**Γεια σας και χαρά σας και πάλι καλά μου παιδιά !!!**

Καταρχάς ελπίζω ότι και στη σημερινή μας επικοινωνία βρίσκω, εσάς και τις οικογένειές σας, καλά, δυνατούς και γεμάτος αισιοδοξία.

Παρόλο που είναι μεσημέρι Κυριακής, όπως βλέπετε αγαπημένοι μου μαθητές και αγαπημένες μου μαθήτριες, δεν σας έχω ξεχάσει. Πώς θα μπορούσε άλλωστε να συμβεί «κάτι τέτοιο»... . Πάμε λοιπόν και πάλι, πιστεύω με πολλή «όρεξη» από την πλευρά σας, στα «δικά μας» !!!

Ξεκινώντας λοιπόν, ας δούμε τις λύσεις των ασκήσεων 1, 2 και 3 επάνω στο δευτεροβάθμιο τριώνυμο, τις οποίες είχαμε για λύση από το προηγούμενο μάθημα.

Όσοι από σας έχετε ασχοληθεί με τις ασκήσεις αυτές, να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με τις λύσεις και, αν χρειάζεται, να κάνετε τις αναγκαίες διορθώσεις. Όσοι πάλι δεν μπορέσατε να ασχοληθείτε, να μελετήσετε τις λύσεις και στη συνέχεια να προσπαθήσετε και μόνοι σας να λύσετε τις ασκήσεις. Σε κάθε περίπτωση περιμένω ερωτήσεις και απορίες σας στο e-mail tzanetatos@sch.gr.

Είχαμε λοιπόν από το προηγούμενο μάθημα τις εξής **ασκήσεις**:

**1)** Να παραγοντοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

**i)**  3x2+5x–2 , **ii**) x2–x+1 , **iii**) 3x2–2x+4 ,

**iv**) 3α2–2αβ–β2 , όπου α ≠ 0 , **v)** x2–(α+β)x+αβ, όπου α, β ≠ 0 και α ≠ −β.

**Λύση**

**i)** Το 3x2+5x–2 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = 52−4∙3∙(−2) = 25+24 = 49 > 0, άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες

ρίζες x1,2 = = 

οπότε παραγοντοποιείται ως εξής:

3x2+5x–2 = 3(x−x1)(x−x2) = 3(x−(−2)) = 3(x+2) .

Παρατήρηση

Η παράσταση 3(x+2) μπορεί «περνώντας το 3 μέσα στην παρένθεση με το κλάσμα» να γραφτεί και ως εξής:

3(x+2) = (x+2) = (x+2) = (3x−1)(x+2)

και επομένως το τριώνυμο 2x2−x−15 γράφεται και ως εξής:

3x2+5x–2 = (3x−1)(x+2)

**ii)** Το x2–x+1 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = (−1)2−4∙∙1 = 1 − 1 = 0, άρα έχει μία διπλή πραγματική ρίζα

x0 = =  =  = 2, οπότε παραγοντοποιείται ως εξής:

x2–x+1 = (x−x0)2 = (x−2)2

Παρατήρηση

Η παράσταση (x−2)2 μπορεί «περνώντας το  μέσα στην παρένθεση ως , αφού η παρένθεση είναι υψωμένη στο τετράγωνο» να γραφτεί και ως εξής:

(x−2)2 =  = = 

και επομένως το τριώνυμο x2–x+1 γράφεται και ως εξής:

x2–x+1 = 

**iii)** Το 3x2–2x+4 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = (−2)2−4∙3∙4 = 4−48 = −44 < 0, οπότε ουσιαστικά δεν παραγοντοποιείται.

**iv)** Το3α2–2αβ–β2 γράφεται ως εξής: 3α2+(−2β)α+(−β2)

Τώρα το 3α2+(−2β)α+(−β2) είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς α με διακρίνουσα Δ = (−2β)2−4∙3∙(−β2) = 4β2+12β2 = 16β2 > 0, άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες

α1,2 = = 

οπότε παραγοντοποιείται ως εξής:

3α2+(−2β)α+(−β2) = 3(α−α1)(α−α2) = 3(α−β) = 3(α−β) 

3α2–2αβ–β2 = 3(α−β).

