**Γεια σας και χαρά σας και πάλι καλά μου παιδιά !!!**

Καταρχάς ελπίζω ότι και στη σημερινή μας επικοινωνία βρίσκω, εσάς και τις οικογένειές σας, καλά, δυνατούς και γεμάτος αισιοδοξία.

Όπως βλέπετε αγαπημένοι μου μαθητές και αγαπημένες μου μαθήτριες, δεν σας έχω ξεχάσει. Πώς θα μπορούσε άλλωστε να συμβεί «κάτι τέτοιο»... . Πάμε λοιπόν και πάλι, πιστεύω με πολλή «όρεξη» **πια** από την πλευρά σας, στα «δικά μας» !!!

Ξεκινώντας το σημερινό μας μάθημα, ας δούμε τις λύσεις των ασκήσεων που είχαμε επάνω στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Όσοι από σας έχετε ασχοληθεί με τις ασκήσεις αυτές, να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με τις λύσεις και, αν χρειάζεται, να κάνετε τις αναγκαίες διορθώσεις. Όσοι πάλι δεν μπορέσατε να ασχοληθείτε, να μελετήσετε τις λύσεις και να προσπαθήσετε και μόνοι σας να τις λύσετε. Σε κάθε περίπτωση περιμένω τις απαντήσεις των ασκήσεων, ερωτήσεις και απορίες σας στο e-mail tzanetatos@sch.gr.

Είχαμε λοιπόν από το προηγούμενό μας μάθημα τις εξής ασκήσεις:

**1.** Αν  και , να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

**i**)  , **ii**)  , **iii**)  , **iv**)  , **v**)  , **vi**) 

**Λύση**

 Έχουμε ότι:

**i**) =6

**ii**) = –12⋅6= –72

**iii**) **=**32=9

**iv**) =42=16

**v**) =9–16= –7

**vi**) =9+2⋅6+16=37

**2**. Αν  και , να υπολογίσετε τα:

**i**)  , **ii**) , **iii**) 

**Λύση**

Υπενθυμίζουμε ότι για να υπολογίσουμε το μέτρο ενός διανύσματος χρησιμοποιούμε την ιδιότητα και υπολογίζουμε πρώτα το .

Επίσης, όταν μας δίνεται η γωνία δύο διανυσμάτων, τότε χρησιμοποιούμε το αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο.

Αρχικά βρίσκουμε το . Έχουμε ότι: =3.

Οπότε, σύμφωνα και με την παραπάνω υπενθύμιση, έχουμε ότι:

**i**) =22+2⋅3+32=4+6+9=19. Επομένως =

**ii**) =22−2⋅3+32=4−6+9=7. Επομένως =

**iii**) =9⋅22+24⋅3+16⋅32 =36+72+144=252. Επομένως ===6∙

**3.** Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ κέντρου Ο με πλευρά α. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

**i)**  , **ii)**  , **iii)**  , **iv)**  , **v)**  , **vi)** 

**Λύση** 

Υπενθυμίζουμε ότι στο τετράγωνο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, είναι ίσες, τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του. Επιπλέον, αν η πλευρά του είναι α, τότε κάθε διαγώνιός του είναι ίση με α .

Έχουμε λοιπόν ότι:

**i**) =0, διότι ⊥

**ii**) =0, διότι ⊥

**iii**) ∙συν180ο= ∙ ∙(−1)= −

**iv**) =α2

**v**) = –α2

**vi**) ∙συν45ο= α∙α∙ = α2

**4.** Αν =(–1,2), =(3,–2) και =(1,3), να υπολογίσετε τα: **i)**  και  **ii)** .

**Λύση**

**i)** Βρίσκουμε αρχικά τα ∙ και . Έχουμε ότι:

● ∙=(–1,2)∙(3,–2)=−1∙3+2∙(−2)=−3−4=−7 ∙=−7 (1) και

● =(3,–2)∙(1,3)=3∙1+(−2)∙3=3−6=−3 =−3 (2)

Οπότε λόγω των (1), (2) έχουμε ότι:

=−3∙(–1,2)+(−7)∙(1,3)=(3,−6)+(−7,−21)=(3−7,−6−21)=(−4,−27) Άρα =(−4,−27) . Έχουμε ότι:

**ii)** Βρίσκουμε αρχικά το . Έχουμε ότι:

=== = (3)

Οπότε λόγω της (3) έχουμε ότι:

=∙(–1,2)=(–, 2) =(–, 2)

**5.** Αν ,  και =(–2,3), να βρείτε το είδος των γωνιών:

**i)**  , **ii)**  , **iii)** .

**Λύση**

**i**) Έχουμε ότι: =−1⋅(−3)+2⋅(–2)=3−4= −1<0

Αφού =−1<0 η είναι αμβλεία.

