**Γεια σας και χαρά σας και πάλι καλά μου παιδιά !!!**

Καταρχάς ελπίζω ότι και στη σημερινή μας επικοινωνία βρίσκω, εσάς και τις οικογένειές σας, καλά, δυνατούς και γεμάτος αισιοδοξία.

**Όπως βλέπετε δεν σας έχω ξεχάσει ! Άλλωστε να είστε βέβαιοι ότι αυτό δεν θα μπορούσε σε καμία περίπτωση να συμβεί ! Όμως** **εξακολουθώ, και στην επανάληψη την οποία έχουμε ξεκινήσει από το προηγούμενο μάθημα, εκτός από μια-δυο εξαιρέσεις, να μην έχω νέα σας σε σχέση με τα Μαθηματικά Προσανατολισμού. Οπότε επαναλαμβάνω ότι σας έχω «χάσει» ως Τμήμα και … να είστε βέβαιοι ότι μου έχετε λείψει και μάλιστα πολύ !!!**

**Πρέπει συνεπώς να κινητοποιηθούμε για να κερδίσουμε τον χαμένο χρόνο. Πάμε λοιπόν και πάλι, πιστεύω πια με «όρεξη» από την πλευρά σας, στα «δικά μας» !!!**

Ξεκινώντας το σημερινό μας μάθημα, ας δούμε τις λύσεις των ασκήσεων που είχαμε επάνω στις τρεις πρώτες παραγράφους των Διανυσμάτων. Όσοι από σας έχετε ασχοληθεί με τις ασκήσεις αυτές, να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με τις λύσεις και, αν χρειάζεται, να κάνετε τις αναγκαίες διορθώσεις. Όσοι πάλι δεν μπορέσατε να ασχοληθείτε, να μελετήσετε τις λύσεις και να προσπαθήσετε και μόνοι σας να τις λύσετε. Σε κάθε περίπτωση περιμένω τις απαντήσεις των ασκήσεων, ερωτήσεις και απορίες σας στο e-mail tzanetatos@sch.gr.

Είχαμε λοιπόν από το προηγούμενό μας μάθημα τις εξής ασκήσεις:

A

**1.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Να εξετάσετε αν είναι σωστές οι σχέσεις:

**i)**  και

Β

Γ

**ii)** 

**Απάντηση**

**i)** Προφανώς η σχέση  δεν είναι σωστή.

**ii)** Προφανώς η σχέση  είναι σωστή, αφού στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ τα μήκη των πλευρών του είναι ίσα.



**2.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς του ΒΓ.

**i)** Να υπολογίσετε τα αθροίσματα: , 

**ii)** Να συγκρίνετε τα  και 

**Λύση**

**i)** = , ==

**ii)** Είναι: = και =

Άρα: =

**3.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ονομάζουμε Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ.

**i)** Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

 , , 

, 

, , 

**ii)** Να συγκρίνετε τις διαφορές:

**α)**  και  **β)**  και  **γ)**  και 

**Λύση**

**i)** **=** , = , ==

**=**+=2 , ==

**=****=** , == , =+=

**ii)**

**α)** Είναι: = = = ή απευθείας =

 και: = = = ή απευθείας =

Επειδή τώρα είναι: =, συμπεραίνουμε ότι: =

**β)** Είναι: = ( όπως είδαμε στο **α)** )

 και: = = = ή απευθείας =

Συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα  και  είναι διαφορετικά.

**γ)** Είναι: = = = ή απευθείας =

 και: = = = ή απευθείας =

Συμπεραίνουμε ότι: =

**4.** Σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ να συγκρίνετε τα:

**i)**  και 

**ii)**  και 

**Λύση**

**i)** Είναι: = από τον κανόνα του παραλληλογράμμου

 και: = = = ή απευθείας =

Συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα  και  είναι διαφορετικά.

**ii)** Από το **i)** έχουμε ότι: = (1) και = (2)

Επειδή στο τετράγωνο οι διαγώνιοί του είναι ίσες, έχουμε ότι: = (3).

Οπότε από τις (1), (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι:

 = 

**5.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να δείξετε ότι 

**Λύση**

Εργαζόμενοι με τη μέθοδο των ισοδυναμιών έχουμε ότι:



 =

= , το οποίο ισχύει.

