**Γεια σας και χαρά σας και πάλι καλά μου παιδιά !!!**

Καταρχάς ελπίζω ότι και στη σημερινή μας επικοινωνία βρίσκω, εσάς και τις οικογένειές σας, καλά, δυνατούς και γεμάτος αισιοδοξία.

Όπως βλέπετε αγαπημένοι μου μαθητές και αγαπημένες μου μαθήτριες, δεν σας ξεχνώ. Άλλωστε, να είστε βέβαιοι, αυτό δεν θα μπορούσε ποτέ να συμβεί. Πάμε λοιπόν και πάλι, πιστεύω με πολλή «όρεξη» από την πλευρά σας, στα «δικά μας» !!!

Ξεκινώντας το σημερινό μας μάθημα, ας δούμε τις λύσεις των Ασκήσεων 9 έως και 12 τις οποίες είχαμε για λύση από το προηγούμενο μάθημα επάνω στο σχήμα Horner.

Όσοι από σας έχετε ασχοληθεί με τις Ασκήσεις αυτές, να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με τις λύσεις και, αν χρειάζεται, να κάνετε τις αναγκαίες διορθώσεις. Όσοι πάλι δεν μπορέσατε να ασχοληθείτε, να μελετήσετε τις λύσεις των Ασκήσεων και να προσπαθήσετε και μόνοι σας να τις λύσετε. Σε κάθε περίπτωση περιμένω τις προσπάθειές σας για λύση των Ασκήσεων, ερωτήσεις και απορίες σας στο e-mail tzanetatos@sch.gr.

Είχαμε λοιπόν από το προηγούμενο μάθημα τις εξής **ασκήσεις**:

**9.** Με το σχήμα Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο των διαιρέσεων:

**i)** (2x3–11x2+17x–6):(x–2) , **ii)** (x3–3x2+3x):(x+3)

και να γράψετε τις αντίστοιχες ταυτότητες της Ευκλείδειας Διαίρεσης.

**Λύση**

**i)**

Το σχήμα Horner για τη διαίρεση (2x3–11x2+17x–6):(x–2) είναι το εξής:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | −11 | 17 | −6 | 2 |
|  | 4 | −14 | 6 |  |
| 2 | −7 | 3 | 0 |  |

Άρα: πηλίκο π(x)=2x2–7x+3 και υπόλοιπο υ=0, δηλαδή η διαίρεση είναι τέλεια.

Επομένως: 2x3–11x2+17x–6=(x–2)( 2x2–7x+3) .

**ii)**

O διαιρετέος x3–3x2+3x γράφεται: x3–3x2+3x =x3–3x2+3x +0 και

ο διαιρέτης x+3 γράφεται: x+3=x−(−3).

Οπότε το σχήμα Horner για τη διαίρεση (x3–3x2+3x):(x+3), δηλαδή για τη διαίρεση (x3–3x2+3x +0):(x−(−3)), είναι το εξής:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | −3 | 3 | 0 | −3 |
|  | −3 | 18 | −63 |  |
| 1 | −6 | 21 | −63 |  |

Άρα: πηλίκο π(x)=x2−6x+21 και υπόλοιπο υ=−63 .

Επομένως: x3–3x2+3x =(x+3)( x2−6x+21)−63.

**10.** Να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο P(x)= x3+9x2+23x+15, αν το διώνυμο x+1 είναι ένας παράγοντάς του.

**Λύση**

Το x+1 γράφεται: x+1=x−(−1).

Οπότε τώρα κάνουμε με τη βοήθεια του σχήματος Horner τη διαίρεση P(x):(x+1), δηλαδή τη διαίρεση P(x):(x−(−1)) .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 9 | 23 | 15 | −1 |
|  | −1 | −8 | −15 |  |
| 1 | 8 | 15 | 0 |  |

Άρα: πηλίκο π(x)=x2+8x+15 και

υπόλοιπο υ=0, αναμενόμενο διότι το −1 είναι ρίζα του P(x), αφού το x+1 είναι παράγοντας του P(x).

Οπότε, σύμφωνα με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης πολυωνύμων, θα έχουμε ότι: P(x)=(x+1)π(x) (1), όπου π(x)= x2+8x+15.

Το π(x)=x2+8x+15 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με ρίζες −3 και −5, οπότε (σύμφωνα με τη θεωρία του τριωνύμου από την Α’ Λυκείου) παραγοντοποιείται ως εξής: π(x)=x2+8x+15=1∙(x−(−3))∙(x−(−5))=(x+3)(x+5)

π(x)= (x+3)(x+5) (2)

Άρα από την (1) λόγω της (2) έχουμε ότι: P(x)=(x+1)(x+3)(x+5) και έτσι το P(x) έχει παραγοντοποιηθεί.

**11**. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο Ρ(x)=2x3–3x2+1 έχει παράγοντα το (x–1)2  .

**Λύση**

Το (x–1)2 γράφεται: (x–1)2=(x–1)(x–1) .

Έχουμε ότι: P(1)=2∙13–3∙12+1=2∙1–3∙1+1=2–3+1=0

P(1)=0 το 1 είναι ρίζα του P(x).

To P(x) τώρα γράφεται: Ρ(x)=2x3–3x2+1=2x3–3x2+0x+1 .

Κάνουμε στη συνέχεια με τη βοήθεια του σχήματος Horner τη διαίρεση P(x):(x−1) .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | −3 | 0 | 1 | 1 |
|  | 2 | −1 | −1 |  |
| 2 | −1 | −1 | 0 |  |

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης του P(x)=2x3–3x2+1 με το x−1 είναι το: π(x)=2x2–x−1 .

Οπότε, σύμφωνα με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης πολυωνύμων, θα έχουμε ότι: P(x)=(x−1)π(x) (1), όπου π(x)=2x2–x−1.

Έχουμε ακόμη ότι: π(1)=2∙12–1−1=2∙1–2=2–2=0 π(1) = 0

το 1 είναι ρίζα του π(x) το π(x) έχει παράγοντα το x−1

π(x)=(x−1)π1(x) (2), όπου π1(x) είναι το πηλίκο της διαίρεσης του π(x) με το x−1.

Τώρα από την (1) λόγω της (2) έχουμε ότι: P(x)=(x−1)(x−1)π1(x) P(x)=(x−1)2π1(x)

το Ρ(x) έχει παράγοντα το (x–1)2 .

**12**. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο P(x)=x3+αx+β να διαιρείται με το (x–1)2.

**Λύση**

Το (x–1)2 γράφεται: (x–1)2=(x–1)(x–1) .

