**Γεια σας και χαρά σας και πάλι καλά μου παιδιά !**!!

Καταρχάς ελπίζω κάθε φορά που επικοινωνούμε ότι σας βρίσκω καλά στην υγεία σας, όπως και τους δικούς σας, δυνατούς και γεμάτους αισιοδοξία.

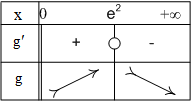
Όπως βλέπετε αγαπημένοι μου μαθητές και αγαπημένες μου μαθήτριες, δεν σας ξεχνώ. Πώς θα μπορούσε άλλωστε να συμβεί «κάτι τέτοιο». . .. Πάμε λοιπόν και πάλι, πιστεύω με πολλή «όρεξη» **πια** από την πλευρά σας, στα «δικά μας» !!! Όπως ήδη σας έχω γράψει σε προηγούμενα μαθήματα, **πρέπει επιτέλους να κινητοποιηθούμε για να κερδίσουμε τον χαμένο χρόνο!!!**

Στο σημερινό μας μάθημα ας δούμε αρχικά τις λύσεις των Ασκήσεων, που είχαμε για λύση επάνω στην έννοια της μονοτονίας συνάρτησης από το προηγούμενο μάθημα. Είχαμε λοιπόν για λύση τις εξής **Ασκήσεις**:

* **ΑΣΚΗΣΗ 1**

Εκφώνηση  
  
Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

1. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0ec66bff6f5a2977cbb9bdebaf88b699.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6a7773e22268a70ad94c11fdc697a795.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bf830cc9737218287dbad6567dc570e6.png.
2. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e975a4ffc86a0900e4ab27424a91d23c.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/705cf0909a324a19b0f87330bc866096.png.

Λύση  
i. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.pngείναι το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/db8e3152c2efed91c94111bd3dab1811.pngκαι για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6a7773e22268a70ad94c11fdc697a795.pngείναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.  
  
H συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.pngείναι παραγωγίσιμη για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6a7773e22268a70ad94c11fdc697a795.png με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/729a3677076a2cb3bdb14403605a1895.png.  
  
Είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cf91544f26641a0565b5a2f4d3970a39.png, αφού http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bf830cc9737218287dbad6567dc570e6.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9b12102f8cf6f88ff4928695a02e74eb.png, για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6a7773e22268a70ad94c11fdc697a795.png.  
  
Οπότε, έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/10b7bd6c1443a4a941bf76e0b3da7329.png για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6a7773e22268a70ad94c11fdc697a795.png.  
  
Άρα η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι γν. φθίνουσα στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c37a1787d79eb203fe064b7d30a5e9c.png.  
  
ii. H συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a4709a89071fe3fbfbc11729d0cf6bcd.pngείναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/61b44477ebc6cfb32245963c879a34bb.png.  
H συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a4709a89071fe3fbfbc11729d0cf6bcd.pngείναι παραγωγίσιμη με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/341df39bbe110e204b54aa5f4487c571.png.  
Βρίσκουμε το πρόσημο της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/66410fd9a619b9d68697ad8770c18cf3.png  
Έστω http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/36e94629457cc97b93394d83f7011104.png.  
Το πρόσημο της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/12db05228ab8330ed5e25ab0f86e1005.pngκαι η μονοτονία της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a4709a89071fe3fbfbc11729d0cf6bcd.png φαίνονται στον πίνακα:  
  
  
  
Άρα:

* Αφού http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4d03e6c0494e6a87d1fea8f29a1f4d5c.png για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/95ba589a4d82db870688c34a50f63ea3.png, έπεται ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a4709a89071fe3fbfbc11729d0cf6bcd.pngείναι γν. αύξουσα

στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ae1fba00a755f86a2f255aa4dcaa8aa7.png.

* Αφού http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4125e7f1ba28a052cec33b543be6700f.png για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4a348bba2b9f925f8e378e2f87d73a1e.png, έπεται ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a4709a89071fe3fbfbc11729d0cf6bcd.pngείναι

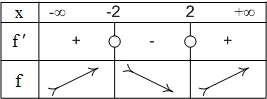
γν. φθίνουσα στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3cdbaf21586349c654fe97c9341d88ba.png.

* **ΑΣΚΗΣΗ 2**

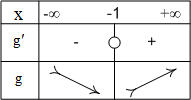
Εκφώνηση  
Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

1. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ef9de0c179366d84b2b7841bdb70d8d3.png
2. http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/899fb5c83eb79b20aa465b1a3b4de04b.png

Λύση  
i. Το πεδίο ορισμού της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.pngείναι το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/db8e3152c2efed91c94111bd3dab1811.png, στο οποίο είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9617d607544e3e3b36fcd0c140419469.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cd9ad9f4041b721c6dc6eb96f991514c.png.  
H συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c37a1787d79eb203fe064b7d30a5e9c.pngμε

http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/345bb597d47b14b864e8cbca6143b2ab.png.  
Είναι: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6cfd4defcfc3b777ed5162c60df005ef.png  
Το πρόσημο της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ae6a90878564be90081cba4b1334cf55.pngκαι η μονοτονία της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.pngφαίνονται στον παρακάτω πίνακα:  
  
  
  
Άρα:

* Αφού http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e32bc01f0ee9e10cf0c1ab90806cdbe1.png για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0e1ad192c0f92aa2ae1761a5e9524115.png, έπεται ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.pngείναι γν. αύξουσα στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e3c9e8b855a4a224ab0aa006bb457015.pngκαι στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8cce620b540649ecb3d7ed9f8b782418.png.
* Αφού http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/10b7bd6c1443a4a941bf76e0b3da7329.png για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c211e24bd0ada0c4e182ec1c848f6a5b.png, έπεται ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.pngείναι γν. φθίνουσα στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ffd14c6bb993aba40badec4bdfb05246.png.

ii. Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a4709a89071fe3fbfbc11729d0cf6bcd.png, ορίζεται όταν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a3b8308002c20eda03e35d80acadc192.png, που ισχύει για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6a7773e22268a70ad94c11fdc697a795.png, αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/927470c162d1b38d5150f852d9589ea1.png, άρα το πεδίο ορισμού της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a4709a89071fe3fbfbc11729d0cf6bcd.pngείναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3bcf982f00bf7d3f005e3b18d7609545.png, στο οποίο είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.  
Είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/621bbe347c4c8db0c8571240664837b4.png.  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c163c66a9b7d2e5d4405355e90e04fa0.png έχει μία μόνο ρίζα την http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/93acf7d6f789f7bf96e35e19c1a1317f.png.  
Το πρόσημο της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/12db05228ab8330ed5e25ab0f86e1005.pngκαι η μονοτονία της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a4709a89071fe3fbfbc11729d0cf6bcd.png φαίνονται στον πίνακα:  
  
  
Άρα:

* Αφού http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4125e7f1ba28a052cec33b543be6700f.png, για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/958b60e6195f08fdaa0617ef2387f33a.png, έπεται ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a4709a89071fe3fbfbc11729d0cf6bcd.pngείναι γν. φθίνουσα στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2cf41d94925f8e7b2e321b5f9bd5b3ea.png.
* Αφού http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4d03e6c0494e6a87d1fea8f29a1f4d5c.png, για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/624775736a85a00e28d1a500d1dcc3fb.png, έπεται ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a4709a89071fe3fbfbc11729d0cf6bcd.pngείναι γν. αύξουσα στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1965ba1b1e731a4b2b1fac0c5adc49e0.png.
* **ΑΣΚΗΣΗ 3**

Εκφώνηση

1. Να λυθεί η εξίσωση: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c6a9fb3e3d9764a3b35ab8f56449205d.png.
2. Να λυθεί η ανίσωση: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0875b6ba4c30b42aee77791dbcaa3a39.png.

