**Γεια σας και χαρά σας και πάλι καλά μου παιδιά !!!**

Καταρχάς ελπίζω ότι και στη σημερινή μας επικοινωνία βρίσκω, εσάς και τις οικογένειές σας, καλά, δυνατούς και γεμάτος αισιοδοξία.

Όπως βλέπετε αγαπημένοι μου μαθητές και αγαπημένες μου μαθήτριες, δεν σας ξεχνώ. Άλλωστε, να είστε βέβαιοι, αυτό δεν θα μπορούσε ποτέ να συμβεί. Πάμε λοιπόν και πάλι, πιστεύω με πολλή «όρεξη» από την πλευρά σας, στα «δικά μας» !!!

Ξεκινώντας το σημερινό μας μάθημα, ας δούμε τις λύσεις των Ασκήσεων 1 έως και 8 τις οποίες είχαμε για λύση από το προηγούμενο μάθημα επάνω στη διαίρεση πολυωνύμων.

Όσοι από σας έχετε ασχοληθεί με τις Ασκήσεις αυτές, να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με τις λύσεις και, αν χρειάζεται, να κάνετε τις αναγκαίες διορθώσεις. Όσοι πάλι δεν μπορέσατε να ασχοληθείτε, να μελετήσετε τις λύσεις των Ασκήσεων και να προσπαθήσετε και μόνοι σας να τις λύσετε. Σε κάθε περίπτωση περιμένω τις προσπάθειές σας για λύση των Ασκήσεων, ερωτήσεις και απορίες σας στο e-mail tzanetatos@sch.gr.

Είχαμε λοιπόν από το προηγούμενο μάθημα τις εξής **ασκήσεις**:

**1**. Να γίνουν οι διαιρέσεις:

**i)** (2x5–x3+2x2–9):(x2–1) , **ii)**  (x3–3x2+3x):(x+3) , **iii)** (x6–2x):(x3+1)

**Λύση**

**i)** Ο διαιρετέος 2x5–x3+2x2–9 γράφεται: 2x5–x3+2x2–9=2x5+0x4–x3+2x2+0x–9.

Οπότε έχουμε:

−2x2 +2

 −x3 +x −3x2−3x+18

 2x2 +x−9

 x−7

x3+2x2+0x−9

2x3+x+2

x2−1

2x5+0x4–x3+2x2+0x–9

−2x5 +2x3

**ii)** Ο διαιρετέος x3–3x2+3x γράφεται: x3–3x2+3x=x3–3x2+3x+0. Οπότε έχουμε:

−21x−63 2

 6x2 +18x −3x2−3x+18

 21x+0

−63

 −6x2+ 3x+0

x2−6x+21

x+3

x3–3x2+3x+0

 −x3−3x2 2x3

**iii)** Ο διαιρετέος x6–2x γράφεται: x6–2x=x6+0x5+0x4+0x3+0x2−2x+0. Οπότε έχουμε:

 −2x+1

 x3 +1 +−3x2−3x+18

 −x3 −2x+0

x6+0x5+0x4+0x3+0x2–2x+0

x3+1

x3−1

−x6 −x3

**2.** Να βρείτε το υπόλοιπο των παρακάτω διαιρέσεων χωρίς να γίνει η διαίρεση:

**i)** (x3–2x2+5x–6):(x–2) **ii**) (2x5–x4+6x2+3):(x+1) **iii)** (x3–5x+3):(x+2)

**Λύση**

**i)** Θέτουμε: P(x)=x3–2x2+5x–6

Ο διαιρέτης x−2 είναι της μορφής x−ρ με ρ=2.

Οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 1 που έχουμε αναφέρει στη Θεωρία, το ζητούμενο υπόλοιπο είναι ίσο με:

P(2)=23–2∙22+5∙2–6=8–2∙4+10–6=8–8+4=4.

**ii)** Θέτουμε: P(x)=2x5–x4+6x2+3

Ο διαιρέτης x+1 γράφεται: x+1=x−(−1), δηλαδή είναι της μορφής x−ρ με ρ=−1.

Οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 1 που έχουμε αναφέρει στη Θεωρία, το ζητούμενο υπόλοιπο είναι ίσο με:

P(−1)=2∙(–1)5– (–1)4+6∙(–1)2+3=2∙(–1)– 1+6∙1+3=–2–1+6+3=6.