Οπότε, για να διαιρείται το πολυώνυμο Ρ(x)= x3+αx+β με το (x–1)2, θα πρέπει:

**Α)** το P(x) να διαιρείται με το x−1 και

**Β)** το πηλίκο π(x) της διαίρεσης του P(x) με το x−1 να διαιρείται και αυτό με το x−1.

Έχουμε λοιπόν ότι:

**Α)** το P(x) διαιρείται με το x−1P(1)=0 13+α∙1+β =01+α+β=0

β=−1−α (1)

Λόγω της (1) το P(x) γράφεται: P(x)=x3+αx+(−1−α) P(x)=x3+0x2+αx+(−1−α) (2)

Κάνουμε τώρα με τη βοήθεια του σχήματος Horner τη διαίρεση P(x):(x−1) .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 0 | α | −1−α | 1 |
|  | 1 | 1 | α+1 |  |
| 1 | 1 | α+1 | 0 |  |

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης του P(x)= x3+αx+(−1−α) με το x−1 είναι το:

π(x)= x2+x+α+1 .

**Β)** το π(x)= x2+x+α+1 διαιρείται με το x−1π(1)=0 12+1+α+1=0

1+2+α=0 α+3=0 α=−3 (3)

Τώρα η (1) θέτοντας όπου α το −3 από την (3) γίνεται:

(1) β=−1−(−3) β= −1+3 β=2 (4)

Άρα, σύμφωνα με τις (3),(4), το πολυώνυμο Ρ(x)= x3+αx+β διαιρείται με το (x–1)2

αν α=−3 και β=2.

Τώρα για τις τιμές αυτές των α, β το P(x) γράφεται: Ρ(x)=x3−3x+2 .

Ας κλείσουμε τώρα το Κεφάλαιο των Πολυωνύμων με την παράγραφο των **Πολυωνυμικών Εξισώσεων και Ανισώσεων.**

Κινούμενοι λοιπόν προς αυτήν την κατεύθυνση, ας δούμε αρχικά περιληπτικά την αντίστοιχη θεωρία:

**Πολυωνυμικές εξισώσεις – Πολυωνυμικές ανισώσεις**

**Πολυωνυμική εξίσωση** βαθμού ν ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής

ανxν + αν-1xν-1 + … + α1x + α0 = 0,

όπου α0 , α1 , …, αν-1, αν ∈ r με αν ≠ 0.

**Ρίζα** μιας πολυωνυμικής εξίσωσης ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου

Ρ(x) = ανxν + αν-1xν-1 +… + α1x + α0, δηλαδή κάθε αριθμό ρ, για τον οποίο ισχύει

Ρ(ρ) = 0.

Η διαδικασία επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων των μορφών:

● αx + β = 0, όπου α ≠ 0 (πρωτοβάθμιες εξισώσεις) ,

● αx2 + βx + γ = 0, όπου α ≠ 0 (δευτεροβάθμιες εξισώσεις) και

● αx4 + βx2 + γ = 0, όπου α ≠ 0 (διτετράγωνες εξισώσεις)

μας είναι ήδη γνωστή.

Για την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων βαθ­μού μεγαλύτερου από 2 (εκτός από τις διτετράγωνες), που είναι της μορφής P(x) = 0 (1), όπου P(x) είναι πολυώνυμο του x, εργαζόμαστε με παραγοντοποίηση ως εξής:

Παραγοντοποιούμε το P(x) μετατρέποντάς το σε γινόμενο:

P(x) = Ρ1(x) 🞄 Ρ2(x) 🞄 ... 🞄 Ρκ(x) (2) ,

όπου Ρ1(x) , Ρ2(x) , ... , Ρκ(x) είναι πολυώνυμα μικρότερου βαθμού από τον βαθμό του P(x).

Οπότε λόγω της (2) η εξίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται:

P(x) = 0 ⇔ Ρ1(x) 🞄 Ρ2(x) 🞄 ... 🞄 Ρκ(x) = 0 ⇔

( Ρ1(x) = 0 ή Ρ2(x) = 0 ή ... ή Ρκ(x) = 0 ),

και έτσι αναγόμαστε στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων μικρότερου βαθμού.

**Παράδειγμα**

Να λυθεί η εξίσωση: x3 - 3x + 2 = 0 (1)

H (1) ισοδύναμα γράφεται:

x3 - 3x + 2 = 0 ⇔ x3 - x - 2x + 2 = 0 ⇔ x(x2 - 1) -2(x - 1) = 0 ⇔ x(x - 1)(x + 1) -2(x - 1) = 0 ⇔

(x - 1)[x(x + 1) -2] = 0 ⇔ (x - 1)(x2 + x - 2) = 0 ⇔

( x - 1 = 0 (2) ή x2 + x - 2 = 0 (3) )

● (2) ⇔ x = 1

● H (3) είναι δευτεροβάθμια ως προς x με ρίζες 1 και -2.

Άρα η δοσμένη εξίσωση (1) έχει τις εξής ρίζες: 1 (διπλή) και -2.

**Παράγοντας της μορφής x - ρ**

Το Θεώρημα που ακολουθεί μας βοηθάει, σε ορισμένες περιπτώσεις, στην εύ­ρεση πρωτοβάθμιων παραγόντων του πολυωνύμου P(x), που υπάρχει στο πρώτο μέλος μιας πολυωνυμικής εξίσωσης της μορφής P(x) = 0.

**ΘΕΩΡΗΜΑ (ακέραιων ριζών)**

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση

ανxν + αν-1xν-1 +...+ α1x + α0 = 0 **με ακέραιους συντελεστές**.

Αν ο ακέραιος ρ ≠ 0 είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α0.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Αν ο ρ ≠ 0 είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε διαδοχικά έχουμε:

ανρν + αν-1ρν-1 + ... + α1ρ + α0 = 0 ⇔ α0 = - ανρν - αν-1ρν-1- ... - α1ρ ⇔

α0 = ρ∙(-ανρν-1 - αν-1ρν-2- ... - α1) (1)

Επειδή οι ρ, α1, α2,..., αν είναι ακέραιοι, έπεται ότι και ο - ανρν-1 - αν-1ρν-2 - ... - α1 είναι ακέραιος.

Οπότε από την τελευταία ισότητα (1) συμπεραίνουμε ότι ο ρ είναι διαιρέ­της του α0.

**Σχόλιο**

Το αντίστροφο του Θεωρήματος δεν αληθεύει. Με άλλα λόγια μπορεί ένας ακέραιος ρ να είναι διαι­ρέτης του α0, χωρίς αυτός να είναι κατ’ ανάγκη και ρίζα της εξίσωσης.

π.χ. στην εξίσωση x2 -7x + 10 = 0 ο ακέραιος ρ = 1 είναι διαι­ρέτης του α0 = 10, αλλά δεν είναι ρίζα της εξίσωσης

**Πολυωνυμική ανίσωση** βαθμού ν ονομάζουμε κάθε ανίσωση της μορφής

ανxν + αν-1xν-1 + … + α1x + α0 > 0 ή

ανxν + αν-1xν-1 + … + α1x + α0 < 0 ή

ανxν + αν-1xν-1 + … + α1x + α0 ≥ 0 ή

ανxν + αν-1xν-1 + … + α1x + α0 ≤ 0,

όπου α0 , α1 , …, αν-1, αν ∈ r με αν ≠ 0.

Η διαδικασία επίλυσης πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων ανισώσεων μας είναι ήδη γνωστή.

