**Γεια σας και χαρά σας και πάλι καλά μου παιδιά !!!**

Καταρχάς ελπίζω ότι και στη σημερινή μας επικοινωνία βρίσκω, εσάς και τις οικογένειές σας, καλά, δυνατούς και γεμάτος αισιοδοξία.

Όπως βλέπετε αγαπημένοι μου μαθητές και αγαπημένες μου μαθήτριες, δεν σας έχω ξεχάσει. Πώς θα μπορούσε άλλωστε να συμβεί «κάτι τέτοιο». . .. Πάμε λοιπόν και πάλι, πιστεύω με πολλή «όρεξη» **πια** από την πλευρά σας, στα «δικά μας» !!! Όπως ήδη σας έχω γράψει σε προηγούμενα μαθήματα, **πρέπει επιτέλους να κινητοποιηθούμε για να κερδίσουμε τον χαμένο χρόνο!!!**

Ξεκινώντας το σημερινό μας μάθημα, ας δούμε τις λύσεις των ασκήσεων που είχαμε επάνω στην τέταρτη παράγραφο των Διανυσμάτων. Όσοι από σας έχετε ασχοληθεί με τις ασκήσεις αυτές, να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με τις λύσεις και, αν χρειάζεται, να κάνετε τις αναγκαίες διορθώσεις. Όσοι πάλι δεν μπορέσατε να ασχοληθείτε, να μελετήσετε τις λύσεις και να προσπαθήσετε και μόνοι σας να τις λύσετε. Σε κάθε περίπτωση περιμένω τις απαντήσεις των ασκήσεων, ερωτήσεις και απορίες σας στο e-mail tzanetatos@sch.gr.

Είχαμε λοιπόν από το προηγούμενό μας μάθημα τις εξής ασκήσεις:

**1.** Επάνω στον άξονα x′x παίρνουμε

−33

0

2

5

τα σημεία Α, B, Γ με xA=2, xΒ=–3 και xΓ=5.

Ο

Β

Α

Γ

Να βρείτε τα διανύσματα .

**Λύση**

● = (xB−xA)∙ = (–3−2)∙ = −5∙ , δηλαδή έχει μήκος 5 και φορά προς τα αριστερά.

● = (xΓ−xA)∙ = (5−2)∙ = 3∙ , δηλαδή έχει μήκος 3 και φορά προς τα δεξιά.

● = (xB−xΓ)∙ = (–3−5)∙ = −8∙ , δηλαδή έχει μήκος 8 και φορά προς τα αριστερά.

**2.** Δίνονται τα σημεία Α(2,–1) και Β(3,1). Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων: , όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

**Λύση**

Η αρχή Ο των αξόνων είναι το σημείο Ο(0, 0). Οπότε έχουμε ότι:

= (2−0, –1−0) = (2, –1)

= (3−0, 1−0) = (3, 1)

= (3−2, 1−(−1)) = (1, 2)

+ 2 = (2, –1) + 2(3, 1) = (2, –1) + (6, 2) = (2+6, –1+2) = (8, 1)

**3.** Αν =(–3,1) και Β(2,–4), να βρείτε το σημείο Α.

**Λύση**

Έστω Α(κ, λ) το ζητούμενο σημείο. Τότε έχουμε ότι: = (2−κ, −4−λ) (1)

Όμως από υπόθεση έχουμε ότι: =(–3,1) (2)

Οπότε από τις (1) , (2) προκύπτει ότι: (2−κ, −4−λ) = (–3,1)

Άρα το σημείο Α είναι το Α(5, −5) .