Άρα ισχύει και η αποδεικτέα.

Δ

Γ

B

A

**6.** Αν , να δείξετε ότι τα σημεία Α και Β συμπίπτουν.

**Λύση**

Εργαζόμαστε με τη μέθοδο του σημείου αναφοράς:

Επιλέγουμε ως σημείο αναφοράς το Α, οπότε η δοσμένη σχέση γράφεται:

 = = τα σημεία Α, Β συμπίπτουν.

**7.** Να δείξετε ότι:

**i)** = , **ii)** = , **iii)** =

**Λύση**

**i)** ===

**ii)** ==

**iii)** = = = =

**8**. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

**i**)  **ii**) 

**iii**)  **iv**) 

**v**)  **vi**) 

**Λύση**

**i)** Έστω το ζητούμενο διάνυσμα. Τότε έχουμε ότι:

 = = − =

(η λύση είναι προφανής από το σχήμα)

**ii)** Έστω το ζητούμενο διάνυσμα. Τότε έχουμε ότι:

 = = − = + =

(η λύση είναι προφανής από το σχήμα)

**iii)** Επειδή =, έχουμε ότι:

 ==

(η λύση είναι προφανής από το σχήμα σύμφωνα με τον κανόνα του παραλληλογράμμου)

**iv)** Επειδή =, έχουμε ότι:

 ==

**v)** Επειδή =, έχουμε ότι:

 ==

**vi**) Έστω το ζητούμενο διάνυσμα. Τότε έχουμε ότι:

 + + = + + =

( διότι −= − + )

 + ++ = ( διότι + + )

 +++ = +++ =

+ = = =

**9.** Αν =6, να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων: .

**Λύση**

● =3=3∙6=18

● ==2∙6=12

● ==∙6=4

**10.** Έστω , , . Να εκφράσετε τα διανύσματα  συναρτήσει των .

**Λύση**

Εργαζόμενοι με σημείο αναφοράς το Ο έχουμε ότι:

● =−=3−−=2−

● =−=+2−(3−=+2−3+=−2+3

● = −= −−= −(3−−= −(2−)= −2+

**11.** Αν , να δείξετε ότι .

**Λύση**

Εργαζόμενοι με σημείο αναφοράς το Α έχουμε ότι η δοσμένη σχέση γράφεται:

3(−3(−

3−3−

33− 3 −3 −

2−2 2− ) 2

2 

**12.** Αν , να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

**Λύση**

1ος τρόπος

Εργαζόμενοι με σημείο αναφοράς το Α έχουμε ότι η δοσμένη σχέση γράφεται:

9(−

−

 = − 

τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

2ος τρόπος

Η δοσμένη σχέση γράφεται:

2+7 2+7

2+7 2+7 2=−7

2=7 τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Ας δούμε στη συνέχεια περιληπτικά τη Θεωρία της τέταρτης παραγράφου από τα Διανύσματα:

***1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ***

***Άξονας***

Πάνω σε μια ευθεία  επιλέγουμε δύο σημεία *Ο* και *Ι*, έτσι ώστε το διάνυσμα  να έχει μέτρο 1 και να βρίσκεται στην ημιευθεία . Λέμε τότε ότι έχουμε έναν **άξονα** με **αρχή το *Ο*** και **μοναδιαίο διάνυσμα το**  και

τον συμβολίζουμε με . Η ημιευθεία  λέγεται **θετικός ημιάξονας **, ενώ η  λέγεται **αρνητικός ημιάξονας **.



Αν, τώρα, πάνω στον άξονα  πάρουμε ένα σημείο *Μ*, επειδή , θα υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός  τέτοιος ώστε . Τον αριθμό  τον ονομάζουμε **τετμημένη** του *Μ*. Αλλά και αντιστρόφως, από την ισότητα  προκύπτει ότι σε κάθε πραγματικό αριθμό  αντιστοιχεί μοναδικό σημείο *Μ* του άξονα  με τετμημένη . Το σημείο αυτό συμβολίζεται με .

