**Γεια σας και πάλι καλά μου παιδιά και καλό μήνα !!!**

Καταρχάς ελπίζω ότι και στη σημερινή μας επικοινωνία βρίσκω, εσάς και τις οικογένειές σας, καλά, δυνατούς και γεμάτος αισιοδοξία.

Όπως βλέπετε αγαπημένοι μου μαθητές και αγαπημένες μου μαθήτριες, δεν σας έχω ξεχάσει. Πώς θα μπορούσε άλλωστε να συμβεί «κάτι τέτοιο». . .. Πάμε λοιπόν και πάλι, πιστεύω με πολλή «όρεξη» από την πλευρά σας, στα «δικά μας» !!!

Ξεκινώντας το σημερινό μας μάθημα, ας κλείσουμε την παράγραφο της λογαριθμικής συνάρτησης βλέποντας τις λύσεις των Ασκήσεων 5 έως και 8 τις οποίες είχαμε για λύση από το προηγούμενο μάθημα.

Όσοι από σας έχετε ασχοληθεί με τις Ασκήσεις αυτές, να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με τις λύσεις και, αν χρειάζεται, να κάνετε τις αναγκαίες διορθώσεις. Όσοι πάλι δεν μπορέσατε να ασχοληθείτε, να μελετήσετε τις λύσεις των Ασκήσεων και να προσπαθήσετε και μόνοι σας να τις λύσετε. Σε κάθε περίπτωση περιμένω ερωτήσεις και απορίες σας στο e-mail tzanetatos@sch.gr.

Είχαμε λοιπόν από το προηγούμενο μάθημα τις εξής **ασκήσεις**:

**5.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

**i)** log(x + 1) + log(x − 1) = log2 , **ii)** log(x − 1) + logx = 1 − log5 ,

**iii)** log(x2 + 1) − logx = log2 **iv)** 5x = 21-x

**Λύση**

**i)** Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει: ( x+1 > 0 x > −1 και x−1 > 0 x > 1)x >1 .

Με τον περιορισμό αυτό και εφαρμόζοντας ιδιότητες λογαρίθμων η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

log[(x+1)∙(x–1)]=log2 log(x2−1)=log2 x2−1 = 2  x2 = 2+1  x2= 3

x = ή x = από τις οποίες δεκτή ως ρίζα της αρχικής εξίσωσης είναι η **x =** , αφού σύμφωνα με τον περιορισμό πρέπει x >1 .

**ii)** Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει: ( x−1 > 0 x > 1 και x > 0 )x >1 .

Με τον περιορισμό αυτό και εφαρμόζοντας ιδιότητες λογαρίθμων η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

log[(x−1)∙x]= log10 − log5  log(x2−x)=log  log(x2−x)=log2 x2−x = 2

x2−x–2=0 δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x με ρίζες 2 και −1, από τις οποίες δεκτή ως ρίζα της αρχικής εξίσωσης είναι η **x = 2**, αφού σύμφωνα με τον περιορισμό πρέπει x >1 .

**iii)** Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει: x >0 (αφού x2+1>0 για κάθε x∈r).

Με τον περιορισμό αυτό και εφαρμόζοντας ιδιότητες λογαρίθμων η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

log= log2  = 2  x2 + 1 = 2x  x2 − 2x + 1= 0 (x−1)2 = 0 

**x = 1** διπλή ρίζα, η οποία είναι δεκτή ως ρίζα της αρχικής εξίσωσης, αφού σύμφωνα με τον περιορισμό πρέπει x >0.

**iv)** Η εξίσωση ορίζεται για κάθε x∈r και, επειδή τα δύο μέλη της είναι θετικά, ισοδύναμα γράφεται: log5x = log21-x . Εφαρμόζοντας τώρα ιδιότητες λογαρίθμων η εξίσωση αυτή ισοδύναμα γράφεται:

x∙log5 = (1−x)∙log2x∙log5 = log2 − x∙log2 x∙log5+x∙log2 = log2

(log5+log2)x = log2(log(5∙2))x = log2 (log10)x = log2 1∙x = log2x = log2

**6.** Να λυθούν τα συστήματα:

**i)** , **ii)**

**Λύση**

**i)** Το σύστημα ορίζεται για x > 0 και y > 0. Με τους περιορισμούς αυτούς και εφαρμόζοντας ιδιότητα λογαρίθμων το σύστημα ισοδύναμα γράφεται:



Θέτοντας τώρα στην εξίσωση (1) όπου y το x2 από την (2) έχουμε ότι:

xx2 = 8 x3 = 8 x = 2 (3)

Θέτοντας τέλος στην εξίσωση (2) όπου x το 2 από την (3) έχουμε ότι: y = 22 y = 4

Επομένως η λύση του δοσμένου συστήματος είναι:

**ii)** Το σύστημα ορίζεται για x > 0 και y > 0. Με τους περιορισμούς αυτούς και εφαρμόζοντας ιδιότητες λογαρίθμων το σύστημα ισοδύναμα γράφεται:



Θέτοντας τώρα στην εξίσωση (2) όπου 2x το y από την (1) έχουμε ότι:

y2 = y  y2−y = 0y(y−1) = 0 

( y = 0 απορρίπτεται διότι πρέπει y > 0 ή y−1 = 0 y = 1 (3) δεκτή)

Θέτοντας τέλος στην εξίσωση (1) όπου y το 1 από την (3) έχουμε ότι:

1 = 2x 2x = 1x =  .

Επομένως η λύση του δοσμένου συστήματος είναι:

.

**7.** Να συγκριθούν οι αριθμοί:

**i)** log32   και   log35 , **ii)** log0,35   και   log0,37 , **iii)** log(x2 + 1)   και   log2x

**Λύση**

**i)** Οι log32 και log35 είναι οι τιμές της λογαριθμικής συνάρτησης f(x) = log3x αντίστοιχα για 2 και 5. Επειδή η λογαριθμική συνάρτηση f(x) = log3x είναι γνησίως

αύξουσα, αφού η βάση της είναι το 3 > 1, έχουμε ότι:

2 < 5 log32 < log35.

**ii)** Οι log0,35 και log0,37 είναι οι τιμές της λογαριθμικής συνάρτησης f(x) = log0,3x αντίστοιχα για 5 και 7. Επειδή η λογαριθμική συνάρτηση f(x) = log0,3x είναι γνησίως φθίνουσα, αφού η βάση της είναι το 0,3 < 1, έχουμε ότι:

5 < 7 log0,35 > log0,37.

**iii)** Πρέπει: x > 0. Με τον περιορισμό αυτό έχουμε ότι: x2 + 1 ≥ 2x ,

διότι: x2 + 1 ≥ 2x  x2 + 1 − 2x ≥ 0  ( x – 1)2 ≥ 0 το οποίο ισχύει για κάθε x ∈ r.

Οι log(x2+1) και log2x είναι οι τιμές της λογαριθμικής συνάρτησης f(x) = logx αντίστοιχα για x2 + 1 και  2x. Επειδή η λογαριθμική συνάρτηση f(x) = logx είναι γνησίως αύξουσα, αφού η βάση της είναι το 10 > 1, έχουμε ότι:

x2 + 1 ≥ 2x  log(x2+1) ≥ log2x .

**8.** Να λυθούν οι ανισώσεις:

**i)** logx2 > (logx)2 , **ii)** log(x2 − 4) < log3x , **iii)**  xlogx > 10

**Λύση**

**i**) Για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει: x > 0 .

Με τον περιορισμό αυτό και εφαρμόζοντας ιδιότητα λογαρίθμων έχουμε ότι:

logx2 > (logx)2  2logx > (logx)2 0 > (logx)2 – 2logx (logx)2 – 2logx < 0 (1)

Τώρα θέτουμε: logx = ω (2), οπότε η (1) λόγω της (2) ισοδύναμα γράφεται:

ω2 – 2ω < 0 . Το ω2 – 2ω είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς ω με ρίζες 0 και 2 και σύμφωνα με τη θεωρία για το πρόσημο του τριωνύμου από την Α’ Λυκείου έχουμε ότι: ω2 – ω < 0 0 < ω < 2 (διότι ο συντελεστής του ω2 είναι το 1>0).