**ii**) Έχουμε ότι: =−1⋅(−2)+2⋅3=2+6=8>0

Αφού =8>0 η είναι οξεία.

**iii**) Έχουμε ότι: =−2⋅(−3)+3⋅(−2) =6−6=0

Αφού =0 η είναι ορθή.

**6.** Δίνονται τα διανύσματα  και . Να βρείτε τη γωνία τους.

**Λύση**

Θα βρούμε τη γωνία των και μέσω του συνημιτόνου της από τον τύπο:

● Υπολογίζουμε αρχικά το : =(1, )∙(, 3)=+3=4

=4 (2)

 ● Υπολογίζουμε στη συνέχεια τα , :

=== =2 =2 (3)

και

=== ==2 =2 (4)

Οπότε από την (1) λόγω των (2), (3) και (4) έχουμε ότι:

 .

**7.** Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(1,2), Β(–2,1) και Γ(3,6). Να βρείτε τη γωνία Α.

**Λύση**

Η γωνία Α θα υπολογιστεί μέσω του συνημιτόνου της από τον τύπο:

συνΑ=.

Έχουμε ότι:

=(–2–1, 1–2) = (–3, –1) οπότε .

=(3–1, 6–2) = (2, 4) οπότε .

 και ∙=(–3, –1)∙ (2, 4) = −3∙2+(−1)∙4

Επομένως = −συν45ο= =συν(180ο−45ο)=συν135ο.

Επειδή όμως είναι 135ο.

Άρα Α=135ο .

**8.** Αν και να βρείτε το λ ώστε:

**i**) =900 , **ii**)  , **iii**) =45ο

**Λύση**

**i**) Έχουμε ότι: =900=0 3⋅2+2⋅λ=0 6+2λ=0

2λ=−6λ=−3

**ii**) Έχουμε ότι:  det()=0=0 3∙λ–2∙2=0

3λ−4=0 3λ=4 λ=

**iii**) , έχουμε ότι:

=45ο συν=συν45ο = (1)

Είναι:

● =(3, 2)∙(2, λ)=3∙2+2∙λ=6+2λ =6+2λ (2)

● === = (3)

● == = (4)

Οπότε η (1) λόγω των (2), (3) και (4) ισοδύναμα γράφεται:

Στη συνέχεια, με τον περιορισμό: 2λ>−6 λ>−3, υψώνουμε τα δύο μέλη της (5) στο τετράγωνο, οπότε προκύπτει η ισοδύναμη εξίσωση:

4∙(6+2λ)2=2∙13∙(4+λ2) 2∙2∙(6+2λ)2=2∙13∙(4+λ2) 2∙(6+2λ)2=13∙(4+λ2)

2∙(36+24λ+4λ2)=13∙(4+λ2) 72+48λ+8λ2=52+13λ2 72+48λ+8λ2−52−13λ2=0

−5λ2+48λ+20=0 δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς λ με ρίζες 10 και − , οι οποίες είναι δεκτές, αφού ικανοποιούν τον περιορισμό λ>−3.

Επομένως οι ζητούμενες τιμές του λ είναι οι: 10 και − .