***Καρτεσιανό Επίπεδο***



Πάνω σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες  και  με κοινή αρχή *Ο* και μοναδιαία διανύσματα τα  και . Λέμε τότε ότι έχουμε ένα **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** ή απλούστερα ένα **σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** ή ακόμα ένα **καρτεσιανό επίπεδο** και το συμβολίζουμε με . Το σύστημα  λέγεται ορθοκανονικό, γιατί είναι ορθογώνιο και κανονικό. Ορθογώνιο είναι, γιατί οι άξονες  και  είναι κάθετοι, και κανονικό, γιατί τα διανύσματα  και  είναι ισομήκη.

Πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο  παίρνουμε ένα σημείο *Μ*. Από το *Μ* φέρνουμε την παράλληλη στον , που τέμνει τον  στο , και την παράλληλη στον , που τέμνει τον  στο . Αν  είναι η τετμημένη του  ως προς τον άξονα  και  η τετμημένη του  ως προς τον άξονα , τότε ο  λέγεται **τετμημένη** του *Μ* και ο  **τεταγμένη** του *Μ*. Η τετμημένη και η τεταγμένη λέγονται **συντεταγμένες του *Μ***. Έτσι σε κάθε σημείο *Μ* του επιπέδου αντιστοιχεί ένα ζεύγος συντεταγμένων.

Αλλά και *αντιστρόφως* σε κάθε ζεύγος  πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί μοναδικό σημείο του επιπέδου, το οποίο βρίσκεται ως εξής: Πάνω στον άξονα  παίρνουμε το σημείο  και στον  το σημείο . Από τα  και  φέρνουμε παράλληλες στους άξονες  και  αντιστοίχως, που τέμνονται στο *Μ*. Το σημείο *Μ* είναι το ζητούμενο. Ένα σημείο *Μ* με τετμημένη  και τεταγμένη  συμβολίζεται και με  ή απλά με .

***Συντεταγμένες Διανύσματος***

Έστω  ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και  ένα διάνυσμα του επιπέδου. Με αρχή το *Ο* σχεδιάζουμε το διάνυσμα . Αν  και  είναι οι προβολές του *Α* στους άξονες  και  αντιστοίχως, έχουμε:



 (1)

Αν  είναι οι συντεταγμένες του , τότε ισχύει  και . Επομένως η ισότητα (1) γράφεται



Αποδείξαμε δηλαδή ότι το  είναι **γραμμικός συνδυασμός** των  και .

Αποδεικνύεται ότι:

**Κάθε διάνυσμα  του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή .**

Τα διανύσματα  και  λέγονται **συνιστώσες** του διανύσματος  κατά τη διεύθυνση των  και  αντιστοίχως, ενώ οι αριθμοί  λέγονται συντεταγμένες του  στο σύστημα . Πιο συγκεκριμένα, ο  λέγεται **τετμημένη** του  και ο  λέγεται **τεταγμένη** του . Από τον τρόπο που ορίστηκαν οι συντεταγμένες ενός διανύσματος προκύπτει ότι:

**“Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες”.**

Καθένα από τα ίσα διανύσματα με τετμημένη  και τεταγμένη , θα το συμβολίζουμε με το διατεταγμένο ζεύγος .

***Συντεταγμένες Γραμμικού Συνδυασμού Διανυσμάτων***

Αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες δύο διανυσμάτων  και  του καρτεσιανού επιπέδου, τότε μπορούμε να βρούμε τις συντεταγμένες του αθροίσματος , του γινομένου ,  και γενικά κάθε γραμμικού συνδυασμού των  και . Πράγματι, αν  και , τότε έχουμε:

* 
* 

Επομένως

 και 

ή ισοδύναμα





Γενικότερα, για το γραμμικό συνδυασμό  έχουμε:

.

***Συντεταγμένες Μέσου Τμήματος***

Ας θεωρήσουμε δύο σημεία  και  του καρτεσιανού επιπέ-δου και ας υποθέσουμε ότι  είναι οι συντεταγμένες του μέσου *Μ* του *ΑΒ*.



Επειδή , και

, , ,

έχουμε



Επομένως ισχύει

|  |
| --- |
|  και . |

***Συντεταγμένες Διανύσματος με Γνωστά Άκρα***



Ας θεωρήσουμε δύο σημεία  και  του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι  είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος . Επειδή, , ,

, και ,

έχουμε:

.

Επομένως:

Οι συντεταγμένες  του διανύσματος με άκρα τα σημεία  και  δίνονται από τις σχέσεις

 και .