**v)** Το x2–(α+β)x+αβ είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = [−(α+β)]2−4∙1∙αβ=(α+β)2−4αβ=α2+β2+2αβ−4αβ=α2+β2−2αβ=(α−β)2 > 0, άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες

x1,2 = = 

οπότε παραγοντοποιείται ως εξής:

x2–(α+β)x+αβ = 1∙(x−x1)(x−x2) = (x−α)(x−β) .

Παρατήρηση: Η παραγοντοποίηση γίνεται ευκολότερα ως εξής:

Το x2–(α+β)x+αβ είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x.

Σύμφωνα με τη θεωρία των τύπων Vieta, αν το τριώνυμο αυτό έχει πραγματικές ρίζες, τότε αυτές θα είναι οι δύο αυτοί αριθμοί, που έχουν:

άθροισμα S = −= α+β και γινόμενο P =  = αβ .

Προφανώς οι δύο αυτοί αριθμοί είναι o x1 = α και ο x2 = β.

Οπότε το τριώνυμο x2–(α+β)x+αβ παραγοντοποιείται ως εξής:

x2–(α+β)x+αβ = 1∙(x−x1)(x−x2) = (x−α)(x−β).

**2)** Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

**i**)  , **ii**) 

**Λύση**

**i**)

● Ο αριθμητής x2−6x+5 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα Δ = (−6)2−4∙1∙5= 36−20 = 16 > 0, άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες x1,2 = =  ,

οπότε παραγοντοποιείται ως εξής: x2−6x+5 = 1(x−x1)(x−x2) = (x−5)(x−1)

x2−6x+5= (x−5)(x−1) (1)

● Ο παρονομαστής x2−4x+3 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα Δ1 = (−4)2−4∙1∙3= 16−12 = 4 > 0, άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες x3,4 = =  ,

οπότε παραγοντοποιείται ως εξής: x2−4x+3 = 1(x−x3)(x−x4) = (x−3)(x−1) x2−4x+3 = (x−3)(x−1) (2)

Λόγω τώρα των (1) και (2) το κλάσμα γράφεται:

 =  = 

**ii)**

● Ο αριθμητής 4x2−14x+6 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα Δ = (−14)2−4∙4∙6= 196−96 = 100 > 0, άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες x1,2 = =  ,

οπότε παραγοντοποιείται ως εξής:

4x2−14x+6 = 4(x−x1)(x−x2) = 4(x−3)

4x2−14x+6 = 4(x−3) (1)

● Ο παρονομαστής 2x2−4x−6 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα Δ1 = (−4)2−4∙2∙(−6) = 16+48 = 64 > 0, άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες x3,4 = =  ,

οπότε παραγοντοποιείται ως εξής:

2x2−4x−6 = 2(x−x3)(x−x4) = 2(x−3)(x−(−1)) =2(x−3)(x+1) 

2x2−4x−6 = 2(x−3)(x+1) (2)

Λόγω τώρα των (1) και (2) το κλάσμα γράφεται:

 =  =  =  =  .

**3)** Για τις διάφορες τιμές του x∈r να βρεθεί το πρόσημο των τριωνύμων:

**i)**  –2x2+5x–3 , **ii)** x2–11x–26 , **iii)**  x2–6x+9 , **iv)** −x2+2x−3

**Λύση**

**i)** Το –2x2+5x–3 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = 52−4∙(–2)∙(−3) = 25−24 = 1 > 0, άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες

ρίζες x1,2 = = 

Αφού ο συντελεστής του x2 είναι το –2<0, το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:



|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **−∞**  **1**  **+∞** |
| **–2x2+5x–3** | **+**  **0**      **−**  **−**  **0** |

**ii)** Το x2−11x−26 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = (−11)2−4∙1∙(−26) = 121+104 = 225 > 0, άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες x1,2 = = 

Αφού ο συντελεστής του x2 είναι το 1>0, το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **−2**  **13**  **+∞**  **−∞** |
| **x2−11x−26** | **+**  **0**      **+**  **−**  **0** |

**iii)** Το x2–6x+9 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = (−6)2−4∙1∙9 = 36−36 = 0, άρα έχει μία διπλή πραγματική ρίζα

x0 = −=  = 3.