Οπότε, αφού στην (2) έχουμε θέσει: logx = ω και βρήκαμε ότι: 0 < ω < 2, οι λύσεις της δοσμένης ανίσωσης είναι τα x: 0 < logx < 2 log1 < logx < log100. Από την τελευταία, αφού η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το 10 είναι γνησίως αύξουσα, ισοδύναμα έχουμε ότι: 1 < x <100.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα x ∈ (1, 100) .

**ii**) Για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει:

(x2 – 4>0  x2 >4 > 2( x < −2 ή x > 2 ) και

3x > 0x > 0) 

( ή )x > 2 (1).

Με τον περιορισμό αυτό και επειδή η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το 10 είναι γνησίως αύξουσα (διότι 10 > 1), έχουμε ότι:

log(x2 − 4) < log3x x2 − 4 < 3x x2 – 4 − 3x < 0  x2 – 3x − 4 < 0.

Το x2 – 3x – 4 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με ρίζες 4 και −1 και σύμφωνα με τη θεωρία για το πρόσημο του τριωνύμου από την Α’ Λυκείου έχουμε ότι:

x2 – 3x − 4 < 0−1 < x < 4 (2) (διότι ο συντελεστής του x2 είναι το 1>0).

Οι (1) και (2) συναληθεύουν για 2 < x < 4 .

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα x ∈ (2, 4).

**iii)** Η ανίσωση έχει έννοια για x > 0 και x ≠ 1.

Με τον περιορισμό αυτό και επειδή τα δύο μέλη της είναι θετικά και η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το 10 είναι γνησίως αύξουσα (διότι 10 > 1), η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται: logxlogx > log10. Εφαρμόζοντας τώρα ιδιότητες λογαρίθμων, η ανίσωση αυτή ισοδύναμα γράφεται:

(logx)(logx) >1(logx)2 > 1 > **|**logx**|** >1(logx < −1 ή logx > 1)

(logx < −log10 ή logx > log10)  (logx < log10−1 ή logx > log10) 

(διότι η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το 10 είναι γνησίως αύξουσα (αφού 10>1))

(x < 10−1 ή x > 10) (x < ή x > 10) .

Επειδή όμως από περιορισμό έχουμε ότι πρέπει x>0, συμπεραίνουμε ότι οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα x ∈(0, ) (10, +∞).

Αφήνοντας τώρα το 5ο Κεφάλαιο, το οποίο πιστεύω ότι βρήκατε αρκετά ενδιαφέρον, και το οποίο μας έδωσε την ευκαιρία να γνωρίσουμε τις βασικές έννοιες της εκθετικής συνάρτησης, των λογαρίθμων και της λογαριθμικής συνάρτησης, έννοιες τις οποίες θα συναντήσετε και θα χρησιμοποιήσετε του χρόνου τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Φυσική, θα σας πρότεινα πια να μπούμε … χαλαρά σε διαδικασία επαναλήψεων ξεκινώντας από το 4ο Κεφάλαιο, που αναφέρεται στα **Πολυώνυμα**, τη **Διαίρεση Πολυωνύμων** και τις **Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις**.

Στην κατεύθυνση αυτή, ως πρώτο βήμα ας θυμηθούμε συνοπτικά την αντίστοιχη θεωρία των **Πολυωνύμων**:

|  |
| --- |
| **Η έννοια του πολυωνύμου**  Έστω x μια **μεταβλητή** που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή.  ● Καλούμε **μονώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής αxν, όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός και ν ένας θετικός ακέραιος.  Μονώνυμο του x καλούμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.  Για παράδειγμα, οι παραστάσεις: 2x3, - 34x5, 0x4, 2x και οι αριθμοί 2, -3, 0 είναι μονώνυμα του x.  ●  Καλούμε **πολυώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής:  ανxν + αν-1xν-1 + … + α1x + α0,  όπου ν είναι ένας φυσικός αριθμός και α0, α1, …, αν είναι πραγματικοί αριθμοί.  Τα μονώνυμα ανxν, αν-1xν-1, …, α1x, α0 λέγονται **όροι** του πολυωνύμου και οι αριθμοί αν, αν-1, …, α1, α0 **συντελεστές** αυτού. Ειδικότερα ο α0 λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου.  Τα πολυώνυμα της μορφής α0, δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί, λέγονται **σταθερά πολυώνυμα.** Ειδικά το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο.**  Έτσι για παράδειγμα, οι παραστάσεις 3x3 + 2x2 - x + 2, 0x2 - 5x + 1, 5x3 - 23 x2 + 0x + 13 και οι αριθμοί 2, 0 κτλ. είναι πολυώνυμα του x. |