**4.** Αν =(1, 2), =(3, –7) και =(–2, 5), να βρείτε τα διανύσματα  και .

**Λύση**

●  = (1, 2)−(3, –7)+(–2, 5) = (1−3+(−2), 2−(−7)+5) = (1−3−2, 2+7+5) =

= (−4, 14)  = (−4, 14)

●  = (1, 2)+3(3, –7)−8(–2, 5) = (1, 2)+(9, –21)−(–16, 40) =

= (1+9−(−16), 2+(–21)−40) = (1+9+16, 2−21−40) = (26, −59)

 = (26, −59)

**5.** Αν το διάνυσμα =(x2–x–2, x+2y–3) είναι το μηδενικό, να βρείτε τα x, y.

**Λύση**

Αφού το =(x2–x–2, x+2y–3) είναι το μηδενικό, έχουμε ότι:

x2–x–2=0 (1) και x+2y–3=0 (2)

Λύνουμε τώρα το σύστημα των (1), (2) ως εξής:

(2) x=−2y+3 (3)

H (1) τώρα λόγω της (3) ισοδύναμα γίνεται:

(−2y+3)2−(−2y+3)−2=0 4y2−12y+9+2y−3−2=0 4y2−10y+4=0

2∙(2y2−5y+2)=0 2y2−5y+2=0 δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς y με ρίζες 2 και

Οπότε:

● αν y=2, τότε από την (3) έχουμε: x=−2∙2+3 x=−4+3 x=−1

● αν y= , τότε από την (3) έχουμε: x=−2∙ +3 x=−1+3 x=2

Άρα, αν το =(x2–x–2, x+2y–3) είναι το μηδενικό, τότε:

( x=−1 και y=2 ) ή ( x=2 και y= ) .

**6**. Αν  και Α(1, 2), Β(3,2), Γ(–2,–1), να βρείτε το σημείο Δ.

**Λύση**

Έστω Δ(κ, λ) το ζητούμενο σημείο. Τότε έχουμε ότι:

= (3−1, 2−2) = (2, 0) = (2, 0) (1) και

= (κ−(−2), λ−(−1)) = (κ+2, λ+1) = (κ+2, λ+1) (2)

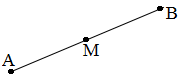
Οπότε λόγω των (1), (2) η ισότητα  γράφεται:

(2, 0) = (κ+2, λ+1)

Άρα το σημείο Δ είναι το Δ(0, −1) .

**7.** Αν Α(1, –1) και Β(3, 2), να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ.

**Λύση**

Για την τετμημένη xM και την τεταγμένη yM του μέσου Μ του ΑΒ έχουμε αντίστοιχα ότι:

xM = = 2 και yM = = . Άρα Μ(2, ).

**8.** Σε τμήμα ΑΒ δίνεται το σημείο Α(3, 2) και το μέσο του Μ(6, 5). Να βρείτε το σημείο Β.

**Λύση**

Έστω Β(xB, yB) το ζητούμενο σημείο.

Αν Α(xA, yA) είναι το σημείο Α και Μ(xM, yM) το μέσο του ΑΒ, τότε έχουμε ότι:

xM= 6= 12=3+xΒ xΒ=9 και

yM= 5= 10=2+yΒ yΒ=8 .

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το: Β(9, 8) .

**9.** Αν Α(1, 2) και Β(3, 5), να βρείτε το  και το .

**Λύση**

Έχουμε ότι:

● = (3−1, 5−2) = (2, 3) = (2, 3)

●  = = =  =

**10.** Να βρείτε την απόσταση των σημείων:

**i)** Α(−2, 7) και Β(3, −5) , **ii)** Γ(4, −6) και Δ(−1, 0)

**Λύση**

**i)** (ΑΒ) = = = =

= = = 13 (ΑΒ) = 13

**ii)** (ΓΔ) = = = =

= = (ΓΔ) =

**11.** Να εξετάσετε αν τα διανύσματα:

**i)** =(–3, 4) και =(0, 2) είναι παράλληλα.

**ii)** =(–6, 8) και =(9, –12) είναι παράλληλα.

**Λύση**

**i)** Έχουμε ότι: det(, ) = = −3∙2−4∙0 = −6 det(, ) = −6

det(, ) ≠ 0 τα διανύσματα  ,  δεν είναι παράλληλα.

**ii)**  Έχουμε ότι: det(, ) = = −6∙(−12)−8∙9 = 72−72 = 0

det(, ) = 0 τα διανύσματα  ,  είναι παράλληλα.