Δηλαδή

τετμημένη του τετμημένη του *Β* − τετμημένη του *Α*

τεταγμένη του τεταγμένη του *Β* − τεταγμένη του *Α*.

***Μέτρο Διανύσματος***



* Έστω  ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου και *Α* το σημείο με διανυσματική ακτίνα . Αν  και  είναι οι προβολές του *Α* στους άξονες  και  αντιστοίχως, επειδή το σημείο *Α* έχει τετμημένη  και τεταγμένη , θα ισχύει  και . Έτσι θα έχουμε:

.

Επομένως:

(1)

Αν , τότε 



* Ας θεωρήσουμε τώρα δύο σημεία  και  του καρτεσιανού επιπέδου. Επειδή η απόσταση  των σημείων *Α* και *Β* είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος , σύμφωνα με τον τύπο (1) θα ισχύει:

  (2)

Επομένως:

Η απόσταση των σημείων  και  είναι ίση με

.

***Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων***

Έστω  και  δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου.

Αποδεικνύεται ότι:

 (1)

Την ορίζουσα , που έχει ως 1η τη γραμμή τις συντεταγμένες του διανύσματος  και ως 2η γραμμή τις συντεταγμένες του διανύσματος , τη λέμε **ορίζουσα** **των διανυσμάτων** ** και ** (με τη σειρά που δίνονται) και θα τη συμβολίζουμε με . Έτσι, η παραπάνω ισοδυναμία διατυπώνεται ως εξής:



**Παρατήρηση**

Δύο **παράλληλα** διανύσματα είναι **ομόρροπα,** ανέχουν **ομόσημες** συντεταγμένες και **αντίρροπα,** αν έχουν **ετερόσημες** συντεταγμένες.

***Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος***



* Έστω  ένα μη μηδενικό διάνυσμα και  το σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει . Τη γωνία , που διαγράφει ο ημιάξονας  αν στραφεί γύρω από το *Ο* κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία *ΟΑ*, την ονομάζουμε **γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα**  **με τον άξονα** . Είναι φανερό ότι

.

Για τη γωνία , όπως είναι γνωστό από την Τριγωνομετρία, αν το  δεν είναι παράλληλο προς τον άξονα , ισχύει

.

Το πηλίκο  της τεταγμένης προς την τετμημένη του διανύσματος , με , το λέμε **συντελεστή διεύθυνσης** του  και τον συμβολίζουμε με  ή απλώς με *λ*. Επομένως:



Είναι φανερό ότι

 Αν , δηλαδή αν , τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος  είναι ο .

**Παρατήρηση**

**Κάθε διάνυσμα της μορφής =(x, 0) είναι παράλληλο στον άξονα x'x**.

 Αν , δηλαδή αν , τότε **δεν ορίζεται** συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος .

**Παρατήρηση**

**Κάθε διάνυσμα της μορφής =(0, y) είναι παράλληλο στον άξονα y'y**.

* Ας θεωρήσουμε τώρα δύο διανύσματα  και  με συντελεστές διεύθυνσης  και  αντιστοίχως. Τότε έχουμε τις ισοδυναμίες:

.

Επομένως, η συνθήκη παραλληλίας για δύο διανύσματα  και  με συντελεστές διεύθυνσης  και  διατυπώνεται ως εξής:



Μετά την επανάληψη της Θεωρίας, ας δούμε στη συνέχεια κάποιες **λυμένες Ασκήσεις**:

**1.**  Με βάση τον άξονα x΄x του σχήματος, να

προσδιορίσετε τα διανύσματα και .

**Λύση**

, δηλαδή έχει μήκος 3 και φορά προς τα δεξιά.

, δηλαδή έχει μήκος 4 και φορά προς τα αριστερά.

**2.** Με βάση και το διπλανό σχήμα να εξηγήσετε τη διαφορετική σημασία του αριθμού 3 για το σημείο Α και το διάνυσμα  σε σχέση με το σημείο Γ.

**Απάντηση**

Για το σημείο Α(3,2) ο αριθμός 3 είναι η τετμημένη του και αντιστοιχεί στην τετμημένη του σημείου Γ.

Για το διάνυσμα =(3, 2) ο αριθμός 3 είναι η τετμημένη του και αντιστοιχεί στο διάνυσμα .