Αφού ο συντελεστής του x2 είναι το 1>0, το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **3**  **+∞**  **−∞** |
| **x2–6x+9** | **+**  **+**  **0** |

Παρατήρηση

Είναι: x2–6x+9 = x2− 2∙3x+32 = (x−3)2 ≥ 0 για κάθε x∈r.

**iv)** Το −x2+2x−3 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = 22−4∙(−1)∙(−3)= 4−12 = −8 < 0, άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Αφού ο συντελεστής του x2 είναι το −1<0, το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **+∞**  **−∞** |
| **−x2+2x−3** | **−** |

Στη συνέχεια ας δούμε κάποιες **λυμένες ασκήσεις** σχετικές με **τις δευτεροβάθμιες ανισώσεις** (και των οποίων η αρίθμηση είναι συνέχεια της αρίθμησης των λυμένων ασκήσεων του προηγούμενου μαθήματος που αφορούσε στο δευτεροβάθμιο τριώνυμο), για να θυμηθούμε τους τρόπους με τους οποίους εργαζόμαστε.

**4)** Να λυθούν οι ανισώσεις:

**i)** −x2+4x ≥ 3 , **ii)** 2x2−12x+10 > 0 , **iii)** 3x2 < 4x−1 , **iv)** −x2+11x−30 ≤ 0 ,

**v)** x2 ≥ 10x , **vi)** 2x2−6x < 0 , **vii)** −x2+5x−7 ≥ 0 , **viii)** 2x2−3x+6 > 0 ,

**ix)** x2+4x ≤−4, **x)** x2−14x+49 > 0 , **xi)** x2−10x < −25 , **xii)** −x2−6x−9 ≤ 0

**Μεθοδολογία**

**Οι δευτεροβάθμιες ανισώσεις** του τύπου αυτού λύνονται ως εξής:

Μεταφέρουμε (αν χρειαστεί) στο πρώτο μέλος της ανίσωσηςτο περιεχόμενο του δεύτερου μέλους, ώστε στο δεύτερο μέλος να έχουμε 0, και στη συνέχεια μελετάμε το πρόσημο των τιμών του δευτεροβάθμιου τριωνύμου που έχει σχηματιστεί στο πρώτο μέλος της ανίσωσης, εφαρμόζοντας την αντίστοιχη θεωρία και κατασκευάζοντας τον σχετικό πίνακα. Από τον πίνακα αυτό προκύπτει το συμπέρασμα για τις λύσεις της ανίσωσης (αν βέβαια αυτή λύνεται).

**Λύση**

**i)** −x2+4x ≥ 3 −x2+4x–3 ≥ 0 (1)

Το −x2+4x–3 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = 42−4∙(−1)∙(−3) = 16−12 = 4 > 0, άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες

ρίζες x1,2 = = 

Αφού ο συντελεστής του x2 είναι το −1<0, το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **1**  **3**  **+∞**  **−∞** |
| **−x2+4x–3** | **+**  **0**      **−**  **−**  **0** |

Από τον πίνακα τώρα έχουμε ότι: (1) 1 ≤ x ≤ 3.

Άρα οι λύσεις της (1), επομένως και της δοσμένης ανίσωσης, είναι τα x:

1 ≤ x ≤ 3, δηλαδή τα x∈[1, 3] .

**ii)** 2x2−12x+10 > 0 2(x2−6x+5) > 0  x2−6x+5 > 0 (1)

(Βγάλαμε κοινό παράγοντα το 2 και στη συνέχεια το απαλείψαμε για να έχουμε λιγότερες πράξεις. Η φορά της ανίσωσης δεν άλλαξε διότι 2>0).