|  |
| --- |
| **Η ισότητα** μεταξύ δυο πολυωνύμων ορίζεται ως εξής:  **Δυο πολυώνυμα**  **αμxμ + … + α1x + α0       και       βνxν + … + β1x + β0,       με μ ≥ ν**  **θα λέμε ότι είναι ίσα όταν:**  **α0 = β0, α1 = β1, …, αν = βν       και       αν+1 = αν+2 = … = αμ = 0**  Για παράδειγμα τα πολυώνυμα 0x4 + 0x3 + 2x2 - x + 1 και 2x2 - x + 1 είναι ίσα. Επίσης τα πολυώνυμα αx2 + βx + γ και 2x + 3 είναι ίσα αν και μόνο αν γ = 3, β = 2 και α = 0.  Τα πολυώνυμα τα συμβολίζουμε συνήθως με P(x), Q(x), κτλ.  Έστω τώρα ένα πολυώνυμο P(x) = ανxν + αν-1xν-1 + … + α1x + α0  ●  Αν όλοι οι συντελεστές του είναι ίσοι με μηδέν, τότε το Ρ(x) είναι ίσο με το πολυώνυμο 0 (μηδενικό πολυώνυμο).  ●  Αν όμως ένας από τους συντελεστές του είναι διαφορετικός από το μηδέν, τότε το Ρ(x) παίρνει τη μορφή: αkxk + αk-1xk-1 + … + α1x + α0, με αk ≠ 0  Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός k λέγεται **βαθμός** του πολυωνύμου Ρ(x). **Είναι φανερό ότι κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0.**  **Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.**  Έτσι για παράδειγμα το πολυώνυμο P(x) = -4x3 + 3x - 7 είναι 3ου βαθμού, ενώ το Q(x) = 7 είναι μηδενικού βαθμού.  **Αριθμητική τιμή πολυωνύμου**  Έστω ένα πολυώνυμο P(x) = ανxν + αν-1xν-1 + … + α1x + α0.  Αν αντικαταστήσουμε το x με έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό ρ, τότε ο πραγματικός αριθμός P(ρ) = ανρν + αν-1ρν-1 + … + α1ρ + α0 που προκύπτει λέγεται **αριθμητική τιμή** ή απλά **τιμή** του πολυωνύμου για x = ρ.  Αν είναι **Ρ(ρ) = 0,** τότε ο ρ λέγεται **ρίζα** του πολυωνύμου. Για παράδειγμα,  η τιμή του πολυωνύμου P(x) = -x3 + 2x2+4x + 1,  για x = 1 είναι P(1) = -13 + 2·12 + 4·1 + 1 = 6, ενώ  για x = -1 είναι P(-1) = -(-1)3 + 2(-1)2 + 4(-1) + 1=0, που σημαίνει ότι ο -1 είναι ρίζα του πολυώνυμου Ρ(x).  Είναι φανερό ότι:  ●  Το σταθερό πολυώνυμο c έχει τιμή c για όλες τις τιμές του x και  ● Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x(∗)  (∗) Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι:  ● Αν ένα πολυώνυμο έχει τιμή c για όλες τις τιμές του x, τότε αυτό είναι το σταθερό πολυώνυμο c και  ● Αν δυο πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x, τότε τα πολυώνυμα αυτά είναι ίσα. |

|  |
| --- |
| **Πράξεις με πολυώνυμα**  Μπορούμε να προσθέσουμε, να αφαιρέσουμε, ή να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.  Για το βαθμό του αθροίσματος και του γινομένου δυο πολυωνύμων αποδεικνύεται ότι:  ●  Αν το άθροισμα δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο βαθμός του είναι ίσος ή μικρότερος από τον μέγιστο των βαθμών των δυο πολυωνύμων.  ●  Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών. |

Στη συνέχεια ας δούμε κάποιες **λυμένες ασκήσεις** επάνω στην παραπάνω θεωρία **των πολυωνύμων**:

**ΑΣΚΗΣΗ 1**

Έστω το πολυώνυμο Ρ(x)=x2+5x+7. Να βρείτε το α αν Ρ(α–1)=1.