**3.**

**i)** Αν Α(–2, 7) και Β(5, –3), να βρείτε το .

**ii)** Αν Α(2, 1) και =(5,–2) να βρείτε το σημείο Β.

**Λύση**

**i)** Έχουμε ότι: =(5–(–2), –3–7)=(7, –10) =(7, –10) .

**ii)** Έστω Β(xB, yB) το ζητούμενο σημείο και Α(xA,yA) το δοσμένο σημείο. Τότε έχουμε ότι:

=(xB–xA, yB–yA)(5, –2)=(xB–2, yB–1)( 5= xB–2 και –2= yB–1)

( xB=7 και yB=–1 )

**4.** Να γράψετε το διάνυσμα =(4, 13) ως γραμμικό συνδυασμό των =(2, 3) και =(–1, 2).

**Λύση**

Πρέπει να βρούμε δύο αριθμούς κ και λ, έτσι ώστε να ισχύει:

=κ+λ(4, 13)=κ(2, 3)+λ(–1, 2) (4, 13)=(2κ, 3κ)+ (–λ, 2λ)

(4, 13)=(2κ−λ, 3κ+2λ)

(ισότητα διανυσμάτων, που είναι εκφρασμένα ως διατεταγμένα ζεύγη)

Η λύση του συστήματος είναι:

 Άρα: = 3+2.

**5.** Δίνονται τα σημεία Α(1, 3) και Β(0, 5). Να βρείτε σημείο Μ, ώστε .

**Λύση**

Έστω Μ(x, y) το ζητούμενο σημείο. Τότε είναι:

=(1–x, 3–y) και =(0–x, 5–y)

Οπότε έχουμε ότι:

32 3(1–x, 3–y)=2(0–x, 5–y) (3–3x, 9–3y)=(–2x, 10–2y)

(ισότητα διανυσμάτων, που είναι εκφρασμένα ως διατεταγμένα ζεύγη)

Η λύση του συστήματος είναι:

 Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το: M(3, –1).

**6.** Να αναλύσετε το διάνυσμα =(4, –3) σε δύο συνιστώσες παράλληλες προς τα διανύσματα =(1, 2) και =(4, 3).

**Λύση**

Πρέπει να βρούμε δύο αριθμούς κ και λ, έτσι ώστε να ισχύει: =κ+λ(4, –3)=κ(1, 2)+λ(4, 3)

(4, –3)=(κ, 2κ)+(4λ, 3λ)

(4, –3)=(κ+4λ, 2κ+3λ)

 Η λύση του συστήματος είναι:

 Άρα: = +.

**7.** Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(3, 2) και το μέσο του Μ(6, 5). Να βρείτε το σημείο Β.

**Λύση**

 Έστω Β(xB, yB) το ζητούμενο σημείο.

Αν Α(xA, yA) είναι το σημείο Α και Μ(xM, yM) το μέσο του ΑΒ, τότε έχουμε ότι:

xM= 6= 12=3+xΒ xΒ=9 και

yM= 5= 10=2+yΒ yΒ=8 .

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το: Β(9, 8) .

**8.** Δίνονται τα σημεία Α(1, 2) και Β(4, 5).

**i)** Να βρείτε ένα σημείο Μ, ανάμεσα στα Α, Β, ώστε ΜΑ=2·ΜΒ

**ii)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού σημείου του Μ ως προς το Α.

**Λύση**

**i)** Έστω Μ(x, y) το ζητούμενο σημείο. Τότε (προσοχή στη θέση των γραμμάτων!)

πρέπει να ισχύει:

 =2 (x–1, y–2)=2(4–x, 5–y)(x–1, y–2)= (8–2x, 10–2y)

Η λύση του συστήματος είναι:

 Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το: M(3, 4).

**ii)** Έστω Ν(xN, yN) το συμμετρικό σημείο του Μ ως προς το Α. Τότε το Α είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΝΜ, οπότε έχουμε ότι:

xΑ= 1= 2=xΝ+3 xΝ=−1 και

yΑ= 2= 4=yΝ+4 yΝ=0

Άρα το συμμετρικό σημείο Ν του Μ ως προς το Α είναι το: Ν(−1, 0).

**9.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(3, 7) , Β(1,3) και Γ(5,–1). Να βρείτε τα μήκη των

διαμέσων του ΑΚ, ΒΛ, ΓΜ.