Το x2−6x+5 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = (−6)2−4∙1∙5 = 36−20 = 16 > 0, άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες

ρίζες x1,2 = = 

Αφού ο συντελεστής του x2 είναι το 1>0, το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **1**  **5**  **+∞**  **−∞** |
| **x2−6x+5** | **+**  **0**      **−**  **+**  **0** |

Από τον πίνακα τώρα έχουμε ότι: (1) (x < 1 ή x > 5).

Άρα οι λύσεις της (1), επομένως και της δοσμένης ανίσωσης, είναι τα x:

(x < 1 ή x > 5), δηλαδή τα x∈(−∞, 1)(5, +∞) .

**iii)** 3x2 < 4x−1 3x2−4x+1 < 0 (1)

Το 3x2−4x+1 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = (−4)2−4∙3∙1 = 16−12 = 4 > 0, άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες

ρίζες x1,2 = = 

Αφού ο συντελεστής του x2 είναι το 3>0, το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **1**  **+∞**  **−∞** |
| **3x2−4x+1** | **+**  **0**      **−**  **+**  **0** |

Από τον πίνακα τώρα έχουμε ότι: (1) **** < x < 1.

Άρα οι λύσεις της (1), επομένως και της δοσμένης ανίσωσης, είναι τα x:

**** < x < 1, δηλαδή τα x∈****.

**iv)** Το −x2+11x−30 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = 112−4∙(−1)∙(−30) = 121−120 = 1 > 0, άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες

ρίζες x1,2 = = 

Αφού ο συντελεστής του x2 είναι το −1<0, το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **5**  **6**  **+∞**  **−∞** |
| **−x2+11x−30** | **−**  **0**      **−**  **+**  **0** |

Από τον πίνακα τώρα έχουμε ότι: −x2+11x−30 ≤ 0 (x ≤ 5 ή x ≥ 6).

Άρα οι λύσεις της δοσμένης ανίσωσης είναι τα x:

(x ≤ 5 ή x ≥ 6), δηλαδή τα x∈(−∞, 5][6, +∞) .

**v)** x2 ≥ 10x  x2−10x ≥ 0 (1)

Το x2−10x είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x ελλιπούς μορφής (δεν έχει σταθερό όρο). Για να βρούμε τις ρίζες του δεν χρειάζεται να βρούμε τη διακρίνουσα, αλλά λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση εργαζόμενοι με παραγοντοποίηση ως εξής:

x2−10x = 0 x(x−10) = 0 (x = 0 ή x−10 = 0 x = 10)

Άρα το τριώνυμο x2−10x έχει τις πραγματικές και άνισες ρίζες 0 και 10 και αφού ο συντελεστής του x2 είναι το 1>0, το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **100**  **0**  **+∞**  **−∞** |
| **x2−10x** | **+**  **0**      **−**  **+**  **0** |

Από τον πίνακα τώρα έχουμε ότι: (1) (x ≤ 0 ή x ≥ 10).

Άρα οι λύσεις της (1), επομένως και της δοσμένης ανίσωσης, είναι τα x:

(x ≤ 0 ή x ≥ 10), δηλαδή τα x∈(−∞, 0][10, +∞) .

**vi)** 2x2−6x < 0 2(x2−3x) < 0  x2−3x < 0 (1)

Εργαζόμενοι τώρα με τον ίδιο τρόπο όπως στην **v)** έχουμε ότι:

x2−3x = 0 x(x−3) = 0 (x = 0 ή x−3 = 0 x = 3)

Άρα το τριώνυμο x2−3x έχει τις πραγματικές και άνισες ρίζες 0 και 3 και αφού ο συντελεστής του x2 είναι το 1>0, το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **3**  **0**  **+∞**  **−∞** |
| **x2−3x** | **+**  **0**      **−**  **+**  **0** |

Από τον πίνακα τώρα έχουμε ότι: (1) 0 < x < 3.

Άρα οι λύσεις της (1), επομένως και της δοσμένης ανίσωσης, είναι τα x:

0 < x < 3, δηλαδή τα x∈(0, 3).