**12.** Να δείξετε ότι τα σημεία Α(2, −4), Β(−3, 11) και Γ(1, −1) είναι συνευθειακά.

**Λύση**

Για να δείξουμε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι δύο από τα διανύσματα είναι παράλληλα.

Είναι: =(−3–2, 11–(−4))=(−5, 15) και =(1–2, −1–(−4))=(–1, 3)

Οπότε έχουμε ότι:

det(,) = = −5∙3−15∙(−1)=−15+15=0

det(,) = 0 //

Αφού λοιπόν τα ,  είναι παράλληλα και έχουν κοινό σημείο το Α, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

**13.** Δίνονται τα διανύσματα =(x2+1, 1) και =(2y–y2, 1). Αν τα διανύσματα είναι συγγραμμικά, να βρείτε τα x, y.

**Λύση**

Αφού  //  det()=0 =0 x2+1–(2y−y2)=0

x2+1–2y+y2=0 x2+(1–2y+y2)=0 x2+(1–y)2=0

( γνωρίζουμε ότι αν α2+β2=0, τότε ισχύει: α=0 και β=0 )

**14.**Δίνεται το διάνυσμα =(2μ–1, μ+1). Να βρείτε το μ ώστε το  να έχει συντελεστή διεύθυνσης .

**Λύση**

O συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος  είναι ίσος με λ = με 2μ−1≠0 .

Οπότε, σύμφωνα με την υπόθεση, πρέπει να ισχύει:

 2μ−1=3(μ+1) 2μ−1=3μ+3 2μ−3μ=3+1 −μ=4 μ= −4

**15.** Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης και τη γωνία που σχηματίζει το  με τον άξονα x'x, αν:

**i)** Α(2, 3) και Β(5, 3) , **ii)** A(–1, –2) και Β(–4, 1).

**Λύση**

1. Το διάνυσμα είναι το =(x, y)=(5−2, 3−3) = (3, 0). Οπότε:

=

Αφού =, συμπεραίνουμε ότι το είναι παράλληλο στον άξονα x'x.

(Παρατήρηση: Το ότι // x'x, προκύπτει αμέσως αφού το = (3, 0), δηλαδή έχει τεταγμένη 0)

Έστω τώρα φ η γωνία που σχηματίζει το  με τον άξονα x'x, όπου 0 ≤ φ < 360ο. Τότε προφανώς έχουμε: φ=0ο ή φ=180ο

Αλλά επειδή είναι x=3>0, το πέρας του διανύσματος  βρίσκεται στον ημιάξονα Οx.

Άρα θα είναι: φ=0ο .

**ii)** Το διάνυσμα είναι το =(x, y)=(−4−(−1), 1−(−2)) = (−3, 3). Οπότε:

=

Έστω τώρα φ η γωνία που σχηματίζει το  με τον άξονα x'x, όπου 0 ≤ φ < 360ο.

Τότε έχουμε:

εφφ= εφφ=

Αλλά επειδή είναι x=−3< 0 και y=3> 0, το πέρας του διανύσματος βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο.

Άρα θα είναι: φ=135ο .

**16.** Να βρείτε τη γωνία των παρακάτω διανυσμάτων με τον άξονα x'x.

**i)** =3 **+**  , **ii)** = , **iii)** =  **−**

**Λύση**

Έστω φ η κάθε φορά ζητούμενη γωνία, όπου 0 ≤ φ < 360ο. Τότε έχουμε:

**i)** Το διάνυσμα =3 **+**  είναι το =(x, y)=(3, ). Οπότε:

Αλλά επειδή είναι x=3 > 0 και y= > 0, το πέρας του διανύσματος  βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

Άρα θα είναι: φ=30ο .

**ii)** Το διάνυσμα =0 **+**  είναι το =(x, y)=(0, 3). Οπότε:

Αφού x=0, δεν ορίζεται το , οπότε φ=90ο ή φ=270ο .

Αλλά επειδή είναι y=3 > 0, το πέρας του διανύσματος  βρίσκεται επάνω στον ημιάξονα Οy.

Άρα θα είναι: φ=90ο .