Λύση

1. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngμε τύπο: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d00846e736d9259e848803bb5e93fae1.png.  
   Παρατηρούμε ότι για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a255512f9d61a6777bd5a304235bd26d.png έχουμε:  
   http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fe44412e246f9bcb5faf97599f4d02c1.png  
   άρα το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a255512f9d61a6777bd5a304235bd26d.pngείναι προφανής ρίζα της εξίσωσης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fd05d8d90456c441c8f10641bd8576bc.png.  
   Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι παραγωγίσιμη για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/47a470b7df7d9760c51194fa5bcb2097.png , ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:  
   http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/48a6e5fb11ec2d0eb24e2627bf94e874.png για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/887fb68a10cbd4369b27c90bee0334d8.png ,  
   άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι γνησίως αύξουσα στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/35503a292f79f3aeaa386dd7a9fa45e3.png, συνεπώς η ρίζα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a255512f9d61a6777bd5a304235bd26d.pngτης εξίσωσης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fd05d8d90456c441c8f10641bd8576bc.png είναι μοναδική.
2. Η δοθείσα ανίσωση ισοδυνάμως μετασχηματίζεται ως εξής:  
   http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ff742a12d1bdb34c484fa9ee0e0a6fc0.png   (1)  
   Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngμε τύπο:  
   http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e23f42feac7f4ffbf41627804885034.png http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/887fb68a10cbd4369b27c90bee0334d8.png   (2).  
   Για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/887fb68a10cbd4369b27c90bee0334d8.png έχουμε ότι:  
   http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cfbf0047b797a0ce8ae945aa874c0ac9.png,  
   άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι γνησίως αύξουσα στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f91aca28fea4fbc3f06d39107af4a475.png, συνεπώς για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/887fb68a10cbd4369b27c90bee0334d8.pngέχουμε ότι:  
   http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d8b2141bf3ee639255e9382004254b88.png Τελικά η ανίσωση αληθεύει για τα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5a2ef106749e2fbb3ad3951c28f51bc1.png.

* **ΑΣΚΗΣΗ 4**

Εκφώνηση   
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4d332d688011cc08a1467e34e9f44bf6.png, με τύπο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cfefee12900b4eb5075af4c8f699af45.png.

1. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία της.
2. Για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/31b6b97ae8fc1c8e587facf817f98bd8.png να δειχθεί ότι: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b92778d39250a766544b52345a9fe623.png.

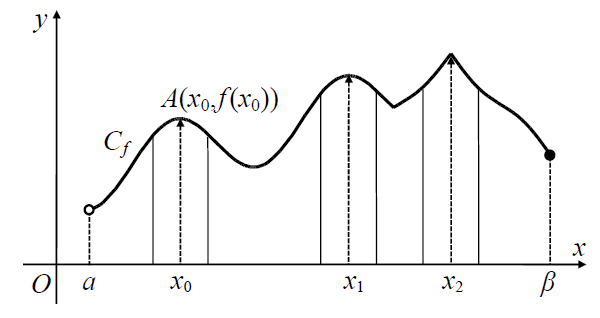
Λύση

1. Η συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8af1d426ec6df7b03eee328fcbedda41.pngσυνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/de27831ef9bb4a9067d4b49fd9a311c5.png, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:  
   http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f820c83bf9fffd120f71ebc8700f325c.png  
   Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/16394926c8a976fc39435a00dfe4fcb9.png, άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι γνησίως φθίνουσα στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1cfee2e596e8eb32fea7806fe92a3658.pngκαι στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a31274c0cfcb14b2ae22afdbd81f2179.png.  
   Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5b2080bad4c8c2f8de08c73b4698f6d8.png, άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι γνησίως αύξουσα στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5272a13bf6d000f034725384ed683d40.png.
2. Για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/31b6b97ae8fc1c8e587facf817f98bd8.png η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι γνησίως φθίνουσα, συνεπώς:  
   http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b56abbf66600d330c461c61220f43cf0.png, δηλαδή το ζητούμενο.

Συνεχίζοντας την επανάληψή μας, ας προχωρήσουμε τώρα στην πολύ βασική έννοια **των τοπικών ακροτάτων συνάρτησης**:

**Τοπικά ακρότατα συνάρτησης**

**Α.** Στο σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngσ’ ένα διάστημα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8aa44fdca3d0c1afe5c2320c5e163042.png.



Παρατηρούμε ότι στο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a34a56808bb16ac25bf9a6f2d2d0b2e2.pngη τιμή της συνάρτησης είναι μεγαλύτερη από την τιμή της σε κάθε “γειτονικό” σημείο του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.png. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngτοπικό μέγιστο. Το ίδιο συμβαίνει και στα σημεία http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2945a8ae557e13d4b4d19bcf8778b1b1.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/199531ca27db116b2c19c0ffaa4ae124.png. Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:  
  
**ΟΡΙΣΜΟΣ**

**Μια συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png, με πεδίο ορισμού http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7fc56270e7a70fa81a5935b72eacbe29.png, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2ac4886b91af930aa50fe68ad73e704b.pngτοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1cb24dafc8035d2c720256620066ae73.png, τέτοιο ώστε**

**http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/24ceba55877384b4a6832e36d406246c.pngγια κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/88e8cec68a057b54365017cbf57c37a0.png.**

**Το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngλέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9ec30a349271bb48ee93017f1e58fe5c.pngτοπικό μέγιστο της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png.**

* + Aν η ανισότητα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/24ceba55877384b4a6832e36d406246c.pngισχύει για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3380195a8703c35a0552323381e606ef.png, τότε η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png παρουσιάζει στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2ac4886b91af930aa50fe68ad73e704b.pngολικό μέγιστο ή απλά μέγιστο, το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9ec30a349271bb48ee93017f1e58fe5c.png.

**Β.** Στο σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngσ’ ένα διάστημα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8aa44fdca3d0c1afe5c2320c5e163042.png.

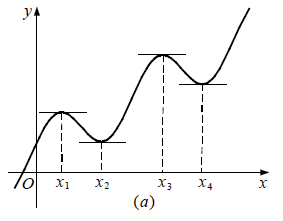
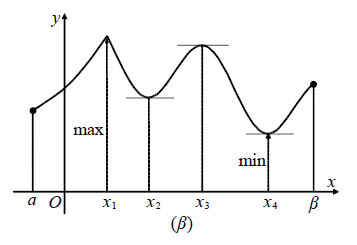


Παρατηρούμε ότι στο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a34a56808bb16ac25bf9a6f2d2d0b2e2.pngη τιμή της συνάρτησης είναι μικρότερη από την τιμή της σε κάθε “γειτονικό” σημείο του   
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.png. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngτοπικό ελάχιστο. Το ίδιο συμβαίνει και στα σημεία http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2945a8ae557e13d4b4d19bcf8778b1b1.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/071997f13634882f823041b057f90923.png. Γενικά, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:  
  
**ΟΡΙΣΜΟΣ**

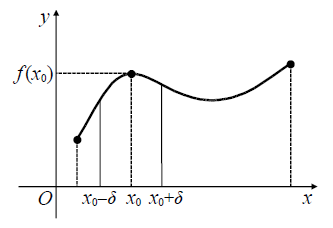
**Μία συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png, με πεδίο ορισμού http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7fc56270e7a70fa81a5935b72eacbe29.png, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2ac4886b91af930aa50fe68ad73e704b.pngτοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1cb24dafc8035d2c720256620066ae73.png, τέτοιο ώστε**