Η γενική μεθοδολογία τώρα επίλυσης μιας πολυωνυμικής ανίσωσης βαθμού μεγαλύτερου από 2, στο πρώτο μέλος της οποίας έχουμε ένα πολυώνυμο P(x) και στο δεύτερο μέλος έχουμε το 0, βασίζεται στη μετατροπή του πρώτου της μέλους P(x) σε γινόμενο της μορφής:

P(x) = A(x) • B(x) •...•Φ(x),

όπου οι παράγοντες A(x), B(x), ..., Φ(x) είναι της μορφής αx+β (πρωτοβάθμιοι) ή της μορφής αx2+βx+γ (δευτεροβάθμια τριώνυμα).

Μετά βρίσκουμε, κατά τα γνωστά, το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά και στη συνέχεια βρίσκουμε το πρόσημο του P(x), οπότε με τον τρόπο αυτό βρίσκουμε τις λύσεις της ανίσωσης.

Κλείνοντας την παράγραφο των Πολυωνυμικών Εξισώσεων και Ανισώσεων σημειώνουμε ότι υπάρχουν εξισώσεις και ανισώσεις, οι οποίες δεν είναι μεν πολυωνυμικές, αλλά με κατάλληλη διαδικασία η επίλυσή τους ανάγεται στην επίλυση πολυωνυμικών. Τέτοιες εξισώσεις και ανισώσεις, μεταξύ των άλλων, είναι οι κλασματικές, όπως επίσης και οι άρρητες, με τις οποίες ασχοληθήκαμε στην αρχή των εξ αποστάσεως μαθημάτων μας.

**60 / 77**

Ας δούμε τώρα κάποιες **λυμένες ασκήσεις**, επάνω στις πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις:

**ΑΣΚΗΣΗ 1**

Να λύσετε τις εξισώσεις:

**i**) x3+x2–12=0 , **ii)** x4–x2–4x–4=0

**Μεθοδολογία**

Η γενική μεθοδολογία επίλυσης των πολυωνυμικών εξισώσεων συνίσταται στο να τις φέρουμε ισοδύναμα στη μορφή P(x)=0, όπου P(x) είναι κάποιο πολυώνυμο, και στη συνέχεια να μετατρέψουμε το P(x) σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων, οπότε καθένας από τους παράγοντες αυτούς θα ισούται με 0, και έτσι λύνουμε τις αντίστοιχες πρωτοβάθμιες και δευτεροβάθμιες εξισώσεις.

**Λύση**

**i)** Παρατηρούμε ότι η εξίσωση έχει ακέραιους συντελεστές. Οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα ακεραίων ριζών, αν η εξίσωση έχει ακέραια ρίζα, αυτή θα είναι διαιρέτης του σταθερού της όρου −12, δηλαδή θα είναι κάποιος από τους: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12.

Ονομάζουμε τώρα το πρώτο μέλος της εξίσωσης P(x), δηλαδή θέτουμε:

P(x)=x3+x2–12 (1) , οπότε η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: P(x)=0 (2)

και εξετάζουμε αν από τους διαιρέτες του −12 υπάρχει κάποιος που είναι ρίζα της εξίσωσης:

●Για x=1 έχουμε: P(1)= 13+12–12=1+1–12=–10≠0 το 1 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης.

●Για x=−1 έχουμε: P(−1)= (−1)3+(−1)2–12=−1+1–12=–12≠0 το −1 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης.

● Για x=2 έχουμε: P(2)= 23+22–12=8+4–12=0 το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης.

Στη συνέχεια κάνουμε το σχήμα Horner για τη διαίρεση (x3+x2–12):(x−2), γράφοντας όμως πρώτα το P(x)=x3+x2–12 στη μορφή: P(x)=x3+x2+0x–12 για να το μετατρέψουμε σε πλήρες πολυώνυμο.

Οπότε το σχήμα Horner για τη διαίρεση (x3+x2–12):(x−2), δηλαδή για τη διαίρεση (x3+x2+0x–12):(x−2), είναι το εξής:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 0 | −12 | 2 |
|  | 2 | 6 | 12 |  |
| 1 | 3 | 6 | 0 |  |

Άρα: πηλίκο π(x)=x2+3x+6 και υπόλοιπο υ=0, πράγμα άλλωστε αναμενόμενο .

Επομένως: P(x)=x3+x2–12=( x−2)( x2+3x+6) (3).

Λόγω τώρα της (3) η εξίσωση (2) ισοδύναμα γράφεται: (2) ( x−2)( x2+3x+6)=0

( x−2=0 x=2 ή x2+3x+6=0, δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x με διακρίνουσα Δ=−15<0, άρα αδύνατη )

Επομένως η δοσμένη εξίσωση έχει ως μοναδική ρίζα το 2.

**ii)** x4–x2–4x–4=0 (x4–x2)–(4x+4)=0 x2(x2–1)–4(x+1)=0

x2(x+1)(x–1)–4(x+1)=0 (x+1)[ x2(x–1)–4]=0

( x+1=0 x=−1 (1) ή x2(x–1)–4=0 (2) )

Λύνουμε τώρα την (2):

(2) x3−x2–4=0 (3)

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (3) έχει ακέραιους συντελεστές. Οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα ακεραίων ριζών, αν η εξίσωση (3) έχει ακέραια ρίζα, αυτή θα είναι διαιρέτης του σταθερού της όρου −4, δηλαδή θα είναι κάποιος από τους: ±1, ±2, ±4.

Θέτουμε τώρα: P(x)= x3−x2–4 (4) , οπότε η εξίσωση (3) ισοδύναμα γράφεται:

P(x)=0 (5) και εξετάζουμε αν από τους διαιρέτες του −4 υπάρχει κάποιος που είναι ρίζα της εξίσωσης (5):

●Για x=1 έχουμε: P(1)= 13−12–4=1−1–4=–4≠0 το 1 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης (5) .

●Για x=−1 έχουμε: P(−1)= (−1)3−(−1)2–4=−1−1–4=–6≠0 το −1 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης (5) .

● Για x=2 έχουμε: P(2)= 23−22–4=8−4–4=0 το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης (5) .

Στη συνέχεια κάνουμε το σχήμα Horner για τη διαίρεση (x3−x2–4):(x−2), γράφοντας όμως πρώτα το P(x)= x3−x2–4 στη μορφή: P(x)= x3−x2+0x–4 για να το μετατρέψουμε σε πλήρες πολυώνυμο.

Οπότε το σχήμα Horner για τη διαίρεση (x3−x2–4):(x−2), δηλαδή για τη διαίρεση (x3−x2+0x–4):(x−2), είναι το εξής:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | −1 | 0 | −4 | 2 |
|  | 2 | 2 | 4 |  |
| 1 | 1 | 2 | 0 |  |

Άρα: πηλίκο π(x)=x2+x+2 και υπόλοιπο υ=0, πράγμα άλλωστε αναμενόμενο .

Επομένως: P(x)= x3−x2–4=( x−2)( x2+x+2) (6).