**9.** Αν  να βρείτε ένα διάνυσμα **** με μέτρο 5 κάθετο στο .

**Λύση**

Έστω =(x, y) το ζητούμενο διάνυσμα. Τότε και σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε ότι:

● =5 =5 x2 + y2 =25 (1)

● ⊥ =0 (4, 3)∙(x, y)=0 4x+3y=0 (2)

Λύνουμε τώρα το σύστημα των (1), (2) ως εξής:

(2) 4x=−3y x= − y (3)

Η (1) λόγω της (3) ισοδύναμα γράφεται:

(− y)2 + y2 =25 y2 + y2 =25 y2 + y2 =25 y2 =25

 y2 =25y2 = 16 y = 4 ή y = −4

Οπότε:

 Αν y = 4, τότε από την (3) έχουμε ότι: x= − ∙4 x = −3

Άρα μία λύση του συστήματος είναι η: (x, y) = (−3, 4)

 Αν y =−4 , τότε από την (3) έχουμε ότι: x= − ∙(−4)x =3

Άρα μία άλλη λύση του συστήματος είναι η: (x, y) = (3,−4)

Επομένως το ζητουμενο διάνυσμα **** είναι το:

**=**(−3, 4) ή **=**(3,−4), δηλαδή **=** ή **=** .

Στη συνέχεια ας επαναλάβουμε περιληπτικά τη θεωρία του δευτέρου κεφαλαίου του βιβλίου μας, το οποίο αναφέρεται στην **ευθεία**:

***2.1* *ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ***

***Εξίσωση Γραμμής***



Αν έχουμε μια εξίσωση με δύο αγνώστους, για παράδειγμα την , τότε **λύση** της εξίσωσης αυτής λέγεται κάθε ζεύγος αριθμών  που την επαληθεύει. Έτσι, για παράδειγμα, τα ζεύγη , , , ,  είναι λύσεις της . Αν τώρα σε ένα σύστημα συντεταγμένων παραστήσουμε με σημεία όλες τις λύσεις της εξίσωσης , τότε θα προκύψει η γραμμή *C*, του διπλανού σχήματος που, όπως γνωρίζουμε από προηγούμενες τάξεις λέγεται παραβολή.

Επειδή οι συντεταγμένες  των σημείων  της παραβολής *C*, και μόνο αυτές, επαληθεύουν την εξίσωση , γι’αυτό η εξίσωση  λέγεται εξίσωση της παραβολής *C*. Γενικά:

Μια εξίσωση με δύο αγνώστους  λέγεται εξίσωση μιας γραμμής *C*, όταν οι συντεταγμένες των σημείων της *C*, και μόνο αυτές, την επαληθεύουν.

Στη συνέχεια, αντί να λέμε, για παράδειγμα, “δίνεται η παραβολή *C* με εξίσωση ”, θα λέμε “δίνεται η παραβολή ” ή απλώς “δίνεται η παραβολή ”

Με τις εξισώσεις των γραμμών μπορούμε με αλγεβρικές μεθόδους να μελετήσουμε τις γεωμετρικές ιδιότητες των γραμμών αυτών ή να αντιμετωπίσουμε διάφορα άλλα συναφή προβλήματα. Αυτό είναι και το βασικό αντικείμενο της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

***Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας***

Η ευθεία γραμμή είναι η απλούστερη και η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη γραμμή. Στην αναζήτηση της εξίσωσης μιας ευθείας θα μας διευκολύνει η έννοια του συντελεστή διεύθυνσης ευθείας.

* Έστω  ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και *ε* μια ευθεία που τέμνει τον άξονα  στο σημείο *Α*.

 

Τη γωνία *ω* που διαγράφει ο άξονας  όταν στραφεί γύρω από το *Α* κατά τη *θετική φορά* μέχρι να συμπέσει με την ευθεία *ε* τη λέμε ***γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα* **. Αν η ευθεία *ε* είναι παράλληλη προς τον άξονα , τότε λέμε ότι σχηματίζει με αυτόν γωνία . Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία *ω* ισχύει  ή σε ακτίνια . Ως **συντελεστή διεύθυνσης** μιας ευθείας *ε* ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας *ω* που σχηματίζει η *ε* με τον άξονα . Προφανώς ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας είναι θετικός, αν η γωνία *ω* που σχηματίζει με τον άξονα  είναι οξεία και αρνητικός, αν είναι αμβλεία. Αν η ευθεία σχηματίζει με τον  μηδενική γωνία, δηλαδή είναι παράλληλη στον άξονα , ο συντελεστής διεύθυνσης είναι ίσος με μηδέν.

Στην περίπτωση που η γωνία της ευθείας *ε* με τον άξονα  είναι , δηλαδή η ευθεία *ε* είναι κάθετη στον άξονα , δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης για την ευθεία αυτή.