Α

**Λύση**

Γ

Μ

Λ

Κ

Β

Για να βρούμε το μήκος της διαμέσου ΑΚ εργαζόμαστε ως εξής:

Το Κ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ. Οπότε έχουμε ότι:

xΚ= = = =3 και yΚ= = = =1

Άρα το σημείο Κ είναι το Κ(3, 1).

Το μήκος τώρα της διαμέσου ΑΚ είναι ίσο με την απόσταση του Α

από το Κ, δηλαδή είναι ίσο με:

(ΑΚ) = = = = = 6

Επομένως το μήκος της διαμέσου ΑΚ είναι ίσο με 6 μονάδες.

Ομοίως εργαζόμενοι βρίσκουμε τα μήκη των διαμέσων ΒΛ και ΓΜ.

**10.** Να βρείτε το y ώστε το διάνυσμα = να είναι μοναδιαίο.

**Λύση**

Μοναδιαίο λέγεται το διάνυσμα που έχει μέτρο ίσο με 1. Οπότε πρέπει να ισχύει:

=1 = 1+ y2 = 12y2 = 1−y2 = 1− y2 =

y = ή y = − .

**11.** Αν =(–4, –2), να βρείτε το .

**Λύση**

Πρέπει να βρούμε το .

Έχουμε ότι. Υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε ότι:

 4=20, άρα =5.

Επομένως: =(−4, 5–2)=(−4, 3) .

**12.** Δίνονται τα σημεία Α(1, 1) , Β(–3, 2) και Γ(–5, x). Να βρείτε το x ώστε τα σημεία Α, Β, Γ να είναι συνευθειακά.

**Λύση**

Για να είναι τα Α, Β, Γ συνευθειακά, αρκεί δύο από τα διανύσματα να είναι παράλληλα.

Είναι: =(−3–1, 2–1)=(−4, 1) και =(−5–1, x–1)=(–6, x–1)

Οπότε έχουμε ότι:

//det(,)=0=0−4∙(x−1)−1∙(−6)=0

−4x+4+6=0−4x+10=0−4x=−10x= x= .

**Παρατήρηση**

Για να δείξουμε ότι τρία σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι δύο από τα διανύσματα  είναι παράλληλα.

**13.** Δίνονται τα διανύσματα =(x, 2) και =(12, x–2). Να βρείτε το x ώστε τα διανύσματα να είναι: **i)** ομόρροπα , **ii)** αντίρροπα.

**Λύση**

Καταρχήν πρέπει τα  και  να είναι παράλληλα. Άρα πρέπει: det()=0.

Έχουμε λοιπόν ότι: det()=0 =0x(x–2)−2∙12=0

x2−2x−24=0 x=6 ή x=−4 .

**i)** Για x=6 έχουμε ότι: =(6, 2) και =(12, 4), τα οποία είναι ομόρροπα γιατί έχουν ομόσημες συντεταγμένες.

**ii)** Για x=–4 έχουμε ότι: =(–4, 2) και =(12, –6), τα οποία είναι αντίρροπα γιατί έχουν ετερόσημες συντεταγμένες.

**14.** Να βρείτε διάνυσμαμε μέτρο 3 το οποίο να είναι συγγραμμικό του =(–1, 2).

**Λύση**

Έστω =(x,y ) το ζητούμενο διάνυσμα. Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε ότι:

●=3 x2+y2=()2x2+y2=9∙5x2+y2=45 (1)

και

● //det()=0=02x+y=0y=–2x (2).

Τώρα η (1) λόγω της (2) ισοδύναμα γράφεται:

x2+(–2x)2=45 x2+4x2=455x2=45 x2=9 x=3 ή x= –3

 Αν x=3, τότε από την (2) έχουμε ότι: y= –2∙3y= –6,

οπότε το ζητούμενο διάνυσμα είναι το =(3, –6), το οποίο είναι αντίρροπο του , διότι έχουν ετερόσημες συντεταγμένες.

 Αν x=−3, τότε από την (2) έχουμε ότι: y= –2∙(−3)y= 6,

οπότε το ζητούμενο διάνυσμα είναι το =(−3, 6), το οποίο είναι ομόρροπο του ,

διότι έχουν ομόσημες συντεταγμένες.