**vii)** Το −x2+5x−7 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = 52−4∙(−1)∙(−7) = 25−28 = −3 < 0, άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες και αφού ο συντελεστής του x2 είναι το −1 < 0, το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **+∞**  **−∞** |
| **−x2+5x−7** | **−** |

Από τον πίνακα έχουμε ότι για κάθε x∈r ισχύει: −x2+5x−7 < 0.

Άρα η δοσμένη ανίσωση −x2+5x−7 ≥ 0 είναι αδύνατη.

**viii)** Το 2x2−3x+6 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = (−3)2−4∙2∙6 = 9−48 = −39 < 0, άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες και αφού ο συντελεστής του x2 είναι το 2 > 0, το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **+∞**  **−∞** |
| **2x2−3x+6** | **+** |

Από τον πίνακα έχουμε ότι για κάθε x∈r ισχύει: 2x2−3x+6 > 0.

Άρα η δοσμένη ανίσωση 2x2−3x+6 > 0 έχει ως λύσεις όλα τα x∈r.

**ix)** x2+4x ≤ −4  x2+4x+4 ≤ 0 (1)

Το x2+4x+4 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = 42−4∙1∙4 = 16−16 = 0, άρα έχει μία διπλή πραγματική ρίζα

x0 = −= − = −2.

Αφού ο συντελεστής του x2 είναι το 1>0, το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **−2**  **+∞**  **−∞** |
| **x2+4x+4** | **+**  **+**  **0** |

Από τον πίνακα έχουμε ότι για κάθε x∈r ισχύει:

x2+4x+4 ≥ 0 και x2+4x+4 = 0 x = −2.

Οπότε συμπεραίνουμε ότι: x2+4x+4 ≤ 0 x = −2.

Άρα η ανίσωση (1), επομένως και η δοσμένη ανίσωση x2+4x ≤ −4, έχει ως μοναδική λύση το −2.

Παρατήρηση

Είναι: x2+4x+4 = x2+2∙2x+22 = (x+2)2 ,

όπου για κάθε x∈r ισχύει: (x+2)2 ≥ 0 και (x+2)2 = 0 x+2 = 0 x = −2.

Άρα η ανίσωση (1), επομένως και η δοσμένη ανίσωση x2+4x ≤ −4, έχει ως μοναδική λύση το −2.

**x)** Το x2−14x+49 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = (−14)2−4∙1∙49 = 196−196 = 0, άρα έχει μία διπλή πραγματική ρίζα

x0 = −=  = 7.

Αφού ο συντελεστής του x2 είναι το 1>0, το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **7**  **+∞**  **−∞** |
| **x2−14x+49** | **+**  **+**  **0** |

Από τον πίνακα έχουμε ότι για κάθε x∈r ισχύει:

x2−14x+49 ≥ 0 και x2−14x+49 = 0 x = 7.

Άρα η δοσμένη ανίσωση x2−14x+49 > 0 έχει ως λύσεις όλα τα x∈r εκτός του 7, δηλαδή τα x: x∈(−∞, 7)(7, +∞) .

Παρατήρηση

Είναι: x2−14x+49 = x2−2∙7x+72 = (x−7)2 ,

όπου για κάθε x∈r ισχύει: (x−7)2 ≥ 0 και (x−7)2 = 0 x−7 = 0  x = 7.

Άρα οι λύσεις της δοσμένης ανίσωσης x2−14x+49 > 0 είναι όλα τα x∈r με x ≠ 7.

**xi)** x2−10x < −25 x2−10x+25 < 0 (1)

Το x2−10x+25 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = (−10)2−4∙1∙25 = 100−100 = 0, άρα έχει μία διπλή πραγματική ρίζα

x0 = −=  = 5.

Αφού ο συντελεστής του x2 είναι το 1>0, το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **5**  **+∞**  **−∞** |
| **x2−10x+25** | **+**  **+**  **0** |

Από τον πίνακα έχουμε ότι για κάθε x∈r ισχύει:

x2−10x+25 ≥ 0 και x2−10x+25 = 0 x = 5.