**iii)** Το διάνυσμα =  **−** είναι το =(x, y)=(1, −1). Οπότε:

Αλλά επειδή είναι x=1 > 0 και y= −1 < 0, το πέρας του διανύσματος  βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο.

Άρα θα είναι: φ=315ο .

Ας δούμε στη συνέχεια περιληπτικά τη Θεωρία της πέμπτης παραγράφου από τα Διανύσματα:

***1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ***

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

• Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων  και  και το συμβολίζουμε με  **τον πραγματικό αριθμό**:

,

όπου  η γωνία των διανυσμάτων  και .

• Αν  ή , τότε ορίζουμε 

Για παράδειγμα, το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων  και  με ,  και  είναι .

Άμεσες συνέπειες του παραπάνω ορισμού είναι οι εξής:

•  (Αντιμεταθετική ιδιότητα)

* Αν , τότε  και αντιστρόφως.
* Αν , τότε  και αντιστρόφως.
* Αν , τότε  και αντιστρόφως.

Το εσωτερικό γινόμενο  συμβολίζεται με  και λέγεται **τετράγωνο του** . Έχουμε: . Επομένως

.

Ειδικότερα, για τα μοναδιαία διανύσματα  και  του καρτεσιανού επίπεδου ισχύουν:

 και 

**Βασικές παρατηρήσεις**

**1**) Αν το εσωτερικό γινόμενο είναι **θετικός αριθμός**, τότε η γωνία των διανυσμάτων είναι

**οξεία.**

**2**) Αν το εσωτερικό γινόμενο είναι **αρνητικός αριθμός**, τότε η γωνία των διανυσμάτων είναι

**αμβλεία.**

**3**) Αν το εσωτερικό γινόμενο είναι **0**, τότε η γωνία των διανυσμάτων είναι **ορθή.**

**4**) **Δεν ισχύει ο νόμος της διαγραφής**.Δηλαδήδεν απλοποιούμε! 

**5**) **Δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα**. Δηλαδή  γενικά 

**6**) Ισχύουν οι γνωστές μας αλγεβρικές ταυτότητες: 





**7**) Από την ισότητα:  δεν συνεπάγεται: , διότι το  είναι αριθμός ενώ το  είναι διάνυσμα. Το σωστό είναι:  ⇒ .

***Αναλυτική Έκφραση Εσωτερικού Γινομένου***



Θα δούμε τώρα πώς μπορούμε να εκφράσουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων  και  συναρτήσει των συντεταγμένων τους. Με αρχή το *Ο* παίρνουμε τα διανύσματα  και .

Αποδεικνύεται ότι:



Δηλαδή:

**“Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους”.**

Για παράδειγμα, το εσωτερικό γινόμενο των  και  είναι: .

Με τη βοήθεια της αναλυτικής έκφρασης του εσωτερικού γινομένου αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

* 
*  (Επιμεριστική Ιδιότητα)
*  όπου  και , ()

***Συνημίτονο Γωνίας δύο Διανυσμάτων***

Αν  και  είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία *θ*, τότε  και επομένως,

.

Είναι όμως

,  και .

Επομένως,



Για παράδειγμα, αν *θ* είναι η γωνία των διανυσμάτων  και , τότε:

, οπότε .

**Βασική πρόταση**

Αρχικά υπενθυμίζουμε ότι ισχύει η εξής διπλή ανισότητα:

Ειδικότερα τώρα ισχύουν οι εξής ισοδυναμίες:

**i)** 

**ii)**  

**Απόδειξη**

**i)** 



.

**ii)** 

.