**http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/47fe20f744302d283c4e48389289925a.png, για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/88e8cec68a057b54365017cbf57c37a0.png.**

**Το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngλέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9ec30a349271bb48ee93017f1e58fe5c.pngτοπικό ελάχιστο της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png.**

* + Αν η ανισότητα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/47fe20f744302d283c4e48389289925a.pngισχύει για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3380195a8703c35a0552323381e606ef.png, τότε η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2ac4886b91af930aa50fe68ad73e704b.pngολικό ελάχιστο ή απλά ελάχιστο, το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9ec30a349271bb48ee93017f1e58fe5c.png.
  + Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngλέγονται τοπικά ακρότατα αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται θέσεις τοπικών ακρότατων.
  + Το μέγιστο και το ελάχιστο της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngλέγονται ολικά ακρότατα ή απλά ακρότατα αυτής.
* **ΣΧΟΛΙΑ**
  1. Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο. **(βλέπε σχήμα (α))**  
       
     
  2. Αν μια συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. **(βλέπε σχήμα (β))**  
     
  3. Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης. **(βλέπε σχήμα (α))**
* **Θεώρημα Fermat**

Έστω μια συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngορισμένη σ’ ένα διάστημα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/659d23f0ed16cdb87b1d41c7b58b52f4.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngένα εσωτερικό σημείο του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/659d23f0ed16cdb87b1d41c7b58b52f4.png. Αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngκαι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ea4e6d1373ff7a834d5d6f86005cf0e5.png .  
  
**Απόδειξη**



Ας υποθέσουμε ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngτοπικό μέγιστο.  
  
Επειδή το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngείναι εσωτερικό σημείο του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/659d23f0ed16cdb87b1d41c7b58b52f4.pngκαι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει σ’ αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1cb24dafc8035d2c720256620066ae73.pngτέτοιο, ώστε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ce0b0c9531e195c5d9623610391b018c.pngκαι

http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/24ceba55877384b4a6832e36d406246c.png, για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c430e631495f8f415d0ea73eaac99018.png   **(1)**

Επειδή επιπλέον η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.png, ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/50accb3e931c9355ac405f7b66e491fd.png.  
Επομένως,  
— αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/93c1eb1df6459ecf28b4f12c97af72ba.png, τότε, λόγω της **(1)**, θα είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1ccf55723e67a9351c66b1c27ff26dd2.png, οπότε θα έχουμε

http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ea9e4d0a07b977872431f1ed0e0e38e5.png   **(2)**

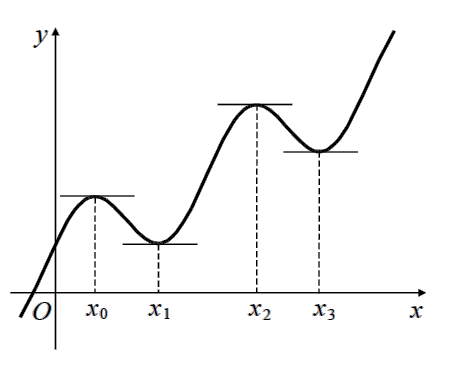
— αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0f260e4ad3b6d726f254772b2a41d56c.png, τότε, λόγω της **(1)**, θα είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5b26d7f643ffafcd98783ffa025c0337.png, οπότε θα έχουμε

http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1d9c03c146e281bb6289e41ae022ebfd.png   **(3)**

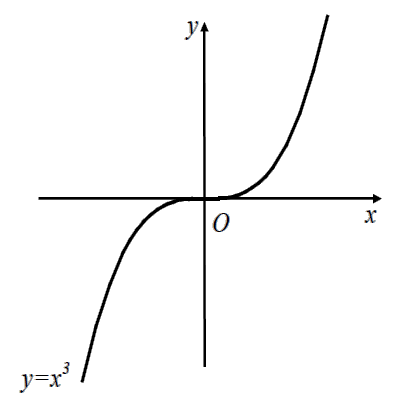
Έτσι, από τις **(2)** και **(3)** έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ea4e6d1373ff7a834d5d6f86005cf0e5.png.  
  
Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

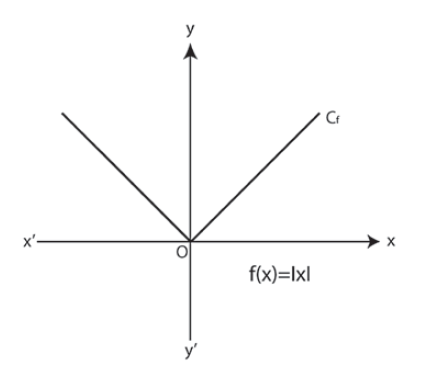
**Σημαντικές Παρατηρήσεις**

1. Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.  
   Ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.
2. Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν μια συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα.
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης, δεν είναι πάντα το μέγιστο αυτής ενώ το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης, δεν είναι πάντα το ελάχιστο αυτής.
4. Αν μία συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι συνεχής σε ένα διάστημα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/13ac621dab037fd260a54755bb2382a3.png, τότε η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαίρνει στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/13ac621dab037fd260a54755bb2382a3.pngμία μέγιστη τιμή Μ και μία ελάχιστη τιμή m. Δηλαδή, υπάρχουν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4e3204f423d9e052dfa3454f93b8c9fc.pngώστε αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/63a484e0c349517acfb0b89c901a6b36.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/37b741284eee5b7ad9a62d689986f611.pngνα ισχύει: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/05cab316d28c481735cb0016c9ac84c1.pngγια κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1b7e1de5854145338ea14e58310eda48.png.
5. Το θεώρημα Fermat ερμηνεύεται γεωμετρικά ως εξής:  
     
   H ισότητα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ea4e6d1373ff7a834d5d6f86005cf0e5.pngσημαίνει ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngστο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6d30101002a4db82c638455325731ed0.pngείναι παράλληλη προς τον άξονα Οx. **(βλέπε σχήμα)**



1. Το αντίστροφο του θεωρήματος του Fermat δεν ισχύει, δηλαδή:  
   Υπάρχει περίπτωση για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngνα έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ea4e6d1373ff7a834d5d6f86005cf0e5.png, αλλά η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngνα μην παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.png. Για παράδειγμα, θεωρούμε τη συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ecf17347eb488fac2782a486d659531e.png.  
   Τότε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b00fcf96556c01d591b912520476e327.pngαλλά η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν παρουσιάζει στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f0ec1d844da2f01f5360aaf2be471ca.pngτοπικό ακρότατο, εφ’όσον για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/97fdf90850f660f05349f4ad145b62dc.pngέχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5da31a14fd918f3bcb2e0d980ea37610.pngκαι για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/887fb68a10cbd4369b27c90bee0334d8.pngέχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3d97eb56e02c2889dd20a89529548180.png. **(βλέπε σχήμα)**



1. Υπάρχει περίπτωση η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngνα παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα σημείο και να μην είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.  
   Για παράδειγμα η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/76b21a26e151da2a0f3ad55245a497cb.png παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f0ec1d844da2f01f5360aaf2be471ca.png, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f0ec1d844da2f01f5360aaf2be471ca.png. **(βλέπε σχήμα)**  
   
2. Αν για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d25baea42c72cd234aa1e059c2d736ef.pngισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3fef4ba8eb5d964e81f473524bcef72d.png, τότε η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν έχει ακρότατα.
3. Αν στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c95182747c508bf913c424e62c9a8d6.pngη http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngδέχεται οριζόντια εφαπτομένη δεν σημαίνει ότι υποχρεωτικά η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει ακρότατο στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c95182747c508bf913c424e62c9a8d6.png.  
     