**iii)** Θέτουμε: P(x)= x3–5x+3

Ο διαιρέτης x+2 γράφεται: x+2=x−(−2), δηλαδή είναι της μορφής x−ρ με ρ=−2.

Οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 1 που έχουμε αναφέρει στη Θεωρία, το ζητούμενο υπόλοιπο είναι ίσο με:

P(−2)= (−2)3– 5∙(−2)+3=−8+10+3=5 .

**3.** Να βρείτε το λ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x)=x3+(1–λ2)x2+(2λ–1)x–1 διά x–3 να είναι ίσο με 8.

**Λύση**

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1 που έχουμε αναφέρει στη Θεωρία, το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x):(x–3) είναι ίσο με P(3).

Οπότε πρέπει να ισχύει: P(3)=8 33+(1–λ2)32+(2λ–1)3–1 =8 

27+9(1–λ2)+3(2λ–1)–1=8 27+9–9λ2+6λ–3–1=8 –9λ2+6λ+32–8=0 

–9λ2+6λ+24=0 −3(3λ2−2λ−8)=0 

3λ2−2λ−8=0 δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς λ με ρίζες 2 και − $\frac{4}{3}$ .

**4**. Αν το πολυώνυμο Ρ(x)=x3+αx2+βx+4 διαιρείται με το x–2 και Ρ(1)=8, να βρείτε τα α, β.

**Λύση**

**●** Αφού το P(x) διαιρείται με το x–2, θα ισχύει: Ρ(2)=0 23+α∙22+β∙2+4=0

8+4α+2β+4=04α+2β+12=02(2α+β+6)=02α+β+6=02α+β=−6 (1)

**●** Αφού P(1)=8, θα ισχύει: Ρ(1)=813+α∙12+β∙1+4=81+α+β+4=8α+β+5=8

α+β=8−5α+β=3 (2)

Λύνουμε τώρα το σύστημα των (1), (2) ως εξής:

Αφαιρώντας κατά μέλη την (2) από την (1) προκύπτει η εξίσωση:

2α+β−α−β=−6−3α=–9 (3)

Θέτοντας στην (2) όπου α το –9 από την (3) έχουμε ότι η (2) γίνεται:

(2)–9+β=3β=3+9 β=12 (4)

**5.** Αν το πολυώνυμο Ρ(x)=x3+α2x2+4αx+β2+5 διαιρείται με το x+1, να βρείτε τα α, β.

**Λύση**

Αφού το P(x) διαιρείται με το x+1=x–(−1), θα ισχύει: Ρ(−1)=0

(−1)3+α2(−1)2+4α(−1) +β2+5=0−1+α2−4α+β2+5=0 α2−4α+β2+4=0

(α2−4α+4)+β2=0 (α−2)2+β2=0 ( α−2=0 α=2 και β=0 )

**6**. Να βρείτε τα α και β ώστε το πολυώνυμο P(x)=x3–3x2+αx+β να έχει παράγοντες τους x–2 και x–4.

**Λύση**

● Για να έχει το Ρ(x) παράγοντα το x–2, θα πρέπει: P(2)=0 23–3∙22+α∙2+β =0 

8–3∙4+2α+β =08–12+2α+β =0–4+2α+β =02α+β=4 (1)

● Για να έχει το Ρ(x) παράγοντα το x–4, θα πρέπει: P(4)=0 43–3∙42+α∙4+β =0 

64–3∙16+4α+β =064–48+4α+β =016+4α+β =04α+β=−16 (2)

Λύνουμε τώρα το σύστημα των (1), (2) ως εξής:

Αφαιρώντας κατά μέλη την (1) από την (2) προκύπτει η εξίσωση:

4α+β−2α−β=−16−4 2α=−20 α=− $\frac{20}{2}$ α=−10 (3)

Θέτοντας στην (1) όπου α το −10 από την (3) έχουμε ότι η (1) γίνεται:

(1)2∙(−10)+β=4 −20+β=4 β=4+20 β=24 (4)

Από τις (3) και (4) έχουμε ότι το Ρ(x)= x3–3x2+αx+β έχει παράγοντες τους x–2 και x–4 όταν α=−10 και β=24 .