Λόγω τώρα της (6) η εξίσωση (5) ισοδύναμα γράφεται: (5) ( x−2)( x2+x+2)=0

( x−2=0 x=2 (7) ή x2+x+2=0, δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x με διακρίνουσα Δ=−7<0, άρα αδύνατη )

Επομένως, από τις (1) και (7) η δοσμένη εξίσωση έχει ως ρίζες τους −1 και 2.

Παρατήρηση

Θα μπορούσαμε να είχαμε εργαστεί από την αρχή με το Θεώρημα ακεραίων ριζών, χωρίς δηλαδή να παραγοντοποιήσουμε πρώτα το πρώτο μέλος της εξίσωσης.

**ΑΣΚΗΣΗ 2**

Δίνεται η εξίσωση (3λ3+1)x4–(6λ+4)x3+(7λ2+8)x–9λ=0, όπου λ∈Z .

Να βρείτε το λ, ώστε η εξίσωση να έχει ρίζα το 1.

**Λύση**

Για να έχει η εξίσωση ρίζα το 1, θα πρέπει η τιμή αυτή να την επαληθεύει, άρα θα πρέπει να ισχύει:

(3λ3+1)∙14–(6λ+4)∙13+(7λ2+8)∙1–9λ=0 (3λ3+1)–(6λ+4)+(7λ2+8)–9λ=0

3λ3+1–6λ−4+7λ2+8–9λ=0 3λ3+7λ2–15λ +5=0 (1)

Η (1) τώρα είναι εξίσωση ως προς λ με ακέραιους συντελεστές. Οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα ακεραίων ριζών, αν η εξίσωση (1) έχει ακέραια ρίζα, αυτή θα είναι διαιρέτης του σταθερού της όρου 5, δηλαδή θα είναι κάποιος από τους: ±1, ±5.

Εξετάζουμε λοιπόν αν από τους διαιρέτες του 5 υπάρχει κάποιος που είναι ρίζα της εξίσωσης (1).

Για λ=1 έχουμε: 3∙13+7∙12–15∙1 +5=3∙1+7∙1–15 +5=3+7−10=0 το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης (1) .

Στη συνέχεια κάνουμε το σχήμα Horner για τη διαίρεση (3λ3+7λ2–15λ+5):(λ−1), το οποίο είναι το εξής:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 3 | 7 | −15 | 5 | 1 |
|  | 3 | 10 | −5 |  |
| 3 | 10 | −5 | 0 |  |

Άρα: πηλίκο π1(λ)=3λ2+10λ–5 και υπόλοιπο υ1=0, πράγμα άλλωστε αναμενόμενο .

Επομένως: 3λ3+7λ2–15λ+5=( λ−1)(3λ2+10λ–5) (2).

Λόγω τώρα της (2) η εξίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται: (1)( λ−1)(3λ2+10λ–5)= 0

( λ−1=0 λ=1 ή

3λ2+10λ–5=0 , δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς λ με διακρίνουσα Δ=160>0, άρα έχει δύο πραγματικές ρίζες, που όμως δεν είναι ακέραιοι αριθμοί, διότι το 160 δεν είναι τέλειο τετράγωνο, οπότε απορρίπτονται )

Άρα η μοναδική ακέραια ρίζα της (1) είναι το 1.

Επομένως η δοσμένη εξίσωση έχει ρίζα το 1 όταν λ=1.

**ΑΣΚΗΣΗ 3**

Δίνεται το πολυώνυμο Ρ(x)=αx3+(β–1)x2–3x–2β+6 με α, βr.

**i**) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου Ρ(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του Ρ(x) με το x+1 είναι ίσο με 2, να δείξετε ότι: α=2 και β=4.

**ii**) Για τις τιμές των α και β που βρήκατε στο **i**), να λύσετε την εξίσωση Ρ(x)=0.

**Λύση**

**i)** ● Αφού το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου Ρ(x), έχουμε ότι:

P(1)=0 α∙13+(β–1)∙12–3∙1–2β+6=0 α∙1+(β–1)∙1–3–2β+6=0

α+β–1–3–2β+6=0 α−β+2=0 α−β=−2 (1)

● Αφού το υπόλοιπο της διαίρεσης του Ρ(x) με το x+1, δηλαδή με το x−(−1), είναι ίσο με 2, έχουμε ότι:

P(−1)=2 α∙(−1)3+(β–1)∙( −1)2–3∙(−1)–2β+6=2 α∙(−1)+(β–1)∙1+3–2β+6=2

−α+β–1+3–2β+6=2 −α−β+8=2 −α−β=2−8 −α−β=−6 (2)

Λύνουμε τώρα το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) με αγνώστους τα α, β ως εξής:

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει η εξίσωση:

α−β−α−β=−2−6 −2β=−8 β = β=4 (3)

Θέτοντας στην (1) όπου β το 4 από την (3) έχουμε ότι:

(1) α−4=−2 α=−2+4 α=2 (4)

**ii)** Για α=2 και β=4 το πολυώνυμο P(x) γίνεται:

Ρ(x)=2x3+(4–1)x2–3x–2∙4+6=2x3+3x2–3x–8+6=2x3+3x2–3x–2 P(x)=2x3+3x2–3x–2 (5)

Οπότε λόγω της (5) η προς λύση εξίσωση P(x)=0 ισοδύναμα γράφεται:

2x3+3x2–3x–2=0 (6) .

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (6) έχει ακέραιους συντελεστές. Οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα ακεραίων ριζών, αν η εξίσωση έχει ακέραια ρίζα, αυτή θα είναι διαιρέτης του σταθερού της όρου −2, δηλαδή θα είναι κάποιος από τους: ±1, ±2.

Εξετάζουμε τώρα αν από τους διαιρέτες του −2 υπάρχει κάποιος που είναι ρίζα της εξίσωσης:

Για x=1 έχουμε: 2∙13+3∙12–3∙1–2=2∙1+3∙1–3–2=2+3−5=0 το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης.

Στη συνέχεια κάνουμε το σχήμα Horner για τη διαίρεση (2x3+3x2–3x–2):(x−1), το οποίο είναι το εξής:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 3 | −3 | −2 | 1 |
|  | 2 | 5 | 2 |  |
| 2 | 5 | 2 | 0 |  |

Άρα: πηλίκο π(x)= 2x2+5x+2 και υπόλοιπο υ=0, πράγμα άλλωστε αναμενόμενο .

Επομένως: 2x3+3x2–3x–2=(x−1)( 2x2+5x+2) (7).

Λόγω τώρα της (7) η προς λύση εξίσωση (6) ισοδύναμα γράφεται:

(6) (x−1)( 2x2+5x+2)= 0

( x−1=0 x=1 ή

2x2+5x+2=0, δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x με διακρίνουσα Δ=52−4∙2∙2=25−16=9>0, άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες

x1,2 = = = )

Επομένως για α=2 και β=4 η εξίσωση Ρ(x)=0 έχει τις ρίζες 1, − και .