   Για παράδειγμα η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8af7b610d5a917c13d6dce2d48bb5872.png, η οποία δέχεται εφαπτομένη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f0ec1d844da2f01f5360aaf2be471ca.png, αλλά δεν παρουσιάζει ακρότατο.
4. Αν το σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngείναι άκρο του διαστήματος http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/659d23f0ed16cdb87b1d41c7b58b52f4.png, η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngτοπικό ακρότατο και η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.png, τότε γενικά δεν αληθεύει ότι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/98202d1f9f1ccbea0c254a7ea136ff8b.png.  
   Για παράδειγμα, η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c623bbda9e4d1bde0708598ed4cf8143.png, παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/71d6632eebc332f33ab4da83aed3c0a9.pngόμως http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3106e609484d06171cd8fc9227cc9563.png.
5. Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακρoτάτων μιας συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngσ’ ένα διάστημα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/967878d1da852d4b07a961e3168b0fff.pngείναι:
   * Τα εσωτερικά σημεία του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/967878d1da852d4b07a961e3168b0fff.pngστα οποία η παράγωγος της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngμηδενίζεται.
   * Τα εσωτερικά σημεία του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/967878d1da852d4b07a961e3168b0fff.pngστα οποία η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν παραγωγίζεται.
   * Τα άκρα του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/967878d1da852d4b07a961e3168b0fff.png(αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα εσωτερικά σημεία του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/967878d1da852d4b07a961e3168b0fff.pngστα οποία η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngστο διάστημα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/967878d1da852d4b07a961e3168b0fff.png.

Με βάση την παραπάνω Θεωρία και το πολύ βασικό Θεώρημα Fermat ας δούμε στην συνέχεια διάφορα **Παραδείγματα:**

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1**

Εκφώνηση  
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/fddece76e1169cd78e9ecad73e1494a6.png. Να βρείτε:

1. Τα κρίσιμα σημεία.
2. Τις πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων.
3. Το σύνολο τιμών της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png.

Λύση

1. Είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2ad667764c2f8a2469c851004a67c332.png  
     
   Κρίσιμα σημεία είναι:  
   α) Τα εσωτερικά σημεία του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a9e1fb8ae8dc8d31a945647937f0fa6d.pngστα οποία η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν παραγωγίζεται.  
   β) Οι ρίζες της εξίσωσης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4317909f245af4ea6a94a0635b19d487.png
   * Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/887fb68a10cbd4369b27c90bee0334d8.png, η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι παραγωγίσιμη με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2e3c6982c9b57305c85e124d85a1549f.png.
   * Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/97fdf90850f660f05349f4ad145b62dc.png, η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png είναι παραγωγίσιμη με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7791a6416843b7a08971963e94fb6449.png.
   * Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e11729b0b65ecade3fc272548a3883fc.pngέχουμε: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b35431347e857a76a8b88de32cd3c9b5.png.   
     Και http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/188242db89cf13e55c42f5d43f3b0081.png.

Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 και συνεπώς το 0 είναι κρίσιμο σημείο.  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/887fb68a10cbd4369b27c90bee0334d8.pngη εξίσωση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4317909f245af4ea6a94a0635b19d487.pngθα μας δώσει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/842367e9ced3bf6f9b3011ab9cbd41bb.pngπου είναι δεκτή.  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/97fdf90850f660f05349f4ad145b62dc.pngη εξίσωση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4317909f245af4ea6a94a0635b19d487.pngθα μας δώσει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d87df43ecb373e36a769a50adc35a29f.pngπου είναι δεκτή.  
Άρα κρίσιμα σημεία είναι τα :http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1f1fe5aeb1dcaff64a6ee43219fbb43f.png.

1. Οι πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων είναι:  
   α) Τα κρίσιμα σημεία και  
   β) τα άκρα του διαστήματος http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0fd689d383fe1460275cf78e3e0cf049.png  
   Άρα πιθανές θέσεις ακρότατων είναι τα σημεία: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ebf14bbab430d82f888e125a3621b671.png
2. Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι συνεχής για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3ad04c10794b0ea35a86729c92320d6a.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/074d38bb6b860d320dc0be6c00fb399c.pngως παραγωγίσιμη. Και στο 0 θα εξετάσουμε αν υπάρχει το όριο:  
     
   http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/808ca012db64a1630283d4c4f53ab43a.png  
   Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι συνεχής και στο 0, οπότε είναι συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cae8dac6694f32e3af5e94165c43d4fd.png  
   Επειδή η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/939b17134a44bb821e6c01efd044b32e.png, το σύνολο τιμών της θα είναι τοhttp://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5c47e81deee39eb100e9e529dc5c7c54.png,  
   όπου http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f8f57715090da2632453988d9a1501b.pngείναι η ελάχιστη και http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/69691c7bdcc3ce6d5d8a1361f22d04ac.pngη μέγιστη τιμή αντίστοιχα της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/939b17134a44bb821e6c01efd044b32e.png  
   Άρα τα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f8f57715090da2632453988d9a1501b.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/69691c7bdcc3ce6d5d8a1361f22d04ac.pngείναι αντίστοιχα η μικρότερη και η μεγαλύτερη από τις τιμές της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngστις θέσεις τοπικών ακρότατων.  
   Έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e2a061a5ee974f36bf4280bac3962260.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d6bda00149a0151f9e0d06d24fb28470.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/84514aadf8e5124e231767359b358ae7.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/30e88c9856ad9ae8efd52078cbd73c30.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b503d328b4c33802aca9a68ae2598eb6.png  
   Άρα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e65e950e0031f697610fb56d03f51dc3.png και http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ab49215617c8dfd74667bd085f03faec.png, οπότε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/276617a4620eb79a70c35cba7fa16140.png.

Μεθοδολογία  
Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngστο πεδίο ορισμού της, δηλαδή:  
α) Τα εσωτερικά σημεία του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/659d23f0ed16cdb87b1d41c7b58b52f4.pngστα οποία η παράγωγος της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngμηδενίζεται.  
β) Τα εσωτερικά σημεία του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/659d23f0ed16cdb87b1d41c7b58b52f4.pngστα οποία η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν παραγωγίζεται.  
Τα κρίσιμα σημεία μαζί με τα άκρα του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/659d23f0ed16cdb87b1d41c7b58b52f4.png(αν αυτά ανήκουν) θα μας δώσουν τα πιθανά ακρότατα.  
  
**Σημείωση:**  
Aν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/13ac621dab037fd260a54755bb2382a3.pngτότε το σύνολο τιμών της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngθα είναι το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ba6b57aa9a15f2ee4db420cc0f475d7b.png όπου http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f8f57715090da2632453988d9a1501b.png και http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/69691c7bdcc3ce6d5d8a1361f22d04ac.png η μικρότερη και μεγαλύτερη αντίστοιχα από τις τιμές της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngστα σημεία που έχουμε πιθανά ακρότατα.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2**

Εκφώνηση  
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f95bfc116e0bda1df8e170ec98e65f21.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/32866ee72895a8ef9aef1a2ac113f25a.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0eb524a887a29f252eca5b86de6d50e3.png.  
Aν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/aa9d3c3404bcef58965e4bb1fe9fb23c.png έχει ακρότατο στο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/578ef8237baa5c699c97b2465ff7c0b0.png, να βρείτε τα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bccfc7022dfb945174d9bcebad2297bb.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/071997f13634882f823041b057f90923.png.