**7**. Δίνεται το πολυώνυμο Ρ(x)=2x3+αx2–13x+β. Να βρείτε τα α, β αν το P(x) διαιρείται με το x2–x–6.

**Λύση**

Το x2–x–6 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με ρίζες 3 και –2, οπότε (σύμφωνα με τη θεωρία του τριωνύμου από την Α’ Λυκείου) παραγοντοποιείται ως εξής: x2–x–6=1∙(x−3)∙(x−(−2))=(x−3)∙(x−(−2)) .

Οπότε, αν το Ρ(x) διαιρείται με το x2–x–6, θα διαιρείται με τα (x−3) και (x−(−2)), άρα θα ισχύει: P(3)=0 και P(−2)=0.Έχουμε λοιπόν ότι:

● P(3)=0 2∙33+α∙32–13∙3+β=0 2∙27+9α−39+β=0 54+9α−39+β=0 

9α+β+15=0 9α+β=−15 (1)

●P(−2)=02∙(−2)3+α∙(−2)2–13∙(−2)+β=02∙(−8)+4α+26+β=0−16+4α+26+β=0

4α+β+10=04α+β=−10 (2)

Λύνουμε τώρα το σύστημα των (1), (2) ως εξής:

Αφαιρώντας κατά μέλη την (2) από την (1) προκύπτει η εξίσωση:

9α+β−4α−β=−15−(−10) 5α=–15+105α=−5α=−1 (3)

Θέτοντας στην (2) όπου α το −1 από την (3) έχουμε ότι η (2) γίνεται:

(2)4(−1)+β=−10−4+β=−10 β=−10+4 β=−6 (4)

Από τις (3) και (4) έχουμε ότι, αν το P(x) διαιρείται με το x2–x–6, τότε είναι:

α=−1 και β=−6 .

**8**. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του Ρ(x) με το x2–3x+2, αν Ρ(1)=Ρ(2)=3.

**Λύση**

Επειδή ο διαιρέτης x2–3x+2 είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού, το υπόλοιπο θα είναι πολυώνυμο μέχρι 1ου βαθμού. Έστω λοιπόν υ=αx+β το ζητούμενο υπόλοιπο.

Επομένως, σύμφωνα με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης πολυωνύμων, θα έχουμε ότι: P(x)=(x2–3x+2)∙π(x)+αx+β (1), όπου π(x) είναι το πηλίκο της διαίρεσης.

Από την υπόθεση έχουμε ότι:

● Ρ(1)=3 (2), οπότε θέτοντας στην (1) όπου x το 1 έχουμε ότι:

P(1)= (12–3∙1+2)∙π(1)+α∙1+β ( λόγω της (2) )

3=(1–3+2)∙π(1)+α+β 3=0∙π(1)+α+β 3=0+α+β α+β=3 (3)

και

● Ρ(2)=3 (4), οπότε θέτοντας στην (1) όπου x το 2 έχουμε ότι:

P(2)= (22–3∙2+2)∙π(2)+α∙2+β ( λόγω της (4) )

3=(4–6+2)∙π(2)+2α+β 3=0∙π(2)+2α+β 3=0+2α+β 2α+β=3 (5)

Λύνουμε στη συνέχεια το σύστημα των (3), (5) ως εξής:

Αφαιρούμε κατά μέλη την (3) από την (5), οπότε προκύπτει η εξίσωση:

2α+β−α−β=3−3 α=0 (6)

Αντικαθιστώντας τώρα στην (3) το α με 0 από την (6), έχουμε ότι:

(3)0+β=3 β=3 (7)

Οπότε, λόγω των (6) και (7) το ζητούμενο υπόλοιπο γράφεται: υ=0x+3=3 .

Παρατήρηση

Το x2–3x+2 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με ρίζες 1 και 2, οπότε (σύμφωνα με τη θεωρία του τριωνύμου από την Α’ Λυκείου) παραγοντοποιείται ως εξής: x2–3x+2=1∙(x−1)∙(x−2)=(x−1)∙(x−2) . Άρα η (1) ισοδύναμα γράφεται:

(1) P(x)=(x–1)∙(x−2)∙ π(x)+αx+β και στη συνέχεια εργαζόμαστε ανάλογα όπως παραπάνω .