Μετά την επανάληψη της Θεωρίας, ας δούμε τώρα κάποιες **λυμένες Ασκήσεις**:

**1.** Αν ,, =1 με ==,  να υπολογίσετε τα:



**i**) , **ii**) , **iii**)



**Λύση**

Υπολογίζουμε αρχικά τα εσωτερικά γινόμενα , , . Έχουμε ότι:

=συν= 2∙3∙συν=6∙=3 =3 (1)

=συν= 3∙1συν=3∙= = (2)

=συν= 1∙2συν=2∙συν(π−)=2∙(−συν)= 2(−)=−1 = −1 (3)

Οπότε:

**i)** =2∙(−3)∙=−6∙=( λόγω της (1) )=−6∙3= −18 = −18

**ii)** ===( λόγω των (2) και (3) )= −1+= =

**iii**) Για να υπολογίσουμε το , υπολογίζουμε το ( )2. Έχουμε λοιπόν

ότι: ( )2 = ()2 = =

( λόγω των (1), (2) και (3) )

= 2+2+2+2∙3+2∙ +2∙(−1) = 22+32+12+6+3−2 = 4+9+1+7 = 21

( )2 = 21 (4) και επειδή ≥0, από την (4) προκύπτει ότι:

= .

Παρατήρηση

Για να υπολογίσουμε το μέτρο ενός διανύσματος χρησιμοποιούμε την ιδιότητα και υπολογίζουμε πρώτα το .

**2.** Αν =2, =3 και  , να βρείτε το  .

**Λύση**

Αφού γνωρίζουμε τη γωνία των διανυσμάτων −2 και 3 , θα ξεκινήσουμε με το εσωτερικό γινόμενο (−2 )∙(3). Έχουμε λοιπόν ότι:

(−2)∙(3) = ∙∙συν

(−2∙3)∙∙ = 2∙3∙συν −6∙ = 6∙2∙3∙συν(π −)

∙ = −6∙συν(π − ) ∙ = −6∙(−συν) ∙ = −6∙(−) ∙ = 3 .

Παρατήρηση

Όταν μας δίνουν τη γωνία δύο διανυσμάτων, τότε χρησιμοποιούμε το αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο.

**3.** Να δείξετε ότι:

**i**)

**ii**)

**iii**)

**Λύση**

**i**) 2 = 2 ()2 = ()2

∙ = ∙ ∙ = −∙ ∙ + ∙ = 0

2∙ = 0 ∙ = 0

**ii**) = 0 = 0

2 = 2

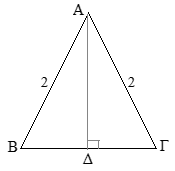
**iii**) ()2 =+ ∙ =

∙ = 0 ∙ = 0

**4.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά α=2. Αν ΑΔ είναι το ύψος του, να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

**i)**  , **ii)**  , **iii)**  , **iv)** 

**Λύση**

**i**) =2.

**ii**) = −2.

( γράψαμε το ως −, ώστε στο εσωτερικό γινόμενο τα διανύσματα να έχουν την ίδια αρχή )

**iii**) =**3**.

( στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ το ύψος ΑΔ είναι και διχοτόμος, οπότε =30ο και επιπλέον ΑΔ = , αφού από την Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α είναι ίσο με ).

**iv**) =0, αφού τα διανύσματα είναι κάθετα.

**5.**

**i)** Αν ↑↑ και =5, =9, να βρείτε το .

**ii)** Αν =4, =3 και =1, να δείξετε ότι ↑↓.

**Λύση**

Γνωρίζουμε από Βασική Πρόταση ότι ισχύουν οι εξής ισοδυναμίες:

**(1)** 

**(2)**  

Οπότε για την Άσκηση έχουμε ότι:

**i)** Επειδή ↑↑, σύμφωνα με την **(1)** θα ισχύει: 9=5+

=4.

**ii)** Παρατηρούμε ότι:  = |4−3|=1= .

Οπότε, επειδή = , σύμφωνα με την **(2)** θα ισχύει: ↑↓ .

**6.** Να δείξετε ότι τα διανύσματα  και  είναι κάθετα.

**Λύση**

Αρκεί να δείξουμε ότι: ∙ = 0. Έχουμε ότι:

**7.** Αν , να δείξετε ότι .

**Λύση**

Υψώνοντας τα δύο μέλη της δοσμένης σχέσης στο τετράγωνο έχουμε ότι:

+ = 0 = 0 =0 .