Λύση  
Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngέχει για πεδίο ορισμού το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/61a47927a61c3d8a6b9639e40661b9fa.png  
Η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7fc56270e7a70fa81a5935b72eacbe29.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b64b498ab1eca6843a48dd42164ba866.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/555c0ef544fd3b2461871ba9889f0b0b.png   **(1)**  
Στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/0df3251a2e5f5c7a021ba89d759e0e35.pngη http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη,  
  
άρα λόγω θεωρήματος Fermat θα ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/225a75d0512b2918deb6c3a69f4007e7.png   **(2)**  
  
H σχέση **(2)** λόγω της **(1)** θα μας δώσει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ab522f84798a17b9b688d282cf838b8e.png   **(3)**  
έχουμε ότι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bd34550b7ca445e8d7cd3d2e2048e314.pngάρα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f726dccbc3381cde4fccd420295e9138.png(λόγω της **(3)**)  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ca02cc087eedf8380b29ff89beef6a76.png.

Μεθοδολογία  
Για να βρούμε τις τιμές παραμέτρων http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9cdb852b1671bc720670819718ac6203.png, ώστε:

* μια συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngνα παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f9a3b8e9e501458e8face47cae8826de.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8f43fce8dbdf3c4f8d0ac91f0de1d43d.pngκαι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι παραγωγίσιμη στα σημεία αυτά, εφαρμόζουμε το θεώρημα Fermat και απαιτούμε  
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3919f3bd9fc3e4b60b28423bedd5a08c.png  **(1)**, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7d883699f571505f6238c869e50f8151.png   **(2)**.

Από τη λύση του συστήματος των δυο εξισώσεων προσδιορίζουμε τα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b59eed062c2366d72ce6891a3178440b.png.

**Σημείωση:**  
Αν τώρα γνωρίζουμε μόνο ένα σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b0e3306b8c6aef9611ef3c7e6fcfa4d5.pngτο οποίο είναι ακρότατο της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngτότε απαιτούμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/98202d1f9f1ccbea0c254a7ea136ff8b.png  **(1)** και http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d3b4f82cc00d3708a01a5faffccd1bd5.png  **(2)**.  
  
Από τη λύση του συστήματος των δυο εξισώσεων προσδιορίζουμε τις παραμέτρους http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/431cef7e6de4eaf4478a41cc1d58ee00.png.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3**

Εκφώνηση  
Αν για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/887fb68a10cbd4369b27c90bee0334d8.pngισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7e7ab98d52b67994cbc630cf7ce7125f.png, να αποδείξετε ότι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c01e9cd2d695d23b9c86bc9fe6ebc46c.png.

Λύση

* Θεωρούμε τη συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c6f1b4db02202b7a183eacb2a5a3d725.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/494dee243fafd2897bd941bc4d3a7750.png.
* Για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/494dee243fafd2897bd941bc4d3a7750.pngείναι:   
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/33babb74d6a7e2abb165bc4e87df8e2a.pngΆρα η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a85290f69135b39102fc88c1b6fbba58.pngτου πεδίου ορισμού της.
* Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4041eda5a658493fcb430d19ce95faaa.pngμε:   
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/49e74ae6ef05bd51bf03d6eda153f78a.png,   
  οπότε είναι παραγωγίσιμη και στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a85290f69135b39102fc88c1b6fbba58.pngμε:   
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8b6559e014076343ad54442361905a35.png

Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat, οπότε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/20b596c749c62fdb9aca3d17f24be095.png.   
Είναι: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7632b2cb8f72e271a7dc08b9e600cb47.png  
  
Σημείωση: Στα επόμενα η φράση «ισχύει το Θεώρημα Fermat» χρησιμοποιείται με την έννοια ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat.

Μεθοδολογία  
Όταν δίνεται μια ανισοτική σχέση, η οποία ισχύει για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d25baea42c72cd234aa1e059c2d736ef.png, όπου http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/659d23f0ed16cdb87b1d41c7b58b52f4.png διάστημα και ζητείται να αποδειχθεί μια ισότητα, τότε συνήθως ακολουθούμε την εξής μέθοδο:

* Μεταφέρουμε όλους τους όρους της ανισότητας σ’ ένα μέλος, συνήθως στο πρώτο, αν δε βρίσκονται ήδη στο μέλος αυτό.
* Θεωρούμε συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngορισμένη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/659d23f0ed16cdb87b1d41c7b58b52f4.png με τύπο ίσο με το πρώτο μέλος της ανισότητας.
* Μετασχηματίζουμε την αρχική ανισοτική σχέση και καταλήγουμε σε μια ανισότητα της μορφής http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b32b430a7026e8b7ac3e03df4e2a4cbf.pngή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e7b0733afb1390676e25da1edcdeb6b6.png, όπου http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b635a8b8aef390217fd161a18ac9d2e.pngεσωτερικό σημείο του διαστήματος http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/659d23f0ed16cdb87b1d41c7b58b52f4.png. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b635a8b8aef390217fd161a18ac9d2e.pngτου πεδίου ορισμού της.
* Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bcedcda20669be00e20d0b8ccad5cb67.png, οπότε έχουμε εξασφαλίσει και τις τρεις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, επομένως ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/70f28cb53fc778a2b8433fd30e7be615.pngαπό την οποία προκύπτει και η ζητούμενη ισότητα.
* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4**

Εκφώνηση  
Αν για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/887fb68a10cbd4369b27c90bee0334d8.pngισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/31524c4fc397c8d604a19c1c9b87fff1.png, όπου http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/54e34811690bfe3470cb228be9be1bfd.png, να αποδείξετε ότι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d878f525f42f307af46bc6ef8a8cef4b.png.

Λύση

* Θεωρούμε τη συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/814cafec2f8af3510a72435124b0fb32.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/494dee243fafd2897bd941bc4d3a7750.png.
* Για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/494dee243fafd2897bd941bc4d3a7750.pngείναι:  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cc7a73550d1ec51adf32a5be1001a2fa.png  
    
  Άρα η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο εσωτερικό σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/193d7f6d064a3490529936c0f8693e38.pngτου πεδίου ορισμού της.
* Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4041eda5a658493fcb430d19ce95faaa.pngμε:  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2bdb28eb45852106026a71d83951c518.png, οπότε είναι παραγωγίσιμη και στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/193d7f6d064a3490529936c0f8693e38.pngμε:  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5b7530f7efceea1363fd836b773d7af4.png

Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat, οπότε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9af752d796fed879e1fe94f78ccf3e5b.png.   
Είναι:  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/29299bf60ceac7fa8aa0a169cf3cb588.png

Μεθοδολογία  
Όταν δίνεται μια ανισοτική σχέση, η οποία ισχύει για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d25baea42c72cd234aa1e059c2d736ef.png, όπου http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/659d23f0ed16cdb87b1d41c7b58b52f4.png διάστημα και ζητείται να αποδειχθεί μια ισότητα, τότε συνήθως ακολουθούμε την εξής μέθοδο:

* Μεταφέρουμε όλους τους όρους της ανισότητας σ’ ένα μέλος, συνήθως στο πρώτο, αν δε βρίσκονται ήδη στο μέλος αυτό.
* Για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d25baea42c72cd234aa1e059c2d736ef.png, θεωρούμε συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngμε τύπο ίσο με το πρώτο μέλος της ανισότητας.
* Μετασχηματίζουμε την αρχική ανισοτική σχέση και καταλήγουμε σε μια ανισότητα της μορφής http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b32b430a7026e8b7ac3e03df4e2a4cbf.pngή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e7b0733afb1390676e25da1edcdeb6b6.png, όπου http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b635a8b8aef390217fd161a18ac9d2e.pngεσωτερικό σημείο του διαστήματος http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/659d23f0ed16cdb87b1d41c7b58b52f4.png. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b635a8b8aef390217fd161a18ac9d2e.pngτου πεδίου ορισμού της.
* Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bcedcda20669be00e20d0b8ccad5cb67.png, οπότε έχουμε εξασφαλίσει και τις τρεις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, επομένως ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/70f28cb53fc778a2b8433fd30e7be615.pngαπό την οποία προκύπτει και η ζητούμενη ισότητα.
* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5**

Εκφώνηση  
Δίνεται συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3fef4ba8eb5d964e81f473524bcef72d.pngγια κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be28fb2f9e26976e330bb728dae915a6.png. Αν ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c58c0e9289aefe87847959d2bfc638cb.pngγια κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be28fb2f9e26976e330bb728dae915a6.png και http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/132c8644bf0affdf6857571014cfe3b9.png, να αποδείξετε ότι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5ad898571bfc8d7959569435b74191b9.png.