Συνεχίζοντας τώρα την επανάληψη του 4ου Κεφαλαίου ας κλείσουμε την παράγραφο της **Διαίρεσης Πολυωνύμων** με το **σχήμα Horner**:

|  |
| --- |
| **Σχήμα Horner (Χόρνερ)**Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου, π.χ. του P(x) = 3x3 - 8x2 + 7x + 2 με ένα πολυώνυμο της μορφής x - ρ.  Η Ευκλείδεια διαίρεση του Ρ(x) με το x-ρ είναι η ακόλουθη:ΕικόναΗ παραπάνω διαίρεση μπορεί να παρουσιασθεί εποπτικά με τον ακόλουθο πίνακα που είναι γνωστός ως σχήμα του **Horner:** |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|

|  |
| --- |
| Συντελεστές του P(x) |
| 3 | -8 | 7 | 2 | ρ |
|   | 3ρ | (3ρ - 8)ρ | [(3ρ - 8)ρ + 7]ρ |   |
| 3 | 3ρ - 8 | (3ρ - 8)ρ + 7 | [(3ρ - 8)ρ + 7]ρ + 2 |   |
| Συντελεστές Πηλίκου | Υπόλοιπο |   |

Για την κατασκευή του πίνακα αυτού εργαζόμαστε ως εξής:- Στην πρώτη γραμμή γράφουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου Ρ(x) και στην πρώτη θέση της τρίτης γραμμής τον πρώτο συντελεστή του Ρ(x).Στη συνέχεια ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:- Κάθε στοιχείο της δεύτερης γραμμής προκύπτει με πολλαπλασιασμό του αμέσως προηγούμενου στοιχείου της τρίτης γραμμής επί ρ.- Κάθε άλλο στοιχείο της τρίτης γραμμής προκύπτει ως άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων της πρώτης και δεύτερης γραμμής.Το τελευταίο στοιχείο της τρίτης γραμμής είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του Ρ(x) με το (x - ρ), δηλαδή η τιμή του πολυωνύμου Ρ(x) για x = ρ. Τα άλλα στοιχεία της τρίτης γραμμής είναι οι συντελεστές του πηλίκου της διαίρεσης.Ας εργασθούμε τώρα με το σχήμα Horner για να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) = 3x5 + 3x4 + 6x - 13 με το x - 2. |
|

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3 | 3 | 0 | 0 | 6 | -13 | ρ = 2 |
|   | 6 | 18 | 36 | 72 | 156 |   |
| 3 | 9 | 18 | 36 | 78 | 143 |   |

 | **Παρατήρηση**[Συμπληρώσαμε με 0 τους συντελεστές των δυνάμεων του x που δεν υπάρχουν.] |
| Επομένως το πηλίκο της διαίρεσης είναι π(x) = 3x4 + 9x3 + 18x2 + 36x + 78 και το υπόλοιπο υ = Ρ(2) = 143. **ΣΧΟΛΙΟ:** Στο παραπάνω παράδειγμα, αν αντί για το σχήμα Horner εκτελέσουμε τη διαίρεση, θα διαπιστώσουμε ότι οι πράξεις που απαιτούνται είναι αρκετά πιο επίπονες. Το ίδιο θα συμβεί, αν δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε το Ρ(2) θέτοντας όπου x το 2. Το σχήμα Horner είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στις περιπτώσεις όπου το ρ ή ο βαθμός του Ρ(x) είναι μεγάλος αριθμός. Για το λόγο αυτό, τόσο στις διαιρέσεις με το x - ρ όσο και στον υπολογισμό της τιμής Ρ(ρ), θα χρησιμοποιούμε συνήθως το σχήμα Horner. |

Ας δούμε τώρα κάποιες **λυμένες ασκήσεις**, στις οποίες βρίσκει εφαρμογή το **σχήμα Horner** (και των οποίων η αρίθμηση είναι συνέχεια της αρίθμησης των λυμένων ασκήσεων του προηγούμενου μαθήματος):

**ΑΣΚΗΣΗ 13**

Με το σχήμα Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο των διαιρέσεων:

**i)** (2x3–5x2+6x–10):(x–2) , **ii)** x5:(x+1)

και να γράψετε τις αντίστοιχες ταυτότητες της Ευκλείδειας Διαίρεσης.