**15.** Δίνεται το διάνυσμα =(κ+4) +(λ−5). Να βρείτε τα κ και λ, αν:

**i**) // x'x , **ii**) // y'y.

**Λύση**

Το διάνυσμα =(κ+4) +(λ−5) είναι το =(κ+4, λ−5). Οπότε:

**i)** Ένα διάνυσμα είναι παράλληλο στον x'x, αν είναι της μορφής =(x, 0) .

 Άρα για να είναι το =(κ+4, λ−5) παράλληλο στον x'x, πρέπει: λ−5=0λ=5.

**ii)** Ένα διάνυσμα είναι παράλληλο στον y'y, αν είναι της μορφής =(0, y) .

Άρα για να είναι το =(κ+4, λ−5) παράλληλο στον y'y, πρέπει: κ+4=0κ=−4.

**16.** Να βρείτε τη γωνία των παρακάτω διανυσμάτων με τον άξονα x'x.

**i)** , **ii)**  ,  **iii)** =−3, **iv)**

**Λύση**

Έστω φ η κάθε φορά ζητούμενη γωνία, όπου 0 ≤ φ < 360ο. Τότε έχουμε:

**i)** Το διάνυσμα  είναι το =(x, y)=(2, 2). Οπότε:

 εφφ=1 εφφ=εφ45ο φ=45ο ή φ=225ο .

Αλλά επειδή είναι x=2 > 0 και y=2 > 0, το πέρας του διανύσματος  βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

Άρα θα είναι: φ=45ο .

**ii)** Το διάνυσμα  είναι το =(x, y)=(−3, 3). Οπότε:

εφφ=−1εφφ=−εφ45ο εφφ=εφ(180ο−45ο) εφφ=εφ135ο  φ=135o ή φ=315ο .

Αλλά επειδή είναι x=−3 < 0 και y=3 > 0, το πέρας του διανύσματος  βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο.

Άρα θα είναι: φ=135ο .

**iii)** Το διάνυσμα =−3 **=** −3 **+**0 είναι το =(x, y)=(−3, 0). Οπότε:

 =**0** εφφ=0 εφφ=εφ0ο φ=0ο ή φ=180ο .

Αλλά επειδή είναι x=−3 < 0, το πέρας του διανύσματος  βρίσκεται επάνω στον ημιάξονα Οx'.

Άρα θα είναι: φ=180ο .

**iv)** Το διάνυσμα  **=** 0 είναι το =(x, y)=(0, −4). Οπότε:

Αφού x=0, δεν ορίζεται το , οπότε φ=90ο ή φ=270ο .

Αλλά επειδή είναι y=−4 < 0, το πέρας του διανύσματος βρίσκεται επάνω στον ημιάξονα Οy'.

Άρα θα είναι: φ=270ο .

**17.** Να βρείτε, αν ορίζεται, τον συντελεστή διεύθυνσης και τη γωνία που σχηματίζει το  με τον άξονα x'x, αν:

**i)**  Α(3,0) και Β(0,–) **ii)** A( 1,2) και B(1,4)

**Λύση**

1. Το διάνυσμα είναι το =(x, y)=(0−3, −−0)= (−3, −). Οπότε:

 =

Έστω τώρα φ η γωνία που σχηματίζει το  με τον άξονα x'x, όπου 0 ≤ φ < 360ο. Τότε έχουμε:

εφφ= εφφ= εφφ=εφ30ο φ=30ο ή φ=210ο

Αλλά επειδή είναι x=−3 < 0 και y=− < 0, το πέρας του διανύσματος βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο.

Άρα θα είναι: φ=210ο .

**ii)** Το διάνυσμα είναι το =(x, y)=(1−1, 4−2)= (0, 2). Οπότε:

Αφού x=0, δεν ορίζεται το , οπότε, αν φ είναι η γωνία που σχηματίζει το  με τον άξονα x'x, όπου 0 ≤ φ < 360ο, θα είναι: φ=90ο ή φ=270ο

Αλλά επειδή είναι y=2 > 0, το πέρας του διανύσματος  βρίσκεται επάνω στον ημιάξονα Οy.

Άρα θα είναι: φ=90ο .

**18.** Δίνονται τα διανύσματα =(,3) και =(3,3). Να βρείτε την γωνία που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα.