Λύση

* Θεωρούμε τη συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/92103b25c4752f07d5bbc235d5b1219e.png, http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be28fb2f9e26976e330bb728dae915a6.png.
* Για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be28fb2f9e26976e330bb728dae915a6.pngείναι:  
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/18c7f8f30405e01d28c3795137da13fd.pngΆρα η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b2f5ff47436671b6e533d8dc3614845d.pngπαρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a85290f69135b39102fc88c1b6fbba58.pngτου πεδίου ορισμού της.
* Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b2f5ff47436671b6e533d8dc3614845d.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.pngμε:  
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/15e336bba824d5521340c9f7892f7fa8.png, οπότε είναι παραγωγίσιμη και στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a85290f69135b39102fc88c1b6fbba58.pngμε:   
    
  http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4c0220af4193903fe359eaaf38208419.png

Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat, οπότε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/52c60c458d639302d92c417a33cb1386.png.  
Είναι:  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/515c27da08d8bf00dadd6cc252e87bd5.png, αφού http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/cfa456f10e811e024d1c4a1a82955457.png

Μεθοδολογία  
Όταν δίνεται μια ανισοτική σχέση, η οποία ισχύει για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d25baea42c72cd234aa1e059c2d736ef.png, όπου http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/659d23f0ed16cdb87b1d41c7b58b52f4.png διάστημα και ζητείται να αποδειχθεί μια ισότητα, τότε συνήθως ακολουθούμε την εξής μέθοδο:

* Μεταφέρουμε όλους τους όρους της ανισότητας σ’ ένα μέλος, συνήθως στο πρώτο, αν δε βρίσκονται ήδη στο μέλος αυτό.
* Για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d25baea42c72cd234aa1e059c2d736ef.png, θεωρούμε συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b2f5ff47436671b6e533d8dc3614845d.pngμε τύπο ίσο με το πρώτο μέλος της ανισότητας.
* Μετασχηματίζουμε την αρχική ανισοτική σχέση και καταλήγουμε σε μια ανισότητα της μορφής http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1106ffef4b99af58589e2283a7ea7b08.pngή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f76e73e49090c61f6e799303d982dffa.png, όπου http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b635a8b8aef390217fd161a18ac9d2e.pngεσωτερικό σημείο του διαστήματος http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/659d23f0ed16cdb87b1d41c7b58b52f4.png. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b2f5ff47436671b6e533d8dc3614845d.pngπαρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b635a8b8aef390217fd161a18ac9d2e.pngτου πεδίου ορισμού της.
* Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b2f5ff47436671b6e533d8dc3614845d.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bcedcda20669be00e20d0b8ccad5cb67.png, οπότε έχουμε εξασφαλίσει και τις τρεις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, επομένως ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/66005e6e07d7ec7915454dff65431e9e.pngαπό την οποία προκύπτει και η ζητούμενη ισότητα.
* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6**

Εκφώνηση  
Αν η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.pngκαι ισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/dae62054bbff0dc2610db07439de8d4b.png**(1)**, για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be28fb2f9e26976e330bb728dae915a6.png και http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e2a061a5ee974f36bf4280bac3962260.png, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngστο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/74251e5f2309147da92c16b417d55fd4.png.

Λύση  
Η **(1)** ισοδύναμα θα μας δώσει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9eb31c9bfda017326522df69a6972eac.png   **(2)**  
Θεωρούμε τη συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7d342b0bb1f34c35e4e407a9faa72e92.png  
Παρατηρούμε ότι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/550fe07e687caed3be02f7185eaa8559.png  
Τότε από την **(2)** έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2751a4e027665dbcdf262f3ba585cfe0.png, για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be28fb2f9e26976e330bb728dae915a6.png, δηλαδή η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2510c39011c5be704182423e3a695e91.pngπαρουσιάζει ελάχιστο στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f0ec1d844da2f01f5360aaf2be471ca.png.  
Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2510c39011c5be704182423e3a695e91.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c9168a5ecb13600230f10894c6651b91.pngγια κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be28fb2f9e26976e330bb728dae915a6.png, άρα παραγωγίσιμη και στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9f0ec1d844da2f01f5360aaf2be471ca.png.  
Οπότε από το Θεώρημα του Fermat έχουμε:  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ae3b4cf2ee92101e606bfbc9ef4883e7.png  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/87e5052ff70480c2a7e28c47e33a92fd.png   **(3)**  
Η εφαπτομένη της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngστο σημείο Α θα έχει εξίσωση:  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9e389a73ae07c0a018d6c5a834ea13bb.png.

Μεθοδολογία  
Αν μας δίνεται ως δεδομένη μια ανισοτική σχέση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/03400e3752bacef4b2813eaebf938170.png( ή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7abcf2d174f3db2c8058bfe9140e9c8f.png) και θέλουμε να προσδιορίσουμε κάποια ζητούμενη τιμή , εργαζόμαστε ως εξής:  
α) Δημιουργούμε την ισοδύναμη ανίσωση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f62e3f2206f29024be487243f089b5b1.png(ή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/832ae2fd9eb245d9a7715edaf2d82b0d.png)  
β) Θέτουμε νέα συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d6e6f3c813600eed591c9ebea32882b0.png  
γ) Βρίσκουμε κατάλληλο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/892581f6aefecae90be73076e1aeee5c.pngτέτοιο ώστε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2b0279c1a9046b107f171965af1a730c.png. Τότε έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/dd9f5a2917f6b8e738702e1a8b893c36.png( ή http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7151d543ed7ff73a05079ddaf6984b32.png) και προφανώς η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2510c39011c5be704182423e3a695e91.pngπαρουσιάζει στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/892581f6aefecae90be73076e1aeee5c.pngελάχιστο (ή μέγιστο).  
δ) Τότε λόγω θεωρήματος Fermat http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1032884aaa46c8ae3919601080d609dd.png. Από αυτή την εξίσωση προσδιορίζουμε την ζητούμενη τιμή.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7**

Εκφώνηση  
Να αποδείξετε ότι αν για μια συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπου είναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.pngκαι ισχύει: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/94d9bc4790c1d932789fec9c2d106b99.png**(1)** , τότε η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν έχει ακρότατα.

Λύση  
Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει στο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d9f603b1b42a3fcaa5de51746d9a2407.pngακρότατο.  
Επειδή το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngείναι εσωτερικό σημείο του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.pngκαι είναι παραγωγίσιμη, λόγω του θεωρήματος Fermat θα ισχύει   
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/98202d1f9f1ccbea0c254a7ea136ff8b.png  **(2)**   
Παραγωγίζοντας τα δυο μέλη της σχέσης **(1)** θα έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3c355725c92592674c9d99eb0e2618a0.png**(3)**  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a34a56808bb16ac25bf9a6f2d2d0b2e2.pngη **(3)** θα μας δώσει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/44a970f96c29953567de7a74c4b7b882.png(λόγω της **(2)**) http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/90bc9b734b37e301348be4f32027cb19.pngπου είναι άτοπο.   
Άρα η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν έχει ακρότατα.