**Λύση**

**i)** Το σχήμα Horner για τη διαίρεση (2x3–5x2+6x–10):(x–2) είναι το εξής:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | −5 | 6 | −10 | 2 |
|   | 4 | −2 | 8 |  |
| 2 | −1 | 4 | −2 |  |

Άρα: πηλίκο π(x)=2x2–x+4 και υπόλοιπο υ=−2 .

Επομένως: 2x3–5x2+6x–10=(x–2)(2x2–x+4)−2 .

**ii)** O διαιρετέος x5 γράφεται: x5= x5+0x4+0x3+0x2+0x+0 και

ο διαιρέτης x+1 γράφεται: x+1=x−(−1).

Οπότε το σχήμα Horner για τη διαίρεση x5:(x+1), δηλαδή για τη διαίρεση (x5+0x4+0x3+0x2+0x+0):(x−(−1)), είναι το εξής:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 |
|  | −1  | 1 | −1 | 1 | −1 |  |
| 1 | −1 | 1 | −1 | 1 | −1 |  |

Άρα: πηλίκο π(x)=x4−x3+x2−x+1 και υπόλοιπο υ=−1 .

Επομένως: x5=(x+1)(x4−x3+x2−x+1)−1 .

**ΑΣΚΗΣΗ 14**

Να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο P(x)=x3+5x2+3x–9, αν το διώνυμο x–1 είναι ένας παράγοντάς του.

**Λύση**

Κάνουμε με τη βοήθεια του σχήματος Horner τη διαίρεση P(x):(x−1) .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 5 | 3 | −9 | 1 |
|   | 1 | 6 | 9 |  |
| 1 | 6 | 9 | 0 |  |

Άρα: πηλίκο π(x)=x2+6x+9 και υπόλοιπο υ=0, αναμενόμενο διότι το 1 είναι ρίζα του P(x), αφού το x−1 είναι παράγοντας του P(x).

Οπότε, σύμφωνα με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης πολυωνύμων, θα έχουμε ότι: P(x)=(x−1)π(x) (1), όπου π(x)= x2+6x+9.

Για το π(x)=x2+6x+9, το οποίο είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x, παρατηρούμε ότι γράφεται: π(x)=x2+6x+9=x2+2∙3x+32=(x+3)2 π(x)=(x+3)2 (2)

Άρα από την (1) λόγω της (2) έχουμε ότι: P(x)=(x−1)(x+3)2 και έτσι το P(x) έχει παραγοντοποιηθεί ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου παράγοντα.

**ΑΣΚΗΣΗ 15**

Να δείξετε ότι το Ρ(x)=2x4–11x3+18x2–4x–8 έχει παράγοντα το (x–2)2 .

**Λύση**

Το (x–2)2 γράφεται: (x–2)2=(x–2)(x–2) .

Έχουμε ότι: P(2)=2∙24–11∙23+18∙22–4∙2–8=2∙16–11∙8+18∙4–8–8=32–88+72–16=0

P(2)=0 το 2 είναι ρίζα του P(x).

Κάνουμε τώρα με τη βοήθεια του σχήματος Horner τη διαίρεση P(x):(x−2) .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | −11 | 18 | −4 | −8 | 2 |
|   | 4 | −14 | 8 | 8 |  |
| 2 | −7 | 4 | 4 | 0 |  |

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης του P(x)=2x4–11x3+18x2–4x–8 με το x−2 είναι το:

π(x)=2x3–7x2+4x+4 .

Οπότε, σύμφωνα με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης πολυωνύμων, θα έχουμε ότι: P(x)=(x−2)π(x) (1), όπου π(x)=2x3–7x2+4x+4.

Έχουμε ακόμη ότι: π(2)=2∙23–7∙22+4∙2+4=2∙8–7∙4+8+4=16–28+8+4=0 π(2) = 0

το 2 είναι ρίζα του π(x) το π(x) έχει παράγοντα το x−2

π(x)=(x−2)π1(x) (2), όπου π1(x) είναι το πηλίκο της διαίρεσης του π(x) με το x−2.