* Έστω τώρα ένα διάνυσμα  παράλληλο σε μια ευθεία *ε*. Αν *φ* και *ω* είναι οι γωνίες που σχηματίζουν το  και η *ε* με τον  αντιστοίχως, τότε θα ισχύει  ή  και επομένως . Άρα:

**“Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης”**.

 

Αν είναι γνωστές οι συντεταγμένες δύο σημείων μιας μη κατακόρυφης ευθείας *ε*, δηλαδή μιας ευθείας που δεν είναι κάθετη στον άξονα , τότε μπορούμε να βρούμε και το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας αυτής. Πράγματι, αν  και  είναι δύο σημεία της ευθείας *ε*, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της *ε* είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος , δηλαδή ίσος με . Επομένως:

Ο συντελεστής διεύθυνσης *λ* μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  και , με  είναι

λ.

Για παράδειγμα, ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  και  είναι .

***Συνθήκες Καθετότητας και Παραλληλίας Ευθειών***

Με τη βοήθεια του συντελεστή διεύθυνσης ευθείας, μπορούμε να διατυπώσουμε τις συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας δύο ευθειών στο επίπεδο. Πράγματι, αν  είναι δύο ευθείες με αντίστοιχους συντελεστές διεύθυνσης  και τα διανύσματα  και  είναι παράλληλα προς τις  και  αντιστοίχως, έχουμε τις ισοδυναμίες[[1]](#footnote-1)1



και

 .

Επομένως, αν οι ευθείες  και  έχουν συντελεστές διεύθυνσης  και  αντιστοίχως, τότε:

 και 

***Εξίσωση Ευθείας***

Μια ευθεία στο επίπεδο καθορίζεται, όταν δίνονται ένα σημείο της και ο συντελεστής διεύθυνσής της ή δύο σημεία της. Θα βρούμε την εξίσωση της ευθείας σε καθεμιά από τις δύο αυτές περιπτώσεις.



* Έστω  ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και  ένα σημείο του επιπέδου. Ζητάμε την εξίσωση της ευθείας *ε* που διέρχεται από το *Α* και έχει συντελεστή διεύθυνσης *λ*.

Ένα σημείο  διαφορετικό του  ανήκει στην *ε*, αν και μόνο αν το διάνυσμα  είναι παράλληλο στην *ε*, δηλαδή αν και μόνο αν το  και η *ε* έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Επειδή , έχουμε . Επομένως, το σημείο  ανήκει στην *ε* αν και μόνο αν  ή . Η τελευταία εξίσωση επαληθεύεται και από το σημείο . Άρα η εξίσωση της ευθείας *ε* είναι:

  (1)

Για παράδειγμα, η ευθεία που διέρχεται από το σημείο  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  έχει εξίσωση , δηλαδή .



* Έστω *ε* η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  και .

Αν , τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι  και επομένως η εξίσωση  γίνεται:

  (2)

Οι εξισώσεις (1) και (2) δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν, όταν η ευθεία *ε* είναι κατακόρυφη, αφού στην περίπτωση αυτή δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας. Όμως η εξίσωση μιας κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο  μπορεί να βρεθεί αμέσως, αφού κάθε σημείο της *Μ* έχει τετμημένη  και άρα η εξίσωσή της είναι:



Για παράδειγμα, η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  και  έχει εξίσωση , η οποία μετά τις πράξεις γίνεται  και η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το σημείο  έχει εξίσωση .



***Ειδικές περιπτώσεις***

* Η εξίσωση ευθείας που τέμνει τον άξονα  στο σημείο  και έχει συντελεστή διεύθυνσης *λ* είναι , η οποία τελικά γράφεται

.



* Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης *λ*, τότε η εξίσωσή της είναι  ή

.



Έτσι, οι διχοτόμοι των γωνιών  και  έχουν εξισώσεις  και  αντιστοίχως.



* Τέλος, αν μια ευθεία διέρχεται από το σημείο  και είναι παράλληλη στον άξονα , δηλαδή είναι όπως λέμε μια οριζόντια ευθεία, έχει εξίσωση , δηλαδή

.