**ΑΣΚΗΣΗ 4**

Για τις διάφορες τιμές του x να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

(x–2)3·(x–3)2·(x2+x+5)·(4–x2)

**Λύση**

Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο καθενός από τους παράγοντες του γινομένου:

● για το (x–2)3 έχουμε ότι: (x–2)3=0 x−2=0 x=2 και

(x–2)3>0 (x–2)2(x–2) >0 ( διότι για κάθε x∈r ισχύει: (x–2)2≥0 )

x−2>0 x>2

● για το (x–3)2 έχουμε ότι: (x–3)2=0 x−3=0 x=3 και

(x–3)2>0 για κάθε x∈r με x≠3

● για το x2+x+5 έχουμε ότι είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα Δ=−19<0, άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες και σύμφωνα με τη θεωρία για το πρόσημο τριωνύμου από την Α’ Λυκείου είναι πάντα ομόσημο του συντελεστή 1 του x2, δηλαδή για κάθε x∈r ισχύει: x2+x+5>0

● για το 4–x2 έχουμε ότι: 4–x2=0–x2=−4 x2=4 ( x=2 ή x=−2 ) και

4–x2>0–x2>−4 x2<4 < <2 (από γνωστή ιδιότητα απολύτων τιμών)

−2<x<2 .

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε πίνακα, στον οποίο συμπεριλαμβάνουμε όλους τους παράγοντες του γινομένου με τις ρίζες και τα πρόσημά τους, ανάλογα με τις διάφορες τιμές που παίρνει το x, ενώ στην τελευταία γραμμή έχουμε τα αντίστοιχα συμπεράσματα για το γινόμενο των παραγόντων αυτών.

Κατασκευάζουμε λοιπόν τον εξής πίνακα:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -∞ −2 2 3 +∞ | | | |
| (x–2)3 | − | − 0 + | | + |
| (x–3)2 | + | + | + 0 + | |
| x2+x+5 | + | + | + | + |
| 4–x2 | − 0 + 0 − | | | − |
| (x–2)3·(x–3)2·(x2+x+5)·(4–x2) | + 0 − 0 − 0 − | | | |

Το πρόσημο τώρα του γινομένου (x–2)3·(x–3)2·(x2+x+5)·(4–x2) για τις διάφορες τιμές του x φαίνεται στον παραπάνω πίνακα.

**ΑΣΚΗΣΗ 5**

Να λύσετε τις ανισώσεις:

**i)** x3+x >2x2+2 , **ii)** x3+5x2+3x–90 , **iii)** x3+6x2+12x+8<0 , **iv)** x4–6x3+11x2–6x > 0.

**Μεθοδολογία**

Η γενική μεθοδολογία επίλυσης των πολυωνυμικών ανισώσεων συνίσταται στο να τις φέρουμε κατά περίπτωση ισοδύναμα στη μορφή P(x)>0 ή P(x)≥0 ή P(x)<0 ή P(x)≤0, όπου P(x) είναι κάποιο πολυώνυμο, να μετατρέψουμε το P(x) σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων, να βρούμε το πρόσημο καθενός από τους παράγοντες αυτούς και στη συνέχεια να κατασκευάσουμε πίνακα για να βρούμε το πρόσημο του γινομένου τους.

**Λύση**

**i)** Η δοσμένη ανίσωση ισοδύναμα γράφεται:

x3+x>2x2+2x3+x−2x2−2>0 (x3−2x2)+(x−2)>0 x2(x−2)+(x−2)>0

(x−2)(x2 +1)>0

( διότι για κάθε x∈r ισχύει: x2 +1>0 )

x−2>0 x>2 x∈(2, +∞) .

**ii)** Θα προσπαθήσουμε να παραγοντοποιήσουμε το πρώτο μέλος της ανίσωσης.

Το πρώτο μέλος x3+5x2+3x–9 της ανίσωσης είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού ως προς x με ακέραιους συντελεστές, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα ακεραίων ριζών, αν έχει ακέραια ρίζα, αυτή θα είναι διαιρέτης του σταθερού του όρου −9, δηλαδή θα είναι κάποιος από τους: ±1, ±3, ±9.

Εξετάζουμε λοιπόν αν από τους διαιρέτες του −9 υπάρχει κάποιος που είναι ρίζα του πολυωνύμου x3+5x2+3x–9:

Για x=1 έχουμε: 13+5∙12+3∙1–9=1+5∙1+3–9=1+5−6=0 το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου x3+5x2+3x–9.

Στη συνέχεια κάνουμε το σχήμα Horner για τη διαίρεση (x3+5x2+3x–9):(x−1), το οποίο είναι το εξής:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 5 | 3 | −9 | 1 |
|  | 1 | 6 | 9 |  |
| 1 | 6 | 9 | 0 |  |

Άρα: πηλίκο π(x)=x2+6x+9 και υπόλοιπο υ=0, πράγμα άλλωστε αναμενόμενο .

Επομένως: x3+5x2+3x–9=( x−1)(x2+6x+9) (1).

Λόγω τώρα της (1) η δοσμένη ανίσωση ισοδύναμα γράφεται:

x3+5x2+3x–90 (x−1)(x2+6x+9)≥0 (2)

Για την επίλυση της (2) εργαζόμαστε ως εξής:

Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο καθενός από τους παράγοντες του πρώτου μέλους της (2):

● για το x−1 έχουμε ότι: x−1=0 x=1 και x−1>0 x>1

● για το x2+6x+9 έχουμε ότι είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα Δ=0, άρα έχει μια διπλή πραγματική ρίζα x0=−=−3 και σύμφωνα με τη θεωρία για το πρόσημο τριωνύμου από την Α’ Λυκείου για κάθε x∈r με x≠−3 είναι ομόσημο του συντελεστή 1 του x2, δηλαδή για κάθε x∈r με x≠−3 ισχύει: x2+6x+9>0 .

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε πίνακα, στον οποίο συμπεριλαμβάνουμε όλους τους παράγοντες του πρώτου μέλους της (2) με τις ρίζες και τα πρόσημά τους, ανάλογα με τις διάφορες τιμές που παίρνει το x, ενώ στην τελευταία γραμμή έχουμε τα αντίστοιχα συμπεράσματα για το γινόμενο των παραγόντων αυτών.

Κατασκευάζουμε λοιπόν τον εξής πίνακα:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | -∞ −3 1 +∞ | | |
| x−1 | − | * 0 + | |
| x2+6x+9 | + 0 + | | + |
| (x−1)(x2+6x+9) | − 0 − 0 + | | |

Από τον πίνακα προκύπτει ότι:

(x−1)(x2+6x+9)≥0 (x=−3 ή x≥1 )

Επομένως και λόγω της (2) έχουμε ότι οι λύσεις της δοσμένης ανίσωσης είναι τα x:

(x=−3 ή x≥1) , δηλαδή τα x∈{−3}[1, +∞) .