Τώρα από την (1) λόγω της (2) έχουμε ότι: P(x)=(x−2)(x−2)π1(x) P(x)=(x−2)2π1(x)

το Ρ(x) έχει παράγοντα το (x–2)2 .

**ΑΣΚΗΣΗ 16**

Να βρείτε το λ ώστε το P(x)=x3+λx2+23x–15 να έχει παράγοντα το x–1 και στη συνέχεια να το παραγοντοποιήσετε ως γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

**Λύση**

Για να έχει το P(x) παράγοντα το x–1, θα πρέπει το 1 να είναι ρίζα του P(x), δηλαδή θα πρέπει: P(1)=013+λ∙12+23∙1–15=0 1+λ+23–15=0 λ+9=0 λ=−9.

Για λ=−9 το P(x) γράφεται: P(x)=x3−9x2+23x–15.

Κάνουμε τώρα με τη βοήθεια του σχήματος Horner τη διαίρεση P(x):(x−1) .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | −9 | 23 | −15 | 1 |
|   | 1 | −8 | 15 |  |
| 1 | −8 | 15 | 0 |  |

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης του P(x)= x3−9x2+23x–15 με το x−1 είναι το:

π(x)= x2–8x+15 .

Οπότε, σύμφωνα με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης πολυωνύμων, θα έχουμε ότι: P(x)=(x−1)π(x) (1), όπου π(x)= x2–8x+15.

Το π(x)= x2–8x+15 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με ρίζες 5 και 3, οπότε

(σύμφωνα με τη θεωρία του τριωνύμου από την Α’ Λυκείου) παραγοντοποιείται ως εξής: π(x)=x2–8x+15=1∙(x−5)∙(x−3) π(x)=(x−5)(x−3) (2)

Τώρα από την (1) λόγω της (2) έχουμε ότι: P(x)=(x−1)(x−5)(x−3) και έτσι το P(x) έχει γραφτεί ως γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

**ΑΣΚΗΣΗ 17**

Δίνεται το πολυώνυμο Ρ(x)=2x3–κx2–4x+3, όπου κ∈r, το οποίο έχει παράγοντα το x+1.

**i)** Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ.

**ii)** Αν κ=5, να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης Ρ(x):(x+2).

**Λύση**

**i)** Αφού το Ρ(x) έχει παράγοντα το x+1=x−(−1), συμπεραίνουμε ότι το −1 είναι ρίζα του P(x), οπότε θα ισχύει: Ρ(−1)=0 2∙(−1)3–κ∙(−1)2–4∙(−1)+3=0

2∙(−1)–κ∙1+4+3=0 −2–κ+7=0 –κ+5=0 –κ=−5 κ=5.

**ii)** Για κ=5 το Ρ(x) γράφεται: Ρ(x)=2x3–5x2–4x+3 .

Κάνουμε τώρα με τη βοήθεια του σχήματος Horner τη διαίρεση P(x):(x+2), όπου το x+2 κατά τα γνωστά γράφεται: x+2=x−(−2).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | −5 | −4 | 3 | −2 |
|   | −4 | 18 | −28 |  |
| 2 | −9 | 14 | −25 |  |

Άρα:

 το πηλίκο της διαίρεσης του P(x)= 2x3–5x2–4x+3 με το x+2 είναι το:

π(x)= 2x2–9x+14

και το υπόλοιπο είναι ίσο με −25.

**ΑΣΚΗΣΗ 18**

Να βρείτε τα α, β ώστε το πολυώνυμο Ρ(x)=x3+x2+αx+β να διαιρείται με το (x–1)2 και στη συνέχεια να το παραγοντοποιήσετε.

**Λύση**

Το (x–1)2 γράφεται: (x–1)2=(x–1)(x–1) .