***2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ***



***Η Εξίσωση , με  ή ***

* Έστω *ε* μια ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο.

 Αν η ευθεία *ε* τέμνει τον άξονα  στο σημείο  και έχει συντελεστή διεύθυνσης *λ*, τότε θα έχει εξίσωση , η οποία γράφεται 

* Αν η ευθεία *ε* είναι κατακόρυφη και διέρχεται από το σημείο , τότε θα έχει εξίσωση , η οποία γράφεται ισοδύναμα



.

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι και στις δύο περιπτώσεις η εξίσωση της ευθείας *ε* παίρνει τη μορφή  με  ή .

* Αντιστρόφως, έστω η εξίσωση

 με  ή .

 Αν , τότε η εξίσωση γράφεται , που είναι εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης  και η οποία τέμνει τον άξονα  στο σημείο .

 Αν , τότε, λόγω της υπόθεσης, είναι  και η εξίσωση γράφεται , που είναι εξίσωση ευθείας κάθετης στον άξονα  στο σημείο του .

Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις η εξίσωση  με  ή  παριστάνει ευθεία. Αποδείξαμε, δηλαδή, ότι ισχύει το επόμενο θεώρημα:

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής

  με  ή  (1)

και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

Για παράδειγμα, η εξίσωση  παριστάνει ευθεία. Η εξίσωση αυτή γράφεται στη μορφή  και βλέπουμε ότι έχει συντελεστή διεύθυνσης  και τέμνει τον άξονα  στο σημείο .

***Διάνυσμα Παράλληλο ή Κάθετο σε Ευθεία***

Έστω  ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και *ε* μια ευθεία του επιπέδου με εξίσωση . Είδαμε προηγουμένως ότι:

 Αν , τότε η *ε* έχει συντελεστή διεύθυνσης  και επομένως είναι παράλληλη προς το διάνυσμα .

 Αν , τότε η *ε* είναι παράλληλη προς τον άξονα  και επομένως παράλληλη και πάλι προς το διάνυσμα .

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν ισχύει ότι:

**Η ευθεία με εξίσωση**  **είναι παράλληλη στο διάνυσμα** **.**



Όμως, το διάνυσμα  είναι κάθετο στο διάνυσμα , αφού

.

Επομένως:

**Η ευθεία με εξίσωση**  **είναι κάθετη στο διάνυσμα .**

Για παράδειγμα, η ευθεία  είναι παράλληλη στο διάνυσμα  και κάθετη στο διάνυσμα .

***2.3* *ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ***

***Απόσταση Σημείου από Ευθεία***

Έστω *ε* μια ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου, με εξίσωση  και  ένα σημείο εκτός αυτής. Θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση  του σημείου  από την ευθεία *ε*. Αν  είναι η προβολή του  πάνω στην *ε*, τότε θα ισχύει



  (1)

Αποδεικνύεται ότι:



Για παράδειγμα, η απόσταση του σημείου  από την ευθεία  είναι ίση με

.

***Υπολογισμός Εμβαδού***



Έστω ,  και  τρία σημεία του καρτεσιανού επιπέδου. Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τριγώνου *ΑΒΓ*.

Αν *ΓΔ* είναι το ύψος του *ΑΒΓ* από την κορυφή *Γ*, τότε θα ισχύει:

 .

Αποδεικνύεται ότι:

  (1)

Όμως, η 1η γραμμή της ορίζουσας είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος  και η 2η γραμμή οι συντεταγμένες του διανύσματος . Επομένως, η ορίζουσα αυτή είναι ίση με την ορίζουσα  των διανυσμάτων  και . Έτσι, η σχέση (1) γράφεται



Για παράδειγμα, αν  και  είναι οι κορυφές ενός τριγώνου *ΑΒΓ*, τότε  και , οπότε το εμβαδόν του *ΑΒΓ* είναι

.

**Παρατήρηση**

Αποδεικνύεται ότι η απόσταση των παράλληλων ευθειών  και  δίνεται από τον τύπο

**.**

1. 1 Με το συμβολισμό  εννοούμε ότι οι ευθείες  και  είναι παράλληλες ή συμπίπτουν. [↑](#footnote-ref-1)