**iii)** Θα προσπαθήσουμε να παραγοντοποιήσουμε το πρώτο μέλος της ανίσωσης.

Το πρώτο μέλος x3+6x2+12x+8 της ανίσωσης είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού ως προς x με ακέραιους συντελεστές, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα ακεραίων ριζών, αν έχει ακέραια ρίζα, αυτή θα είναι διαιρέτης του σταθερού του όρου 8, δηλαδή θα είναι κάποιος από τους: ±1, ±2, ±4, ±8. Επειδή όμως το x3+6x2+12x+8 είναι άθροισμα, κανένας από τους θετικούς διαιρέτες του 8 δεν μπορεί να το μηδενίζει.

Εξετάζουμε λοιπόν αν από τους αρνητικούς διαιρέτες του 8 υπάρχει κάποιος που είναι ρίζα του πολυωνύμου x3+6x2+12x+8:

● Για x=−1 έχουμε: (−1)3+6∙(−1)2+12∙(−1)+8=−1+6∙1−12+8 =−1+6−4=1≠0 το 1 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου x3+6x2+12x+8.

● Για x=−2 έχουμε: (−2)3+6∙(−2)2+12∙(−2)+8=−8+6∙4−24+8 =−8+24−24+8=0 το −2 είναι ρίζα του πολυωνύμου x3+6x2+12x+8.

Στη συνέχεια κάνουμε το σχήμα Horner για τη διαίρεση (x3+6x2+12x+8):(x−(−2)), το οποίο είναι το εξής:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 6 | 12 | 8 | −2 |
|  | −2 | −8 | −8 |  |
| 1 | 4 | 4 | 0 |  |

Άρα: πηλίκο π(x)=x2+4x+4 και υπόλοιπο υ=0, πράγμα άλλωστε αναμενόμενο .

Επομένως: x3+6x2+12x+8=(x−(−2))(x2+4x+4) x3+6x2+12x+8=(x+2)(x2+4x+4) (1).

Λόγω τώρα της (1) η δοσμένη ανίσωση ισοδύναμα γράφεται:

x3+6x2+12x+8<0 (x+2)(x2+4x+4)<0 (2)

Για την επίλυση της (2) εργαζόμαστε ως εξής:

Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο καθενός από τους παράγοντες του πρώτου μέλους της (2):

● για το x+2 έχουμε ότι: x+2=0 x=−2 και x+2>0 x>−2

● για το x2+4x+4 έχουμε ότι είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα Δ=0, άρα έχει μια διπλή πραγματική ρίζα x0=−=−2 και σύμφωνα με τη θεωρία για το πρόσημο τριωνύμου από την Α’ Λυκείου για κάθε x∈r με x≠−2 είναι ομόσημο του συντελεστή 1 του x2, δηλαδή για κάθε x∈r με x≠−2 ισχύει: x2+4x+4>0 .

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε πίνακα, στον οποίο συμπεριλαμβάνουμε όλους τους παράγοντες του πρώτου μέλους της (2) με τις ρίζες και τα πρόσημά τους, ανάλογα με τις διάφορες τιμές που παίρνει το x, ενώ στην τελευταία γραμμή έχουμε τα αντίστοιχα συμπεράσματα για το γινόμενο των παραγόντων αυτών.

Κατασκευάζουμε λοιπόν τον εξής πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| x | -∞ −2 +∞ |
| x+2 | − 0 + |
| x2+4x+4 | + 0 + |
| (x+2)(x2+4x+4) | − 0 + |

Από τον πίνακα προκύπτει ότι:

(x+2)(x2+4x+4)<0x<−2

Επομένως και λόγω της (2) έχουμε ότι οι λύσεις της δοσμένης ανίσωσης είναι τα x:

x<−2 , δηλαδή τα x∈(-∞,−2) .

Παρατήρηση

Η δοσμένη ανίσωση λύνεται πολύ ευκολότερα ως εξής:

Το πρώτο μέλος x3+6x2+12x+8 της ανίσωσης είναι το ανάπτυγμα της ταυτότητας (x+2)3. Πράγματι: (x+2)3=x3+3∙x2∙2+3∙x∙22+23= x3+6x2+3∙x∙4+8= x3+6x2+12x+8

x3+6x2+12x+8=(x+2)3  (3) .

Λόγω τώρα της (3) η δοσμένη ανίσωση ισοδύναμα γράφεται:

x3+6x2+12x+8<0 (x+2)3<0 (x+2)2(x+2)<0

( διότι για κάθε x∈r ισχύει: (x+2)2≥0 και (x+2)2=0 x+2=0 x=−2 )

x+2<0 x<−2 x∈(-∞,−2) .

**iv)** Θα προσπαθήσουμε να παραγοντοποιήσουμε το πρώτο μέλος της ανίσωσης, το οποίο αρχικά γράφεται: x4–6x3+11x2–6x=x(x3–6x2+11x–6) (1)

Η παράσταση τώρα x3–6x2+11x–6 είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού ως προς x με ακέραιους συντελεστές, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα ακεραίων ριζών, αν το πολυώνυμο x3–6x2+11x–6 έχει ακέραια ρίζα, αυτή θα είναι διαιρέτης του σταθερού του όρου −6, δηλαδή θα είναι κάποιος από τους: ±1, ±2, ±3, ±6.

Εξετάζουμε λοιπόν αν από τους διαιρέτες του −6 υπάρχει κάποιος που είναι ρίζα του πολυωνύμου x3–6x2+11x–6:

Για x=1 έχουμε: 13–6∙12+11∙1–6 =1–6∙1+11–6 =1–6+5 =0 το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου x3–6x2+11x–6.

Στη συνέχεια κάνουμε το σχήμα Horner για τη διαίρεση (x3–6x2+11x–6):(x−1), το οποίο είναι το εξής:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | −6 | 11 | −6 | 1 |
|  | 1 | −5 | 6 |  |
| 1 | −5 | 6 | 0 |  |

Άρα: πηλίκο π(x)=x2−5x+6 και υπόλοιπο υ=0, πράγμα άλλωστε αναμενόμενο .

Επομένως: x3–6x2+11x–6=( x−1)(x2−5x+6) (2).

Λόγω τώρα της (2) η (1) ισοδύναμα γράφεται: x4–6x3+11x2–6x=x(x−1)(x2−5x+6) (3)

Εξάλλου η παράσταση x2−5x+6 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x με ρίζες 2 και 3, οπότε, σύμφωνα με τη θεωρία του δευτεροβάθμιου τριωνύμου από την Α΄ Λυκείου, παραγοντοποιείται ως εξής:

x2−5x+6=1∙(x–2)(x–3) x2−5x+6=(x–2)(x–3) (4)

Λόγω λοιπόν της (4) η (3) ισοδύναμα γράφεται:

x4–6x3+11x2–6x=x(x−1)(x–2)(x–3) (5)

Οπότε λόγω της (5) η δοσμένη ανίσωση ισοδύναμα γράφεται:

x(x−1)(x–2)(x–3)>0 (6)

Για την επίλυση της (6) εργαζόμαστε ως εξής:

Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο καθενός από τους παράγοντες του πρώτου μέλους της (6):

● για το x προφανώς δεν έχουμε να κάνουμε κάποια αναφορά

● για το x−1 έχουμε ότι: x−1=0 x=1 και x−1>0 x>1

● για το x−2 έχουμε ότι: x−2=0 x=2 και x−2>0 x>2

● για το x−3 έχουμε ότι: x−3=0 x=3 και x−3>0 x>3 .