**Λύση**

P(α–1)=1 ( Θέτουμε στο P(x)=x2+5x+7 στη θέση του x το α–1 )

(α−1)2+5(α−1)+7=1 α2−2α+1+5α−5+7−1=0 

α2+3α+2=0 δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς α με ρίζες −1 και −2.

**ΑΣΚΗΣΗ 2**

Να βρείτε τα α, β, γ, δ ώστε το πολυώνυμο

P(x)=(α–1)x3+(2β–α+1)x2+(α+β–γ)x+(2α+β–γ+δ) να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

**Λύση**

Το P(x)=(α–1)x3+(2β–α+1)x2+(α+β–γ)x+(2α+β–γ+δ) είναι το μηδενικό πολυώνυμο 0 αν και μόνο αν όλοι οι συντελεστές του (και ο σταθερός του όρος) είναι ίσοι με 0, δηλαδή: P(x) = 0 

Το σύστημα αυτό λύνεται πολύ εύκολα ως εξής:

Αρχικά: (1) α=1 (5)

Οπότε η (2) λόγω (5) ισοδύναμα γίνεται: (2) 2β−1+1=0 2β=0 β=0 (6)

Στη συνέχεια η (3) λόγω (5),(6) ισοδύναμα γίνεται: (3)1+0−γ=0−γ=−1γ=1 (7)

Τέλος η (4) λόγω (5), (6) και (7) ισοδύναμα γίνεται:

(4)2∙1+0−1+δ=0 2−1+δ=0 1+δ=0 δ=−1 (8)

**ΑΣΚΗΣΗ 3**

Να βρείτε το λ ώστε το πολυώνυμο Ρ(x)=(λ2+λ–6)x3+(λ2–4)x+3λ–1 να είναι σταθερό,

μη μηδενικό πολυώνυμο. Ποια είναι στην περίπτωση αυτή η τιμή του;

**Λύση**

Για να είναι το Ρ(x)=(λ2+λ–6)x3+(λ2–4)x+3λ–1 σταθερό, μη μηδενικό πολυώνυμο, πρέπει όλοι οι συντελεστές του εκτός από τον σταθερό του όρο να είναι ίσοι με 0, δηλαδή πρέπει:

Το σύστημα αυτό, το οποίο έχει μόνο άγνωστο το λ, λύνεται ως εξής:

1ος τρόπος

Η (1) είναι δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς λ με ρίζες 2 και −3.

Η (2) είναι δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς λ με ρίζες 2 και −2.

Άρα οι (1), (2) συναληθεύουν για λ=2.

Επίσης για λ=2 ισχύει η (3), αφού: 3∙2−1=6−1=5≠0.

Επομένως το πολυώνυμο Ρ(x) είναι σταθερό, μη μηδενικό πολυώνυμο αν λ=2.

2ος τρόπος

Λύνουμε την «πιο εύκολη εξίσωση από τις (1), (2)», π.χ. την (2), η οποία έχει ρίζες

2 και −2. Από αυτές μόνο η τιμή 2 επαληθεύει την (1).

Άρα οι (1), (2) συναληθεύουν για λ=2.

Επίσης για λ=2 ισχύει η (3), αφού: 3∙2−1=6−1=5≠0.

Επομένως το πολυώνυμο Ρ(x) είναι σταθερό, μη μηδενικό πολυώνυμο αν λ=2.

Η τιμή τώρα του πολυωνύμου P(x) για λ=2 είναι: Ρ(x)=0x+0x+3∙2−1=6−1=5.

**ΑΣΚΗΣΗ 4**

Να βρείτε για ποιες τιμές του α∈r τα πολυώνυμα:

P(x)=(α2−3α)x3+x2+α και Q(x)=−2x3+α2x2+(α3−1)x+1 είναι ίσα.