Άρα η ανίσωση (1), επομένως και η δοσμένη ανίσωση x2−10x < −25 είναι αδύνατη.

Παρατήρηση

Είναι: x2−10x+25 = x2−2∙5x+52 = (x−5)2 ,

όπου για κάθε x∈r ισχύει: (x−5)2 ≥ 0 και (x−5)2 = 0 x−5 = 0  x = 5.

Άρα η ανίσωση (1), επομένως και η δοσμένη ανίσωση x2−10x < −25 είναι αδύνατη.

**xii)** Το −x2−6x−9 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = (−6)2−4∙(−1)∙(−9) = 36−36 = 0, άρα έχει μία διπλή πραγματική ρίζα

x0 = −= − = −3.

Αφού ο συντελεστής του x2 είναι το −1<0, το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **−3**  **+∞**  **−∞** |
| **−x2−6x−9** | **−**  **−**  **0** |

Από τον πίνακα έχουμε ότι για κάθε x∈r ισχύει:

−x2−6x−9 ≤ 0 και −x2−6x−9 = 0 x = −3 .

Άρα η δοσμένη ανίσωση −x2−6x−9 ≤ 0 έχει ως λύσεις όλα τα x∈r .

Παρατήρηση

Είναι: −x2−6x−9 = −(x2+6x+9) = −(x2+2∙3x+32) = −(x+3)2 ,

όπου για κάθε x∈r ισχύει: (x+3)2 ≥ 0 και (x+3)2 = 0 x+3 = 0  x = −3,

άρα για κάθε x∈r ισχύει: −(x+3)2 ≤ 0 και −(x+3)2 = 0 x+3 = 0  x = −3

Επομένως η δοσμένη ανίσωση −x2−6x−9 ≤ 0 έχει ως λύσεις όλα τα x∈r .

**5)** Να λυθούν οι ανισώσεις:

**i)** x2 < 16 , **ii)** −2x2 ≤ −18 , **iii)** x2−4 ≤ 0 , **iv)** 2x2−72 > 0 ,

**v)** x2+25 < 0 , **vi)** x2+49 ≥ 0 , **vii)** −x2−81 ≥ 0 , **viii)** x2+100 > 0

**Μεθοδολογία**

**Οι δευτεροβάθμιες ανισώσεις** του τύπου αυτού, ενώ μπορούν να λυθούν με τη γενική μεθοδολογία που είδαμε στην προηγούμενη άσκηση, λύνονται (αν βέβαια αυτό είναι δυνατό) πολύ πιο εύκολα με τους τρόπους που θα δούμε παρακάτω:

**Λύση**

**i)** x2 < 16 <  < 4  (από ιδιότητα απολύτων τιμών)

−4 < x < 4 .

Άρα οι λύσεις της δοσμένης ανίσωσης x2 < 16 είναι τα x∈(−4, 4) .

**ii)** −2x2 ≤ −18 x2 ≥ x2 ≥ 9 ≥ ≥ 3 

(από ιδιότητα απολύτων τιμών)

( x ≤ −3 ή x ≥ 3 ) .

Άρα οι λύσεις της δοσμένης ανίσωσης −2x2 ≤ −18 είναι τα x∈(−∞, −3] [3, +∞) .

**iii)** x2−4 ≤ 0 x2 ≤ 4 ≤≤ 2  (από ιδιότητα απολύτων τιμών)

−2 ≤ x ≤ 2 .

Άρα οι λύσεις της δοσμένης ανίσωσης x2−4 ≤ 0 είναι τα x∈[−2, 2] .

**iv)** 2x2−72 > 0 2x2 > 72 x2 >  x2 > 36 > > 6 (από ιδιότητα απολύτων τιμών)

( x < −6 ή x > 6 ) .

Άρα οι λύσεις της δοσμένης ανίσωσης 2x2−72 > 0 είναι τα x∈(−∞, −6)(6, +∞) .

**v)** Για κάθε x∈r ισχύει: x2+25 > 0 ( και μάλιστα x2+25 ≥ 25 )

Άρα η δοσμένη ανίσωση x2+25 < 0 είναι αδύνατη.