**Λύση**

Έστω ότι: ω είναι η γωνία που σχηματίζει το  με τον οριζόντιο άξονα και φ είναι η γωνία που σχηματίζει το  με τον οριζόντιο άξονα.

Τότε έχουμε ότι:

 = = = εφ60ο εφω = εφ60ο ω=60ο ή ω=240ο .

Επειδή όμως η τετμημένη και η τεταγμένη του  είναι θετικές, προκύπτει ότι: ω=60ο .

 = = 1 = εφ45ο εφφ = εφ45ο φ=45ο ή φ=225ο .

Επειδή όμως η τετμημένη και η τεταγμένη του  είναι θετικές, προκύπτει ότι: φ=45ο .

Επομένως η γωνία που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα είναι ίση με ω–φ=15ο.

Με τη βοήθεια των παραπάνω λυμένων ασκήσεων ας προσπαθήσουμε τώρα να λύσουμε τις ακόλουθες **Ασκήσεις**:

**1.** Επάνω στον άξονα x′x παίρνουμε τα σημεία Α, B, Γ με xA=2, xΒ=–3 και xΓ=5. Να βρείτε τα διανύσματα .

**2.** Δίνονται τα σημεία Α(2,–1) και Β(3,1). Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων: , όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

**3.** Αν =(–3,1) και Β(2,–4), να βρείτε το σημείο Α.

**4.** Αν =(1, 2), =(3, –7) και =(–2, 5), να βρείτε τα διανύσματα  και .

**5.** Αν το διάνυσμα =(x2–x–2, x+2y–3) είναι το μηδενικό, να βρείτε τα x, y.

**6**. Αν  και Α(1, 2), Β(3,2), Γ(–2,–1), να βρείτε το σημείο Δ.

**7.** Αν Α(1, –1) και Β(3, 2), να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ.

**8.** Σε τμήμα ΑΒ δίνεται το σημείο Α(3, 2) και το μέσο του Μ(6, 5). Να βρείτε το σημείο Β.

**9.** Αν Α(1, 2) και Β(3, 5), να βρείτε το  και το .

**10.** Να βρείτε την απόσταση των σημείων:

**i)** Α(−2, 7) και Β(3, −5) , **ii)** Γ(4, −6) και Δ(−1, 0)

**11.** Να εξετάσετε αν τα διανύσματα:

**i)** =(–3, 4) και =(0, 2) είναι παράλληλα.

**ii)** =(–6, 8) και =(9, –12) είναι παράλληλα.

**12.** Να δείξετε ότι τα σημεία Α(2, −4), Β(−3, 11) και Γ(1, −1) είναι συνευθειακά.

**13.** Δίνονται τα διανύσματα =(x2+1, 1) και =(2y–y2, 1). Αν τα διανύσματα είναι συγγραμμικά, να βρείτε τα x, y.

**14.**Δίνεται το διάνυσμα =(2μ–1, μ+1). Να βρείτε το μ ώστε το  να έχει συντελεστή διεύθυνσης .

**15.** Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης και τη γωνία που σχηματίζει το  με τον άξονα x'x, αν:

**i)** Α(2, 3) και Β(5, 3) , **ii)** A(–1, –2) και Β(–4, 1).

**16.** Να βρείτε τη γωνία των παρακάτω διανυσμάτων με τον άξονα x'x.

**i)** =3 **+**  , **ii)** = , **iii)** =  **−**

**Αφού λοιπόν διαβάσετε πολύ καλά την περίληψη της θεωρίας και τις λυμένες ασκήσεις, στη συνέχεια ασχοληθείτε με τις ασκήσεις για λύση, οι οποίες είναι παρόμοιες με τις λυμένες.**

Περιμένω τις ερωτήσεις σας και τις προσπάθειές σας για λύση των ασκήσεων μέχρι και την επόμενη Τρίτη 12 Μαΐου στο e-mail: tzanetatos@sch.gr

**Να είστε καλά και να προσέχετε !!!**

Ο καθηγητής σας των Μαθηματικών Προσανατολισμού

Γεράσιμος Τζανετάτος

\*\*\* Η περίληψη της θεωρίας προέρχεται από το σχολικό βιβλίο, ενώ οι εκφωνήσεις των ασκήσεων προέρχονται από τον ιστότοπο [plansmath.blogspot.com](http://www.study4exams.gr).