**8.** Αν για τα διανύσματα ισχύει: , να δείξετε ότι: .

**Λύση**

Έστω θ η γωνία των διανυσμάτων . Τότε η δοσμένη σχέση γράφεται:

****   ⎜συνθ⎜=1 συνθ=1 ή συνθ= −1 .

● Αν συνθ=1 θ=0ο τα διανύσματα είναι ομόρροπα.

● Αν συνθ= –1 θ=180ο τα διανύσματα είναι αντίρροπα.

**9.** Αν για τα διανύσματα ισχύει:, να βρείτε τα .

**Λύση**

Η δοσμένη σχέση γράφεται:

(

**10.** Αν για τα διανύσματα δίνεται ότι: = 2, = 3 και  και

=3+2 , να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων και .

**Λύση**

Θα βρούμε τη γωνία των και μέσω του συνημιτόνου της από τον τύπο:

● Υπολογίζουμε αρχικά το :

● Υπολογίζουμε στη συνέχεια το :

= ( λόγω της (2) ) = 3+2∙(–3) = 3∙22−6 =12−6 = 6

= 6 (3)

● Υπολογίζουμε τώρα το , βρίσκοντας πρώτα το 2. Έχουμε ότι:

2 = = ( λόγω της (2) )

= 9+12∙(+4= 9∙4−36+4∙9 = 36−36+36 = 36 2 = 36

= 6 (4) , αφού ≥0.

Οπότε από την (1) λόγω των (3) και (4) έχουμε ότι:

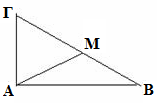
.

Παρατήρηση

Η γωνία δύο διανυσμάτων και υπολογίζεται μέσω του συνημιτόνου της από τον τύπο:

**11.** Να δείξετε ότι η διάμεσος ΑΜ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ με =90ο , που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ, είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

**Λύση**

 Θα δείξουμε ότι: ΑΜ=****.

Επειδή η ΑΜ είναι διάμεσος της πλευράς ΒΓ, έχουμε ότι:



(1)

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α, έχουμε ότι:

● (2) από το Πυθαγόρειο Θεώρημα και

● = 0 (3) , διότι

Οπότε η (1) λόγω των (2) και (3) γίνεται:

****  **** 2**** ΑΜ=****.

**12.** Αν και , να δείξετε ότι τα είναι κάθετα.

**Λύση**

Έχουμε ότι: =(−5, 3)⋅(−6, −10)=−5⋅(−6)+3∙(–10)=30–30=0 =0 .

**13**. Αν =(−1,−2) και =(−3,−1), να υπολογίσετε την γωνία τους.

**Λύση**

Θα βρούμε τη γωνία των και μέσω του συνημιτόνου της από τον τύπο:

● Υπολογίζουμε αρχικά το : =(−1,−2)∙(−3,−1)=−1⋅(−3)+(−2)∙(–1)=3+2=5 =5 (2)

● Υπολογίζουμε στη συνέχεια τα , :

=== = (3)

και

=== = (4)

Οπότε από την (1) λόγω των (2), (3) και (4) έχουμε ότι:

.

**14**. Να βρείτε το είδος της γωνίας των διανυσμάτων  και  αν:

**i)** =(3,–4) και =(−2,–5) , **ii)** =(1,4) και =(2,–3) , **iii)** =(3,–5) και =(5,3)

**Λύση**

**i**) Έχουμε ότι: =3⋅(−2)+(–4)⋅(–5)=−6+20=14>0

Αφού =14>0 η είναι οξεία.

**ii**) Έχουμε ότι: =1⋅2+4⋅(–3)=2−12=−10<0

Αφού =−11<0 η είναι αμβλεία.

**iii**) Έχουμε ότι: =3⋅5+(−5)⋅3=15−15=0

Αφού =0 η είναι ορθή.