Οπότε, για να διαιρείται το πολυώνυμο Ρ(x)=x3+x2+αx+β με το (x–1)2, θα πρέπει:

**Α)** το P(x) να διαιρείται με το x−1 και

**Β)** το πηλίκο π(x) της διαίρεσης του P(x) με το x−1 να διαιρείται και αυτό με το x−1.

Έχουμε λοιπόν ότι:

**Α)** το P(x) διαιρείται με το x−1P(1)=013+12+α∙1+β=01+1+α+β=0

2+α+β=0β=−2−α (1)

Λόγω της (1) το P(x) γράφεται: P(x)=x3+x2+αx+(−2−α) (2)

Κάνουμε τώρα με τη βοήθεια του σχήματος Horner τη διαίρεση P(x):(x−1) .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | α | −2−α | 1 |
|   | 1 | 2 | α+2 |  |
| 1 | 2 | α+2 | 0 |  |

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης του P(x)= x3+x2+αx+(−2−α) με το x−1 είναι το:

π(x)= x2+2x+α+2 .

**Β)** το π(x)= x2+2x+α+2 διαιρείται με το x−1π(1)=0 12+2∙1+α+2=0

1+2+α+2=0 α+5=0 α=−5 (3)

Τώρα η (1) θέτοντας όπου α το −5 από την (3) γίνεται:

(1) β=−2−(−5) β= −2+5 β=3 (4)

 Άρα, σύμφωνα με τις (3),(4), το πολυώνυμο Ρ(x)=x3+x2+αx+β διαιρείται με το (x–1)2

αν α=−5 και β=3.

Τώρα για τις τιμές αυτές των α, β το P(x) γράφεται: Ρ(x)=x3+x2−5x+3 .

Οπότε το παραπάνω σχήμα Horner για τη διαίρεση P(x):(x−1) γίνεται:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | −5 | 3 | 1 |
|   | 1 | 2 | −3 |  |
| 1 | 2 | −3 | 0 |  |

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης του P(x)=x3+x2−5x+3 με το x−1 είναι το:

π(x)= x2+2x−3

και σύμφωνα με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης πολυωνύμων θα έχουμε ότι: P(x)=(x−1)π(x) (5), όπου π(x)= x2+2x−3.

Το π(x)=x2+2x−3 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με ρίζες 1 και −3, οπότε

(σύμφωνα με τη θεωρία του τριωνύμου από την Α’ Λυκείου) παραγοντοποιείται ως εξής: π(x)=x2+2x−3=1∙(x−1)∙(x−(−3))=(x−1)∙(x+3) π(x)=(x−1)(x+3) (6)

Τώρα από την (5) λόγω της (6) έχουμε ότι: P(x)=(x−1)(x−1)(x+3)=(x−1)2(x+3) και έτσι το P(x) έχει παραγοντοποιηθεί ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου παράγοντα.

Με τη βοήθεια των παραπάνω λυμένων ασκήσεων, ας προσπαθήσουμε τώρα να λύσουμε τις εξής **ΑΣΚΗΣΕΙΣ** (και των οποίων η αρίθμηση είναι συνέχεια της αρίθμησης των Ασκήσεων για λύση του προηγούμενου μαθήματος):

**9.** Με το σχήμα Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο των διαιρέσεων:

 **i)** (2x3–11x2+17x–6):(x–2) , **ii)** (x3–3x2+3x):(x+3)

και να γράψετε τις αντίστοιχες ταυτότητες της Ευκλείδειας Διαίρεσης.

**10.** Να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο P(x)= x3+9x2+23x+15, αν το διώνυμο x+1 είναι ένας παράγοντάς του.

**11**. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο Ρ(x)=2x3–3x2+1 έχει παράγοντα το (x–1)2  .

**12**. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο P(x)=x3+αx+β να διαιρείται με το (x–1)2.

… και κατά τα γνωστά, τις ερωτήσεις σας και τις λύσεις των Ασκήσεων μπορείτε να τις στείλετε στο e-mail: tzanetatos@sch.gr

**Να είστε καλά και να προσέχετε !!!**

Ο καθηγητής σας της Άλγεβρας

Γεράσιμος Τζανετάτος

\*\*\* Η περίληψη της Θεωρίας προέρχεται από το σχολικό βιβλίο, ενώ οι εκφωνήσεις των λυμένων Ασκήσεων και των Ασκήσεων για λύση προέρχονται από τον ιστότοπο [plansmath.blogspot.com](http://www.study4exams.gr).