**Λύση**

Τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) είναι ίσα (**για κάθε x**), αν οι όροι του ίδιου βαθμού των δύο αυτών πολυωνύμων έχουν τον ίδιο συντελεστή και επιπλέον οι σταθεροί τους όροι είναι ίσοι.

Αρχικά το πολυώνυμο P(x) γίνεται πλήρες ως εξής: P(x)=(α2−3α)x3+1x2+0x+α.

Οπότε για να είναι P(x) = Q(x), πρέπει:

Το σύστημα αυτό, το οποίο έχει μόνο άγνωστο το α, λύνεται ως εξής:

1ος τρόπος

Ελέγχουμε αν η τιμή α=1 από την (4) επαληθεύει τις (1), (2) και (3). Έχουμε ότι:

● για την (1): 12−3∙1=1−3=−2, άρα η τιμή α=1 επαληθεύει την (1)

● για την (2): 12=1, άρα η τιμή α=1 επαληθεύει την (2)

● για την (3): 13−1=1−1=0, άρα η τιμή α=1 επαληθεύει και την (3)

Αφού λοιπόν η τιμή α=1 από την (4) επαληθεύει τις (1), (2) και (3), τα P(x) και Q(x) είναι ίσα για α=1.

2ος τρόπος

(1) α2−3α+2=0 δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς α με ρίζες 2 και 1

(2) α=1 ή α=−1

(3) α3=1α=1

Άρα οι (1), (2), (3) και (4) συναληθεύουν για α=1.

Επομένως τα P(x) και Q(x) είναι ίσα για α=1.

**ΑΣΚΗΣΗ 5**

Να αναλύσετε το κλάσμα  σε άθροισμα κλασμάτων.

**Λύση**

Αρχικά αναλύουμε τον παρονομαστή x2−5x+6 σε γινόμενο:

Το x2−5x+6 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με ρίζες 2 και 3, οπότε, όπως γνωρίζουμε από την Α΄ Λυκείου, παραγοντοποιείται ως εξής:

x2−5x+6=1∙(x−2)(x−3) = (x−2)(x−3)

Άρα το κλάσμα γράφεται: = , για κάθε x με x ≠ 2 και x ≠ 3.

Στη συνέχεια για x ≠ 2 και x ≠ 3 αναζητούμε δύο αριθμούς Α και Β ώστε: = ή  ****.

Επειδή τώρα τα κλάσματα είναι ίσα και έχουν ίσους παρονομαστές, θα έχουν και ίσους αριθμητές.

Άρα: 2x+1=(A+Β)x–3Α–2Β για κάθε x με x ≠ 2 και x ≠ 3.

Οπότε σύμφωνα με την ισότητα πολυωνύμων προκύπτει ότι:

Α+Β=2 (1) και –3Α–2Β=1 (2)

Το σύστημα τώρα των (1), (2) λύνεται εύκολα ως εξής:

(1) Α=2−B (3)

Αντικαθιστώντας τώρα στην (2) το Α με 2−Β από την (3) έχουμε ότι:

(2) –3(2−B)–2Β=1 –6+3B–2Β=1 Β=1+6 Β=7 (4)

Αντικαθιστώντας τέλος στην (3) το Β με 7 από την (4) έχουμε ότι:

Α=2−7 Α=−5 (5)

Η λύση λοιπόν του συστήματος των (1) , (2) δίνει: Α=–5 και Β=7.

Άρα: = για κάθε x με x ≠ 2 και x ≠ 3.

**ΑΣΚΗΣΗ 6**

Να βρείτε πολυώνυμο P(x) 2ου βαθμού τέτοιο ώστε: P(0)=3 και P(x)–P(x–1)=2x+1.

**Λύση**

Αφού το πολυώνυμο P(x) είναι 2ου βαθμού, θα είναι της μορφής:

P(x)=αx2+βx+γ (1) , όπου α, β, γ ∈ r με α≠0.