**vi)** Για κάθε x∈r ισχύει: x2+49 > 0 ( και μάλιστα x2+49 ≥ 49 )

Άρα η δοσμένη ανίσωση x2+49 ≥ 0 έχει ως λύσεις όλα τα x∈r .

**vii)** −x2−81 ≥ 0 −( x2+81) ≥ 0  x2+81 ≤ 0 (1)

Αλλά για κάθε x∈r ισχύει: x2+81 > 0 ( και μάλιστα x2+81 ≥ 81 )

Άρα η ανίσωση (1), επομένως και η δοσμένη ανίσωση −x2−81 ≥ 0 είναι αδύνατη.

**viii)** Για κάθε x∈r ισχύει: x2+100 > 0 ( και μάλιστα x2+100 ≥ 100 )

Άρα η δοσμένη ανίσωση x2+100 > 0 έχει ως λύσεις όλα τα x∈r .

**6)** Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:

−x2−x+2 ≤ 0 (1) και x2+2x−8 < 0 (2)

**Λύση**

● Λύνουμε πρώτα την (1)

Το −x2−x+2 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = (−1)2−4∙(−1)∙2 = 1+8 = 9 > 0, άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες

ρίζες x1,2 = = 

Αφού ο συντελεστής του x2 είναι το −1<0, το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **−2**  **1**  **+∞**  **−∞** |
| **−x2−x+2** | **−**  **−**  **0**      **+**  **0** |

Από τον πίνακα τώρα έχουμε ότι: −x2−x+2 ≤ 0 (x ≤ −2 ή x ≥ 1).

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης (1) είναι τα x:

(x ≤ −2 ή x ≥ 1), δηλαδή τα x∈(−∞, −2] [1, +∞) **(Α)**.

● Λύνουμε στη συνέχεια την (2)

Το x2+2x–8 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ1 = 22−4∙1∙(−8) = 4+32 = 36 > 0, άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες

ρίζες x3,4 = = 

Αφού ο συντελεστής του x2 είναι το 1>0, το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **2**  **−4**  **+∞**  **−∞** |
| **x2+2x–8** | **+**  **0**      **−**  **+**  **0** |

Από τον πίνακα τώρα έχουμε ότι: x2+2x–8 < 0 −4 < x < 2.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης (2) είναι τα x:

−4 < x < 2, δηλαδή τα x∈(−4, 2) **(B)** .

Για να βρούμε τώρα τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) συναληθεύουμε τις συνθήκες των λύσεών τους.

Η συνθήκη των λύσεων της (1) σύμφωνα με την **(Α)** είναι: (x ≤ −2 ή x ≥ 1)

Η συνθήκη των λύσεων της (2) σύμφωνα με την **(B)** είναι: −4 < x < 2

Έχουμε λοιπόν ότι:

  

(−4 < x ≤ −2 ) ή (1 ≤ x < 2 )

Επομένως οι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) είναι τα x:

(−4 < x ≤ −2 ) ή (1 ≤ x < 2 ) , δηλαδή τα x∈(−4, −2] [1, 2) .

**7)** Να δειχθεί ότι η εξίσωση x2–(3λ–1)x+λ2–1=0 (1) έχει ρίζες άνισες για κάθε λ∈r .

**Λύση**

Η (1) είναι δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x με διακρίνουσα

Δ = [−(3λ−1)]2−4∙1∙( λ2–1) = (3λ−1)2−4λ2+4 = (3λ)2−2∙3λ+12−4λ2+4 =

= 9λ2−6λ+1−4λ2+4 = 5λ2−6λ+5  Δ = 5λ2−6λ+5.

Η διακρίνουσα τώρα Δ = 5λ2−6λ+5 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς λ με διακρίνουσα Δ1 = (−6)2−4∙5∙5 = 36−100 = −64 < 0, άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες και αφού ο συντελεστής του λ2 είναι το 5 > 0, το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **λ** | **+∞**  **−∞** |
| **5λ2−6λ+5** | **+** |

Από τον πίνακα έχουμε ότι για κάθε λ∈r ισχύει: 5λ2−6λ+5 > 0.