Μεθοδολογία  
Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν έχει ακρότατα εργαζόμαστε ως εξής:   
α) υποθέτουμε ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngέχει ακρότατο σε κάποιο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngτου πεδίου ορισμού της στο οποίο η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι παραγωγίσιμη. Τότε λόγω θεωρήματος Fermat http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7405e4094c79e6bd8cebaf889914977e.png  
β) Με παραγώγιση της δοσμένης σχέσης και αντικατάσταση του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9dd4e461268c8034f5c8564e155c67a6.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngοδηγούμαστε σε άτοπο.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8**

Εκφώνηση  
Έστω συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.png, η οποία για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be28fb2f9e26976e330bb728dae915a6.pngικανοποιεί τη σχέση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4ca9200c53fb087cda8fdbbb1facd782.png.   
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Λύση  
Έστω ότι η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει τοπικό ακρότατο. Επειδή η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.png, το τοπικό ακρότατο θα το παρουσιάζει υποχρεωτικά σε εσωτερικό σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b635a8b8aef390217fd161a18ac9d2e.pngτου πεδίου ορισμού της, επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat, οπότε θα είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/70f28cb53fc778a2b8433fd30e7be615.png **(1)**. Επειδή καθεμία από τις συναρτήσεις http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/65992865d0f21ee620d9c456a8563d99.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e9bef28a2dcfabe3ecb1596e52fb8e15.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.png, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων και η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c81b0ac350642d48322ef760f556d59b.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.png, ως πολυωνυμική, μπορούμε να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης.   
Για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be28fb2f9e26976e330bb728dae915a6.pngέχουμε:   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a7b1480173cf57d5fafd5bed4f22e396.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7fcc4bb511094f92083fb60a1550cd10.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8ca27ed91a1b23b7f383874f21ddf4d1.png**(2)**   
  
Από τη σχέση **(2)** για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/88ac0bfd70ad2795e7e55442b13985fb.pngέχουμε:   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2b7797152d0f97ed13aaaa1ce8b5f461.png  
που είναι άτοπο γιατί η εξίσωση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5f627c34efbe923e2ed990a7f93fd038.pngείναι αδύνατη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.png.  
Άρα η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Μεθοδολογία  
Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα σε ανοικτό διάστημα, συνήθως εργαζόμαστε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει τοπικό ακρότατο, οπότε το τοπικό ακρότατο θα το παρουσιάζει υποχρεωτικά σε εσωτερικό σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b635a8b8aef390217fd161a18ac9d2e.pngτου πεδίου ορισμού της. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat και επομένως θα είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/70f28cb53fc778a2b8433fd30e7be615.png.   
Στη συνέχεια παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης, αντικαθιστούμε το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9dd4e461268c8034f5c8564e155c67a6.pngμε το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b635a8b8aef390217fd161a18ac9d2e.pngκαι καταλήγουμε σε άτοπο.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9**

Εκφώνηση  
Έστω συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.png, η οποία για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be28fb2f9e26976e330bb728dae915a6.pngικανοποιεί τις σχέσεις http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3d97eb56e02c2889dd20a89529548180.png και http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bbce2211fcffaabbc175f51324da1c82.png. Αν η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d9f603b1b42a3fcaa5de51746d9a2407.png, τότε:   
α) Να αποδείξετε ότι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6967262df30e51890246dd1a382daf21.png.   
β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngστο σημείο με τετμημένη http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6967262df30e51890246dd1a382daf21.png.

Λύση  
α) Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.pngκαι παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b635a8b8aef390217fd161a18ac9d2e.pngτου πεδίου ορισμού της, επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat, οπότε θα είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/70f28cb53fc778a2b8433fd30e7be615.png **(1)**.   
  
Επειδή η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c96e4459d96249756636c910dedbafa3.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.png, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3ca4db0c58ade48f92c2b1868501da9e.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.png, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9ff20885f5fe6b0514b8a77788937142.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.png, ως πολυωνυμική, μπορούμε να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης.   
Για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be28fb2f9e26976e330bb728dae915a6.pngέχουμε:   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8640489a51ad5662e57e11c7c7374be9.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b96a35185366c7d151d04b6a9a272c3b.png**(2)**   
Από τη σχέση **(2)** για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/88ac0bfd70ad2795e7e55442b13985fb.pngέχουμε:   
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7faadf69d092ee252d488616cf438895.png  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d3529d2bb82b8ededb874e8562cde377.png**(3)**   
Είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3d97eb56e02c2889dd20a89529548180.pngγια κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be28fb2f9e26976e330bb728dae915a6.png, άρα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/82a5edca126354e5110233cae31ca270.png, οπότε από **(3)** έχουμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6967262df30e51890246dd1a382daf21.png**(4)**.   
  
β) Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e11729b0b65ecade3fc272548a3883fc.pngαπό την αρχική σχέση έχουμε:  
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d224d063fceb123aafa14daafc27d329.png  
Επίσης έχουμε: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/91562efc10bb926b98e722eafd9fb26d.png  
Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngστο σημείο με τετμημένη http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6967262df30e51890246dd1a382daf21.pngείναι:   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/37067d45ecaf943caf149ffb01b28680.png

Μεθοδολογία  
α) Έστω μια συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngη οποία είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ανοικτό διάστημα και ικανοποιεί μια σχέση ισότητας.   
Επειδή η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε και με δεδομένο ότι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι παραγωγίσιμη σε ανοικτό διάστημα το τοπικό ακρότατο θα το παρουσιάζει υποχρεωτικά σε εσωτερικό σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/1e61c90950b20f8df6ae630128e73067.pngτου πεδίου ορισμού της, επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat, οπότε θα είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/70f28cb53fc778a2b8433fd30e7be615.png.

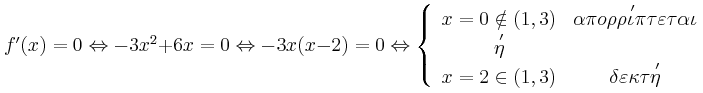
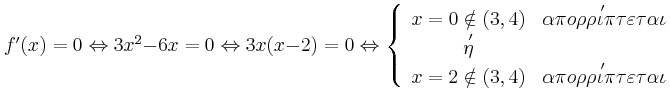
Στη συνέχεια παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης, αντικαθιστούμε το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9dd4e461268c8034f5c8564e155c67a6.pngμε το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b635a8b8aef390217fd161a18ac9d2e.png, οπότε από την εξίσωση που προκύπτει υπολογίζουμε το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b635a8b8aef390217fd161a18ac9d2e.png.   
β) Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/81ee9ebb746de59c215a03015977378a.pngμιας παραγωγίσιμης συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngστο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bbd76ce9622923cc23da1bb6e5d556bf.pngέχει εξίσωση:  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/bb86c0051dfa522443a2d564efb345df.png

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10**

Εκφώνηση  
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/17cff3f4dc89f788b8e13e4fefa29310.png. Να βρείτε:   
α) Τις πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png.   
β) Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png.   
γ) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png.

Λύση  
Είναι:  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be9a337ed0e250688754a63a4c63ff6d.png  
α) Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι:

* Τα άκρα του πεδίου ορισμού, δηλαδή τα 1 και 4.
* Οι ρίζες της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/06605d0b94674429f3ab62bec2350d50.pngστο διάστημα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ee34893cf349f4abf1cbd402f70eb43f.png.
* Τα σημεία του διαστήματος http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ee34893cf349f4abf1cbd402f70eb43f.pngστα οποία η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν παραγωγίζεται.

Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαραγωγίζεται στο διάστημα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c9d8859b4eeb120d209c937fca3a53af.pngως πολυωνυμική με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/278d8c1d958cdbad245d008998f221c1.png.   
Είναι:   
Άρα το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/c81e728d9d4c2f636f067f89cc14862c.pngείναι πιθανή θέση τοπικού ακροτάτου.   
Η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαραγωγίζεται στο διάστημα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8666756b9458fe068d3d3769b68bcdef.pngως πολυωνυμική με http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b3205abdf89908f209a0652b9d0e6bea.png.   
Είναι:   
  
Εξετάζουμε αν η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαραγωγίζεται στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6c589aab0e15670bcf90996a57c22a79.png.   
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/acd880bf6ddb5f0dae393d51157871fd.pngέχουμε:   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/49a7bd1cd0e340b2f60d836431a81b5b.png, οπότε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/4d212725751c47e637751043990c2289.png  
  
Για http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/d25398a4a2929f84944bb171a7f131c0.pngέχουμε:   
  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/26ac2306695989d213fcb39a248c8d69.png, οπότε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5ee4d2e8b89c7b548e7ae267d2d935e5.png  
  
Είναι:  
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/559e21bd7fce7fb71d07abad34e86c81.png  
οπότε η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν παραγωγίζεται στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6c589aab0e15670bcf90996a57c22a79.png.   
Άρα το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/eccbc87e4b5ce2fe28308fd9f2a7baf3.pngείναι πιθανή θέση τοπικού ακροτάτου.  
Επομένως οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων είναι: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9227766b00f62de3e33b6258acf3a381.png.   
β) Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι:

* Οι ρίζες της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/06605d0b94674429f3ab62bec2350d50.pngστο διάστημα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ee34893cf349f4abf1cbd402f70eb43f.png.
* Τα σημεία του διαστήματος http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/ee34893cf349f4abf1cbd402f70eb43f.pngστα οποία η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν παραγωγίζεται.

Επομένως τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/539bd2ca050148d06596339e73e6d96a.png  
γ) Επειδή η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και μη σταθερή στο διάστημα http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/50a065b4e63f296cd12ed48ce54d7eef.png, το σύνολο τιμών της είναι το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/f6325be5890994d7636f13a0d2f9f2c8.png, όπου http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f8f57715090da2632453988d9a1501b.pngη ελάχιστη και http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/69691c7bdcc3ce6d5d8a1361f22d04ac.pngη μέγιστη τιμή αντίστοιχα της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngστο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/50a065b4e63f296cd12ed48ce54d7eef.png.   
Είναι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f8f57715090da2632453988d9a1501b.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/69691c7bdcc3ce6d5d8a1361f22d04ac.pngαντίστοιχα η μικρότερη και η μεγαλύτερη από τις τιμές της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngστις θέσεις των πιθανών τοπικών ακροτάτων.   
Έχουμε:   
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6f0812af22e729cab3b70c5a0ca9728d.png  
Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι το: http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/2201379fba34af45d27d15a235eb01bd.png.

* **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11**

Εκφώνηση  
Έστω συνεχής συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/189a0079bac9f3b38e6c7b29f17064e6.png. Αν http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9dc06a9eb2a9e4fabe4b3a57e9ebbb3f.pngκαι η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν είναι παραγωγίσιμη το πολύ σε ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων του http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b6d98956c5592951ef450ca15cc1c28.png, τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngέχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a05cbb439394eef344f03467c28681e9.png.

Λύση  
Γνωρίζουμε ότι τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι:

* Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η παράγωγος της http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngμηδενίζεται.
* Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν παραγωγίζεται.

Από την εκφώνηση της άσκησης δεν γνωρίζουμε αν η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι παραγωγίσιμη ή όχι. Διακρίνουμε λοιπόν περιπτώσεις:

* Αν η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι παραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/3b6d98956c5592951ef450ca15cc1c28.png, τότε ισχύει το θεώρημα Rolle, αφού από την υπόθεση η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngείναι συνεχής στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/76daf7b805d9aa680950cec980b4e5c7.pngκαι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/9dc06a9eb2a9e4fabe4b3a57e9ebbb3f.png. Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a05cbb439394eef344f03467c28681e9.pngτέτοιο ώστε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b12ca25bef3975c4b71afb50ac87b5d8.png. Επομένως η http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngέχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a05cbb439394eef344f03467c28681e9.png.
* Αν η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a05cbb439394eef344f03467c28681e9.png, τότε αυτό το http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/58fb07e3d4fa708afd0734aab363fd36.pngείναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngέχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/a05cbb439394eef344f03467c28681e9.png.

Με τη βοήθεια τώρα των παραπάνω Παραδειγμάτων ας προσπαθήσουμε να λύσουμε τις ακόλουθες **Ασκήσεις**:

* **ΑΣΚΗΣΗ 1**

Εκφώνηση  
Αν για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be28fb2f9e26976e330bb728dae915a6.pngισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/990a11065db5eee8780b4699ca73f44f.pngμε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/caf0fb1ad2052d8a2a708cfe1dfae209.png**(1)** , να αποδείξετε ότι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/7181fde1a361c930446a280cb4418d93.png

* **ΑΣΚΗΣΗ 2**

Εκφώνηση  
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/b030416d47179f6e7eba3af4832089ca.png.  
Να βρείτε:   
α) Τις πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png.   
β) Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png.   
γ) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png.

* **ΑΣΚΗΣΗ 3**

Εκφώνηση  
Έστω συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngπαραγωγίσιμη στο http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/e1fd601dbae82a538d518550acb1af19.png, η οποία για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/be28fb2f9e26976e330bb728dae915a6.pngικανοποιεί τη σχέση   
http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6a1b56cdde0d4059355d9f935688a5ee.png. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.pngδεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

* **ΑΣΚΗΣΗ 4**

Εκφώνηση  
Αν για κάθε http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/887fb68a10cbd4369b27c90bee0334d8.pngισχύει http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/94f4602b077ba1fe0275f4cf321d054b.png, να αποδείξετε ότι http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/5ad898571bfc8d7959569435b74191b9.png.

* **ΑΣΚΗΣΗ 5**

Εκφώνηση  
Δίνεται η συνάρτηση http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/6ecd7c45419e92cc6cf3c5affca7e5ff.png. Να βρείτε:   
α) Τις πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png.   
β) Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png.   
γ) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης http://www.study4exams.gr/math_k/filter/files/8fa14cdd754f91cc6554c9e71929cce7.png.

Κλείνοντας λοιπόν το σημερινό μας μάθημα, πρέπει στη συνέχεια **να μελετήσουμε πολύ καλά τη Θεωρία και τα παραπάνω Παραδείγματα** και **να προσπαθήσουμε να λύσουμε τις Ασκήσεις**.

Περιμένω **πάντα** να επικοινωνήσετε μαζί μου στο e-mail: [tzanetatos@sch.gr](mailto:tzanetatos@sch.gr), στέλνοντάς μου τις ερωτήσεις σας, τις προσπάθειές σας για λύση των Ασκήσεων και ενημερώνοντάς με για την πρόοδο της μελέτης σας.

**Να είστε καλά και να προσέχετε !!!**

Ο καθηγητής σας των Μαθηματικών

Γεράσιμος Τζανετάτος

\*\*\* Η Θεωρία, τα Παραδείγματα και οι Ασκήσεις για λύση προέρχονται από τον ιστότοπο [www.study4exams.gr](http://www.study4exams.gr) .