Αρχικά, αφού πρέπει: P(0)=3, από την (1) για x=0 έχουμε: 3=α∙02+β∙0+γ γ=3 (2)

Άρα λόγω της (2) η (1) γίνεται: P(x)=αx2+βx+3 (3)

Για να βρούμε τώρα το P(x–1), θέτουμε στην (3) όπου x το x–1, οπότε έχουμε:

P(x–1)=α(x–1)2+β(x–1)+3=α(x2–2x+1)+βx–β+3=αx2–2αx+α+βx–β+3 

P(x–1)=αx2–2αx+α+βx–β+3 (4)

Οπότε, αφού πρέπει: P(x)–P(x–1)=2x+1, λόγω των (3) και (4) έχουμε:

αx2+βx+3−(αx2–2αx+α+βx–β+3)=2x+1  αx2+βx+3−αx2+2αx−α−βx+β−3=2x+1 

2αx−α+β=2x+1 (ισότητα πολυωνύμων)

Λόγω των (5) και (6) η (3) γίνεται: P(x)= 1∙x2+2∙x+3  P(x)= x2+2x+3

**ΑΣΚΗΣΗ 7**

Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου P(x) =x2+(3λ–6)x+2λ+27 για τις διάφορες τιμές του λ∈r.

**Λύση**

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση:

≠02λ2−2∙λ≠02λ2−λ≠0λ(2−λ)≠0(λ≠0 και 2−λ≠0)

(λ≠0 και λ≠2)

Τότε, αφού ο συντελεστής του x2 είναι διάφορος από το 0, συνεπάγεται ότι το P(x) είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού.

2η περίπτωση: λ=0

Τότε αντικαθιστώντας στο P(x) το λ με 0 (και αφού για λ=0 ο συντελεστής του x2 είναι ίσος με 0), το P(x) γίνεται:

P(x)=0∙x2+(3∙0–6)x+2∙0+27=–6x+27 και είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού.

3η περίπτωση: λ=2

Τότε αντικαθιστώντας στο P(x) το λ με 2 (και αφού για λ=2 ο συντελεστής του x2 είναι ίσος με 0), το P(x) γίνεται:

P(x)=0∙x2+(3∙2–6)x+2∙2+27=0∙x+4+27=31 και είναι πολυώνυμο μηδενικού βαθμού.

**ΑΣΚΗΣΗ 8**

Να βρείτε τα λ, μ ώστε το πολυώνυμο P(x)=x3+λx2+(μ–2)x+6 να έχει ρίζες –1 και 2.

**Λύση**

●Για να έχει το P(x) ρίζα το –1, πρέπει: P(–1)=0(–1)3+λ∙(–1)2+(μ–2)∙( –1)+6=0

–1+λ−μ+2+6=0λ−μ+7=0 (1)

●Για να έχει το P(x) ρίζα το 2, πρέπει: P(2)=023+λ∙22+(μ–2)∙2+6=0

8+4λ+2μ–4+6=04λ+2μ+10=0 2(2λ+μ+5)=0 2λ+μ+5=0 (2)

Λύνουμε τώρα το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει η εξίσωση:

λ−μ+7+2λ+μ+5=0 3λ+12=0 3λ=−12 λ=− λ=−4 (3)

Από την (1) λόγω της (3) έχουμε: −4−μ+7=0 −μ+3=0 μ=3 (4)

**ΑΣΚΗΣΗ 9**

Δίνονται τα πολυώνυμα P(x)=(α2–3)x3+(β–2)x2+(3α–2β)x+α και Q(x)=2x3+αx2+9x+γ. Να βρείτε τα α, β, γ ώστε το πολυώνυμο P(x)+Q(x) να είναι μηδενικού βαθμού.

**Λύση**

Είναι: P(x)+Q(x)=

=(α2–3)x3+(β–2)x2+(3α–2β)x+α+2x3+αx2+9x+γ=

=(α2–3+2)x3+(β–2+α)x2+(3α–2β+9)x+α+γ=(α2–1)x3+(α+β–2)x2+(3α–2β+9)x+α+γ 

P(x)+Q(x)=(α2–1)x3+(α+β–2)x2+(3α–2β+9)x+α+γ

Οπότε για να είναι το πολυώνυμο P(x)+Q(x) μηδενικού βαθμού, δηλαδή για να είναι το πολυώνυμο P(x)+Q(x) σταθερό πολυώνυμο διαφορετικό του μηδενικού, πρέπει:

(Σ)

Το σύστημα (Σ) λύνεται τώρα ως εξής:

(1) α2=1 (α=1 ή α=−1)

Διακρίνουμε στη συνέχεια δύο περιπτώσεις:

●1η περίπτωση: α=1. Τότε:

Η (2) για α=1 γίνεται: (2) 1+β−2=0 β−1=0 β=1

Εξετάζουμε τώρα αν οι τιμές α=1 και β=1, που βρήκαμε παραπάνω, επαληθεύουν την (3). Αντικαθιστώντας λοιπόν στην (3) το α με 1 και το β με 1 έχουμε ότι:

3∙1−2∙1+9=3−2+9=10≠0 η (3) δεν επαληθεύεται για α=1 και β=1 

η τιμή α=1 απορρίπτεται.

●2η περίπτωση: α=−1. Τότε:

Η (2) για α=−1 γίνεται: (2) −1+β−2=0 β−3=0 β=3

Εξετάζουμε τώρα αν οι τιμές α=−1 και β=3, που βρήκαμε παραπάνω, επαληθεύουν την (3). Αντικαθιστώντας λοιπόν στην (3) το α με −1 και το β με 3 έχουμε ότι:

3∙(−1)−2∙3+9=−3−6+9=0 η (3) επαληθεύεται για α=−1 και β=3 

η τιμή α=−1 είναι δεκτή.

Έχουμε λοιπόν ότι: α=−1 και β=3 και

επιπλέον η σχέση (4) του (Σ) γίνεται: γ≠−α γ≠−(−1) γ≠1 .

Άρα το πολυώνυμο P(x)+Q(x) είναι μηδενικού βαθμού αν α=−1 και β=3 και γ≠1.

Με τη βοήθεια των παραπάνω λυμένων ασκήσεων, ας προσπαθήσουμε τώρα να λύσουμε τις εξής **ΑΣΚΗΣΕΙΣ**:

**1**. Αν P(x)=x2–5x+6 να βρείτε τo P(x–3)+P(x).

**2**. Να βρείτε πολυώνυμο P(x) ώστε: [P(x)]2= 4x2–12x+9

(Υπόδειξη: Το P(x) πρέπει να είναι πρώτου βαθμού, δηλ. της μορφής αx+β με α≠0)

**3**. Να βρείτε το λ ώστε το πολυώνυμο Ρ(x)=(λ2–1)x4+(λ2+λ–2)x2+λ2–4λ+3 να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

**4**. Δίνονται τα πολυώνυμα:

Ρ(x)=2x3+(λ3–1)x2+3x+λ2–4λ και Q(x)=(λ+1)x3+(λ–1)x2+(λ+2)x–3.

Να βρείτε τo λ ώστε να είναι ίσα.

**5**. Να βρείτε πολυώνυμο P(x) 2ου βαθμού έτσι ώστε: Ρ(0)=6, Ρ(2)=0 και Ρ(–1)=12.

**6**. Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου P(x)=(λ3–4λ)x3+(λ2–2λ)x2+(λ2–5λ+6)x+4λ+8 για τις διάφορες τιμές του λ.

**7**. Να βρείτε το λ ώστε το πολυώνυμο Ρ(x)=λ2x3+(–4λ–2λ2)x2+(3+8λ)x–6 να έχει ρίζα το 1.

**8**. Δίνονται τα πολυώνυμα:

P(x)=(α2–3)x3+(β–2)x2+(3α–2β)x+α και Q(x)=2x3+αx2+9x+β.

Να βρείτε τα α και β ώστε το πολυώνυμο P(x)+Q(x) να είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

… και κατά τα γνωστά, τις ερωτήσεις σας και τις λύσεις των Ασκήσεων μπορείτε να τις στείλετε στο e-mail: tzanetatos@sch.gr

**Να είστε καλά και να προσέχετε !!!**

Ο καθηγητής σας της Άλγεβρας

Γεράσιμος Τζανετάτος

\*\*\* Η περίληψη της Θεωρίας προέρχεται από το σχολικό βιβλίο, ενώ οι εκφωνήσεις των λυμένων Ασκήσεων και των Ασκήσεων για λύση προέρχονται από τον ιστότοπο [plansmath.blogspot.com](http://www.study4exams.gr).