Αφού λοιπόν για κάθε λ∈r έχουμε ότι η διακρίνουσα Δ = 5λ2−6λ+5 της εξίσωσης (1) είναι θετική, συμπεραίνουμε ότι για κάθε λ∈r η εξίσωση (1) έχει ρίζες άνισες.

**8)** Για τις διάφορες τιμές του λ∈r, όπου λ ≠ 2, να βρεθεί το είδος των ριζών της παράστασης (λ–2)x2+(λ–2)x+1.

**Λύση**

Η παράσταση (λ–2)x2+(λ–2)x+1 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα

Δ = (λ−2) 2−4∙(λ−2)∙1 = λ2−4λ+4−4λ+8 = λ2−8λ+12  Δ = λ2−8λ+12.

Η διακρίνουσα τώρα Δ = λ2−8λ+12 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς λ με διακρίνουσα Δ1 = (−8)2−4∙1∙12 = 64−48 = 16 > 0, άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες λ1,2 = = 

Αφού ο συντελεστής του λ2 στη διακρίνουσα Δ= λ2−8λ+12 είναι το 1>0, το πρόσημό της φαίνεται στον πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| **λ** | **6**  **2**  **+∞**  **−∞** |
| **λ2−8λ+12** | **+**      **−**  **+**  **0** |

Τώρα από τον παραπάνω πίνακα προκύπτουν για το τριώνυμο:

(λ–2)x2+(λ–2)x+1

τα ακόλουθα συμπεράσματα:

● αν λ∈(−∞, 2), τότε η διακρίνουσά του Δ = λ2−8λ+12 είναι θετική, οπότε έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες

● αν λ∈(2, 6), τότε η διακρίνουσά του Δ = λ2−8λ+12 είναι αρνητική, οπότε δεν έχει πραγματικές ρίζες

● αν λ∈(6, +∞), τότε η διακρίνουσά του Δ = λ2−8λ+12 είναι θετική, οπότε έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες

● αν λ=6, τότε η διακρίνουσά του Δ = λ2−8λ+12 είναι ίση με 0, οπότε έχει μία διπλή πραγματική ρίζα.

Ας προσπαθήσουμε τώρα με τη βοήθεια και των λυμένων ασκήσεων να λύσουμε τις εξής **ασκήσεις** (και των οποίων η αρίθμηση είναι συνέχεια της αρίθμησης των λυμένων ασκήσεων του προηγούμενου μαθήματος που αφορούσε στο δευτεροβάθμιο τριώνυμο):

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**4)** Να λυθούν οι ανισώσεις:

**i)** 2x2+x–15 < 0 , **ii)** x2 < 25 , **iii)** 2x2+5 > 0 , **iv)** x2 ≥ 1 ,

**v)** x2+4x < 0 , **vi)** x2–x–2 > 0 , **vii)** x2+3x 4 , **viii)** –2x2+5x–3 0 ,



**ix)** x2–x+1 > 0 , **x)** x2+9 6x , **xi)** x2+4 > 4x , **xii)** x2 ≥ 3x



**5)** Να βρεθεί για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις:

x2–2x–3 > 0 και –x2+x+20 ≥ 0.

**6)** Για τις διάφορες τιμές του λ∈r, όπου λ ≠ 0, να βρεθεί το είδος των ριζών του τριωνύμου x2+λx+4. Για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο x2+λx+4 είναι πάντοτε θετικό;

…και κατά τα γνωστά, τις ερωτήσεις σας και τις λύσεις των Ασκήσεων από τις δευτεροβάθμιες ανισώσεις μπορείτε να τις στείλετε στο e-mail: tzanetatos@sch.gr

**Να είστε καλά και να προσέχετε !!!**

Ο καθηγητής σας της Άλγεβρας

Γεράσιμος Τζανετάτος

\*\*\* Οι εκφωνήσεις των ασκήσεων για λύση προέρχονται από τον ιστότοπο [plansmath.blogspot.com](http://www.study4exams.gr).