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε πίνακα, στον οποίο συμπεριλαμβάνουμε όλους τους παράγοντες του πρώτου μέλους της (6) με τις ρίζες και τα πρόσημά τους, ανάλογα με τις διάφορες τιμές που παίρνει το x, ενώ στην τελευταία γραμμή έχουμε τα αντίστοιχα συμπεράσματα για το γινόμενο των παραγόντων αυτών.

Κατασκευάζουμε λοιπόν τον εξής πίνακα:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -∞ 0 1 2 3 +∞ | | | | |
| x | − 0 + | | + | + | + |
| x−1 | − | − 0 + | | + | + |
| x−2 | − | − | * 0 + | | + |
| x−3 | − | − | − | * 0 + | |
| x(x−1)(x–2)(x–3) | + 0 − 0 + 0 − 0 + | | | | |

Από τον πίνακα προκύπτει ότι:

x(x−1)(x–2)(x–3)>0 (x<0 ή 1<x<2 ή x>3 )

Επομένως και λόγω της (6) έχουμε ότι οι λύσεις της δοσμένης ανίσωσης είναι τα x:

(x<0 ή 1<x<2 ή x>3 ) , δηλαδή τα x∈(-∞, 0)(1, 2)(3, +∞) .

**ΑΣΚΗΣΗ 6**

Να λύσετε τις εξισώσεις:

**i)** x4+12x2–64=0 , **ii)** 2x3–3x2–3x+2=0 , **iii)** 3x4+2x3–34x2+2x+3=0 .

**Λύση**

1. Για κάθε x∈r ισχύει: x4=(x2)2. Θέτουμε λοιπόν: x2=ω (1), όπου ω≥0.

Οπότε λόγω της (1) η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: ω2+12ω–64=0 (2) .

Τώρα η εξίσωση (2) είναι δευτεροβάθμια ως προς ω με ρίζες 4 και −16, από τις οποίες δεκτή είναι μόνο το 4, αφού ω≥0.

Αφού λοιπόν βρήκαμε ότι ω=4 και στην (1) έχουμε θέσει: x2=ω, συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες της δοσμένης εξίσωσης είναι οι ρίζες της εξίσωσης: x2=4 x=2 ή x=−2.

Επομένως οι ρίζες της δοσμένης εξίσωσης είναι οι: 2, −2 .

Παρατήρηση

Η εξίσωση ανήκει στην κατηγορία των διτετράγωνων εξισώσεων.

**ii)** 2x3–3x2–3x+2=0 (2x3+2)−(3x2+3x)=0 2(x3+1)−3x(x+1)=0

2(x+1)(x2−x+1)−3x(x+1)=0(x+1)[2(x2−x+1)−3x]=0 (x+1)(2x2−2x+2−3x)=0

(x+1)(2x2−5x+2)=0

( x+1 = 0 x=−1 ή

2x2−5x+2=0 δευτεροβάθμια ως προς x με ρίζες 2 και ) .

Επομένως οι ρίζες της δοσμένης εξίσωσης είναι οι: −1 , 2 και .

Παρατήρηση

Η εξίσωση θα μπορούσε να λυθεί και με τη βοήθεια του Θεωρήματος ακεραίων ριζών, αλλά η παραπάνω λύση είναι πολύ πιο σύντομη.

**iii)** Παρατηρούμε ότι το x δεν μπορεί να πάρει την τιμή 0, διότι το 0 δεν επαληθεύει την εξίσωση. Οπότε διαιρούμε τα δύο μέλη της δοσμένης εξίσωσης με το x2≠0, οπότε αυτή ισοδύναμα γράφεται:

+ − + + = 0 3x2 + 2x – 34 + + = 0

(3x2 + )+(2x + )– 34 = 0 3(x2 + )+2(x + )–34 = 0 (1)

Τώρα θέτουμε: x + = ω (2), οπότε έχουμε ότι: (x + )2 =ω2x2 + + 2x = ω2

x2 + + 2 = ω2 x2 + = ω2−2 (3)

Οπότε λόγω των (2) και (3 )η εξίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται:

3(ω2−2)+2ω–34 = 0 3ω2−6+2ω–34 = 0 3ω2+2ω–40 = 0 (4)

Η (4) είναι δευτεροβάθμια ως προς ω με ρίζες και −4 .

Αφού λοιπόν βρήκαμε ότι ω = ή ω =−4 και στην (2) έχουμε θέσει: x + = ω, συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες της δοσμένης εξίσωσης είναι οι ρίζες των εξισώσεων:

x + = (5) , x + = −4 (6)

● Λύση της (5) :

(5) 3x∙x +3x∙ =3x∙ 3x2+3=10x 3x2−10x+3=0 x=3 ή x=

● Λύση της (6) :

(6) x∙x +x∙ =x∙(−4) x2+1=−4x x2+4x+1=0 x=−2+ ή x=−2−

Επομένως οι ρίζες της δοσμένης εξίσωσης είναι οι: 3 , , −2+ , −2−

Παρατήρηση

Η εξίσωση είναι της μορφής: αx4+βx3+γx2+βx+α=0 και ανήκει στην κατηγορία των αντίστροφων εξισώσεων, οι οποίες έχουν ως ρίζες ζεύγη αντίστροφων αριθμών.

( Στη συγκεκριμένη εξίσωση για τις ρίζες της έχουμε ότι:

3∙ = 1 και (−2+)( −2−) = (−2)2−()2 = 4−3=1 )

**ΑΣΚΗΣΗ 7**

Να λύσετε τις εξισώσεις:

**i)** 2ημ3x+3συν2x–3ημx–1=0 , **ii)** 2συν3x–7συν2x–2συνx+7=0

**Λύση**

**i)** Από την Τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι για κάθε x∈r ισχύει:

ημ2x+συν2x=1 συν2x=1−ημ2x (1)

Λόγω λοιπόν της (1) η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

2ημ3x+3(1−ημ2x)–3ημx–1=0 2ημ3x+3−3ημ2x–3ημx–1=0

2ημ3x−3ημ2x–3ημx+2=0 (2)

Τώρα θέτουμε: ημx=ω (3), όπου −1≤ω≤1, οπότε η εξίσωση (2) ισοδύναμα γράφεται:

2ημ3x−3ημ2x–3ημx+2=0 2ω3−3ω2–3ω+2=0 (4), η οποία είναι πολυωνυμική εξίσωση με άγνωστο το ω και λύνεται ως εξής:

(4) (2ω3+2)−(3ω2+3ω)=0 2(ω3+1)−3ω(ω+1)=0

2(ω+1)(ω2−ω+1)− 3ω(ω+1)=0 (ω+1)[2(ω2−ω+1)− 3ω]=0

(ω+1)[2ω2−2ω+2−3ω]=0 (ω+1)(2ω2−5ω+2)=0

( ω+1=0ω=−1, δεκτή ή 2ω2−5ω+2=0 δευτεροβάθμια ως προς ω με ρίζες 2 και , από τις οποίες δεκτή είναι η τιμή , αφού για το ω έχουμε ότι−1≤ω≤1 )

Αφού λοιπόν βρήκαμε ότι ω=−1 ή ω= και στην (3) έχουμε θέσει: ημx=ω, συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες της δοσμένης εξίσωσης είναι οι ρίζες των εξισώσεων:

ημx=−1 (5) , ημx = (6)

● Λύση της (5) :

(5) ημx=−ημ ημx=ημ

● Λύση της (6) :

(6) ημx=ημ

Επομένως οι ρίζες της δοσμένης εξίσωσης είναι οι:

**ii)** Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

(2συν3x−2συνx) –(7συν2x−7)=0 2συνx(συν2x−1) –7(συν2x−1)=0

(συν2x−1)(2συνx –7)=0 (συνx−1) (συνx+1)(2συνx –7)=0

( συνx−1=0 (1) ή συνx+1=0 (2) ή 2συνx –7=0 (3) )

Οπότε οι ρίζες της δοσμένης εξίσωσης είναι οι ρίζες των εξισώσεων (1), (2), (3).

● Λύση της (1) :

(1) συνx=1συνx=συν0 x=2κπ

● Λύση της (2) :

(2) συνx=−1συνx=συνπ

● Λύση της (3) :

(3) 2συνx=7 συνx = , η οποία είναι αδύνατη,

διότι για κάθε x∈r ισχύει: −1≤συνx≤1

Επομένως οι ρίζες της δοσμένης εξίσωσης είναι οι:

x=2κπ , , οι οποίες γράφονται απλούστερα x=λπ λ

**ΑΣΚΗΣΗ 8**

Να λύσετε τις ανισώσεις:

**i)** x4–13x2+36>0 , **ii)** |x+1| ≤ |2x+1| .

**Λύση**

**i)** Για κάθε x∈r ισχύει: x4=(x2)2. Θέτουμε λοιπόν: x2=ω (1), όπου ω≥0.

Οπότε λόγω της (1) η δοσμένη ανίσωση ισοδύναμα γράφεται: ω2–13ω+36>0 (2)

Τώρα η ανίσωση (2) είναι δευτεροβάθμια ως προς ω και λύνεται κατά τα γνωστά ως εξής:

Το ω2–13ω+36 είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς ω με ρίζες 4 και 9, οπότε, σύμφωνα με τη θεωρία για το πρόσημο τριωνύμου από την Α’ Λυκείου, το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| ω | -∞ 4 9 +∞ |
| ω2–13ω+36 | + 0 − 0 + |

( διότι ο συντελεστής του ω2 είναι το 1>0 )

Από τον πίνακα έχουμε ότι οι λύσεις της ανίσωσης (2) είναι τα ω:

( ω<4 ή ω>9 ) (3)

Λόγω τώρα της (3) και επειδή στην (1) έχουμε θέσει: x2=ω, συμπεραίνουμε ότι οι λύσεις της δοσμένης ανίσωσης είναι οι λύσεις των ανισώσεων:

x2<4 (4) , x2>9 (5)

● Λύνουμε την (4) < <2 (από ιδιότητα απολύτων)

−2<x<2 .

● Λύνουμε την (5) > >3 (από ιδιότητα απολύτων)

x<−3 ή x>3 .

Επομένως οι λύσεις της δοσμένης ανίσωσης είναι τα x: ( −2<x<2 ή x<−3 ή x>3 ) , δηλαδή τα x∈(-∞, −3)( −2, 2)(3, +∞) .

**ii)** Παρατηρούμε ότι τα δύο μέλη της δοσμένης ανίσωσης είναι μη αρνητικά (καθώς είναι απόλυτα). Οπότε μπορούμε να υψώσουμε ισοδύναμα τα δύο μέλη της στο τετράγωνο, οπότε η δοσμένη ανίσωση ισοδύναμα γράφεται:

|x+1| ≤ |2x+1||x+1|2 ≤ |2x+1|2(x+1)2 ≤ (2x+1)2

x2+2x+1 ≤4x2+4x+1x2+2x− 4x2−4x≤0−3x2−2x≤0−(3x2+2x)≤03x2+2x≥0 (1)

Τώρα η ανίσωση (1) είναι δευτεροβάθμια ως προς x και λύνεται κατά τα γνωστά ως εξής:

Το 3x2+2x είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς ω με ρίζες 0 και −, οπότε, σύμφωνα με τη θεωρία για το πρόσημο τριωνύμου από την Α’ Λυκείου, το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

|  |  |
| --- | --- |
| x | -∞ − 0 +∞ |
| 3x2+2x | + 0 − 0 + |

( διότι ο συντελεστής του x2 είναι το 3>0 )

Από τον πίνακα έχουμε ότι οι λύσεις της ανίσωσης (1), επομένως και της δοσμένης, είναι τα x: ( x≤− ή x≥0 ) , δηλαδή τα x∈(-∞, −][0, +∞) .

Με τη βοήθεια των παραπάνω λυμένων ασκήσεων, ας προσπαθήσουμε τώρα να λύσουμε τις εξής **ΑΣΚΗΣΕΙΣ**:

**1.** Δίνεται το πολυώνυμο P(x)=2x3+3x2–3x–2.

**i)** Να βρείτε τις τιμές Ρ(0) και Ρ(1) και να δικαιολογήσετε ποιος αριθμός από τους 0 και 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x).

**ii)** Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης P(x):(x–1).

**iii)** Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

**2.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**i)** x4–9x2=0 , **ii)** 3x3–4x2–x+2=0 , **iii)** (x+2)2+(x2–4)2=0 .

**3.** Να λύσετε τις ανισώσεις:

**i)** x3–x2–2x≥0 , **ii)** x3+3x2–4x–12<0 .

**4.** Να λύσετε τις ανισώσεις:

**i)** 2x5−162x≤0 , **ii)** 2x3−5x2−6x+9>0 , **iii)** x3−4x2−3x+18≤0 .

**5.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**i)** x4–8x2–9=0 , **ii)** 3x4+5x3–5x–3=0 .

**6.** Να λύσετε την εξίσωση: ημ3x–3ημx+2=0 .

… και κατά τα γνωστά, τις ερωτήσεις σας και τις λύσεις των Ασκήσεων μπορείτε να τις στείλετε στο e-mail: tzanetatos@sch.gr

**Να είστε καλά και να προσέχετε !!!**

Ο καθηγητής σας της Άλγεβρας

Γεράσιμος Τζανετάτος

\*\*\* Η περίληψη της Θεωρίας προέρχεται από το σχολικό βιβλίο, ενώ οι εκφωνήσεις των λυμένων Ασκήσεων και των Ασκήσεων για λύση προέρχονται από τον ιστότοπο [plansmath.blogspot.com](http://www.study4exams.gr).