αντίστοιχους ρυθμούς μεταβολής.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 25**

Εκφώνηση  
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.pngμε τύπο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/691b674c85fc1d603302a3e27027c711.png.   
  
α. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a692d2e730b1ee6be40f44ad488a5652.png.  
β. Να υπολογίσετε το όριο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/22d577201efdab7c809e837ee035f704.png.

Λύση  
α. Έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/691b674c85fc1d603302a3e27027c711.png, με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/200c813aa35f69f397e231ab70655619.pngοπότε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aef0e3b82a003f95dbd6be123d2642bc.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/60684243b3e6069353ae45016ae05f83.png, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a692d2e730b1ee6be40f44ad488a5652.pngείναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1a1211130e9ebcd2bb22893c98729af4.png.  
  
β. Παρατηρούμε ότι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8ac29d7d3d7968aeb2bdb61abcb1543e.png, επομένως http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ae08a1daeb33f520615ea042fe6f24b7.png.

Μεθοδολογία  
Αν δύο μεταβλητά μεγέθη http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fa800cbe3f8a3a7888766a436243ce4d.pngσυνδέονται με τη σχέση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2a775720013b90949953db1f0b8c8beb.png, όταν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.pngείναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.png, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/db5b03412096cc319683894f69bca2d4.pngως προς το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f6ad5d21eaa32e5b71fa58df6050314c.pngστο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82d64244251dff713f72d1712cacc9c0.pngτην παράγωγο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/857f6e1ab98714d44c67b1293dbc0264.png.

Αφού μελετήσουμε πολύ καλά **τη Θεωρία** και **τα παραπάνω Παραδείγματα,** ας προσπαθήσουμε τώρα να λύσουμε τις ακόλουθες **Ασκήσεις**:

* **ΑΣΚΗΣΗ 1**

Εκφώνηση  
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fad5258ae13c5e3c1b3373213821b96.png. Να εξετάσετε αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαραγωγίζεται στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e748797b9f70f14eeba3e0e4e31dbcb0.png.

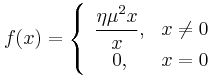
* **ΑΣΚΗΣΗ 2**

Εκφώνηση  
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/36b726b7cc48b8971f09202eda117538.png.  
  
Να αποδείξετε ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαραγωγίζεται στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e748797b9f70f14eeba3e0e4e31dbcb0.pngκαι να βρείτε την http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/504444077fbbfa698523e5a78fc303c7.png.

* **ΑΣΚΗΣΗ 3**

Εκφώνηση  
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/31dd0f31cd2e0225c3620bff39b10a8c.png.  
Να εξετάσετε αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαραγωγίζεται στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f0ec1d844da2f01f5360aaf2be471ca.png.

* **ΑΣΚΗΣΗ 4**

Εκφώνηση  
  
Δίνεται η συνάρτηση .  
  
Να αποδείξετε ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαραγωγίζεται στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f0ec1d844da2f01f5360aaf2be471ca.pngκαι να βρείτε την http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6d86a78e3371f77f588e2877f411b576.png.

* **ΑΣΚΗΣΗ 5**

Εκφώνηση

Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:  
  
α) http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a66b687773a2d3b851d4adbc9ccd702e.png.  
  
β) http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9a6b5867be221dd1be1cf483939b6ec0.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/73af9ef8449e7811cb5c555850a89c29.png.  
  
γ) http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/969496961f48864da378109ba746a810.png.

* **ΑΣΚΗΣΗ 6**

Εκφώνηση  
  
Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:   
  
α) http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ebddeafc492fa755e6ea5833be59c0c0.png.  
  
β) http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/07cf75c90b32563e712d0fa6d38ceb67.png.

* **ΑΣΚΗΣΗ 7**

Εκφώνηση  
  
Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:  
  
α) http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/faf7b4bd3dca7010a00dfba879d3eb67.png.  
β) http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/90f68c3f9b8ce53022d0c3b033fd9819.png.

* **ΑΣΚΗΣΗ 8**

Εκφώνηση  
  
Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:  
  
i. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f83b7e8106beb2a8a39fc12cae048593.png  
  
ii. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d448e2f9831b3f1e210fe66cf2fa7999.png  
  
iii. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7452cb13f54c8c9042dbffbf536ecc26.png  
  
iv. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ed44fa8865c2a4e6ba05d2834ea8dcf5.png  
  
v. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/394ae8faac966cd1549862fef5b80645.png  
  
vi. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ef41cf81b3b97a12ae78ee5586d08725.png

* **ΑΣΚΗΣΗ 9**

Εκφώνηση

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/623dc6849f64557538d009cd36366479.png, η οποία διέρχεται από το σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/23453e5e712a439fe36e01bacf3e048e.png.

* **ΑΣΚΗΣΗ 10**

Εκφώνηση

Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8a1349956243417186c469359ed56514.png.   
Να βρείτε σε ποιο σημείο της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngη εφαπτομένη:   
i. Έχει συντελεστή διεύθυνσης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/42f6539bfca1b27a6186a42b932a580a.png.   
ii. Είναι παράλληλη στον άξονα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e99a491910a27ecec7c3f234dc2dedf5.png.   
iii. Τέμνει τον άξονα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e99a491910a27ecec7c3f234dc2dedf5.pngυπό γωνία http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/994a2e1200d91268ac3bacb58a5a20b6.png.   
iv. Είναι κάθετη στην ευθεία http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/86c383f2b1ff2c8dfddefec9e6770aa6.png.   
v. Είναι παράλληλη στη διχοτόμο του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b00196597208eabea68f2e80956549b6.pngκαι του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bbd6972c65fd36b523a2c9bfbd9fbd7f.pngτεταρτημορίου των αξόνων.

Σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngστο σημείο επαφής.

* **ΑΣΚΗΣΗ 11**

Εκφώνηση  
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.pngμε τύπο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/691b674c85fc1d603302a3e27027c711.png.   
  
α. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a692d2e730b1ee6be40f44ad488a5652.png.  
β. Να υπολογίσετε το όριο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/22d577201efdab7c809e837ee035f704.png.

* **ΑΣΚΗΣΗ 12**

Εκφώνηση  
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.pngμε τύπο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b684aac264e7c1b8d2cb3f9bb589e12c.png.   
α. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e225b9063147bc654b732eb61ef3c975.png.  
β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e9ee323f1660c1cb87fba808dcfb7663.png.

Κλείνοντας λοιπόν το σημερινό μας μάθημα, πρέπει στη συνέχεια **να μελετήσουμε πολύ καλά τη Θεωρία και τα παραπάνω Παραδείγματα** και **να προσπαθήσουμε να λύσουμε τις Ασκήσεις**.

Περιμένω **πάντα** να επικοινωνήσετε μαζί μου στο e-mail: [tzanetatos@sch.gr](mailto:tzanetatos@sch.gr), στέλνοντάς μου τις ερωτήσεις σας και ενημερώνοντάς με για την πρόοδο της μελέτης σας.

**Θυμηθείτε ότι ουσιαστικά δεν είμαστε σε διακοπές !!!**

**Να είστε καλά και να προσέχετε !!!**

Ο καθηγητής σας των Μαθηματικών

Γεράσιμος Τζανετάτος

\*\*\* Η Θεωρία, τα Παραδείγματα και οι Ασκήσεις για λύση προέρχονται από τον ιστότοπο [www.study4exams.gr](http://www.study4exams.gr) .