**15.** Δίνονται τα διανύσματα =(1,λ+2) , =(2,1) και =(0,7). Να βρείτε το λ ώστε:

**i**)  , **ii**)  , **iii**) 

**Λύση**

**i**) Έχουμε ότι: =0 1⋅2+(λ+2)⋅1=0 2+λ+2=0 λ+4=0 λ=−4

**ii**) Έχουμε ότι:  det()=0=0 1∙1–2∙(λ+2)=0

1−2λ−4=0 −2λ−3=0 −2λ=3 λ=−

**iii**) Έχουμε ότι:  2∙(1, λ+2)–(2, 1)=(0,7) (2, 2λ+4)–(2, 1)=(0,7)

(2−2, 2λ+4−1)=(0,7) (0, 2λ+3)=(0,7) 2λ+3=7 2λ=7−3 2λ=4 λ=2

**16.** Αν , να βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα **** κάθετο στο .

**Λύση**

Έστω =(x, y) το ζητούμενο διάνυσμα. Τότε και σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε ότι:

● το είναι μοναδιαίο =1 =1 x2 + y2 =1 (1)

● ⊥ =0 (4, 3)∙(x, y)=0 4x+3y=0 (2)

Λύνουμε τώρα το σύστημα των (1), (2) ως εξής:

(2) 4x=−3y x= − y (3)

Η (1) λόγω της (3) ισοδύναμα γράφεται:

(− y)2 + y2 =1 y2 + y2 =1 y2 + y2 =1 y2 =1 y2 =1

y2 = y = ± y = ± y = ή y = −

Οπότε:

Αν y = , τότε από την (3) έχουμε ότι: x= − ∙ x = −

Άρα μία λύση του συστήματος είναι η: (x, y) = (− , )

Αν y =− , τότε από την (3) έχουμε ότι: x= − ∙(− )x =

Άρα μία άλλη λύση του συστήματος είναι η: (x, y) = ( ,− )

Επομένως το ζητουμενο μοναδιαίο διάνυσμα **** είναι το:

**=**(− , ) ή **=**( ,− ) .

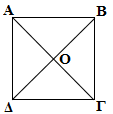
Με τη βοήθεια των παραπάνω λυμένων ασκήσεων ας προσπαθήσουμε στη συνέχεια να λύσουμε τις ακόλουθες **Ασκήσεις**:

**1.** Αν  και , να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

**i**)  , **ii**)  , **iii**)  , **iv**)  , **v**)  , **vi**) 

**2**. Αν  και , να υπολογίσετε τα:

**i**)  , **ii**) , **iii**) 



**3.** Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ κέντρου Ο με πλευρά α. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

**i)**  , **ii)**  , **iii)**  , **iv)**  , **v)**  ,

**vi)** 

**4.** Αν =(–1,2), =(3,–2) και =(1,3), να υπολογίσετε τα: **i)**  και **ii)** .

**5.** Αν  ,  και =(–2,3), να βρείτε το είδος των γωνιών:

**i)**  , **ii)**  , **iii)** .

**6.** Δίνονται τα διανύσματα  και . Να βρείτε τη γωνία τους.

**7.** Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(1,2), Β(–2,1) και Γ(3,6). Να βρείτε τη γωνία Α.

**8.** Αν και να βρείτε το λ ώστε:

**i**) =900 , **ii**)  , **iii**) =45ο

**9.** Αν  να βρείτε ένα διάνυσμα **** με μέτρο 5 κάθετο στο .

**Αφού λοιπόν διαβάσετε πολύ καλά την περίληψη της θεωρίας και τις λυμένες ασκήσεις, στη συνέχεια ασχοληθείτε με τις ασκήσεις για λύση, οι οποίες είναι παρόμοιες με τις λυμένες.**

Περιμένω τις ερωτήσεις σας και τις προσπάθειές σας για λύση των ασκήσεων στο

e-mail: tzanetatos@sch.gr

**Να είστε καλά και να προσέχετε !!!**

Ο καθηγητής σας των Μαθηματικών Προσανατολισμού

Γεράσιμος Τζανετάτος

\*\*\* Η περίληψη της θεωρίας προέρχεται από το σχολικό βιβλίο, ενώ οι εκφωνήσεις των ασκήσεων προέρχονται από τον ιστότοπο [plansmath.blogspot.com](http://www.study4exams.gr).