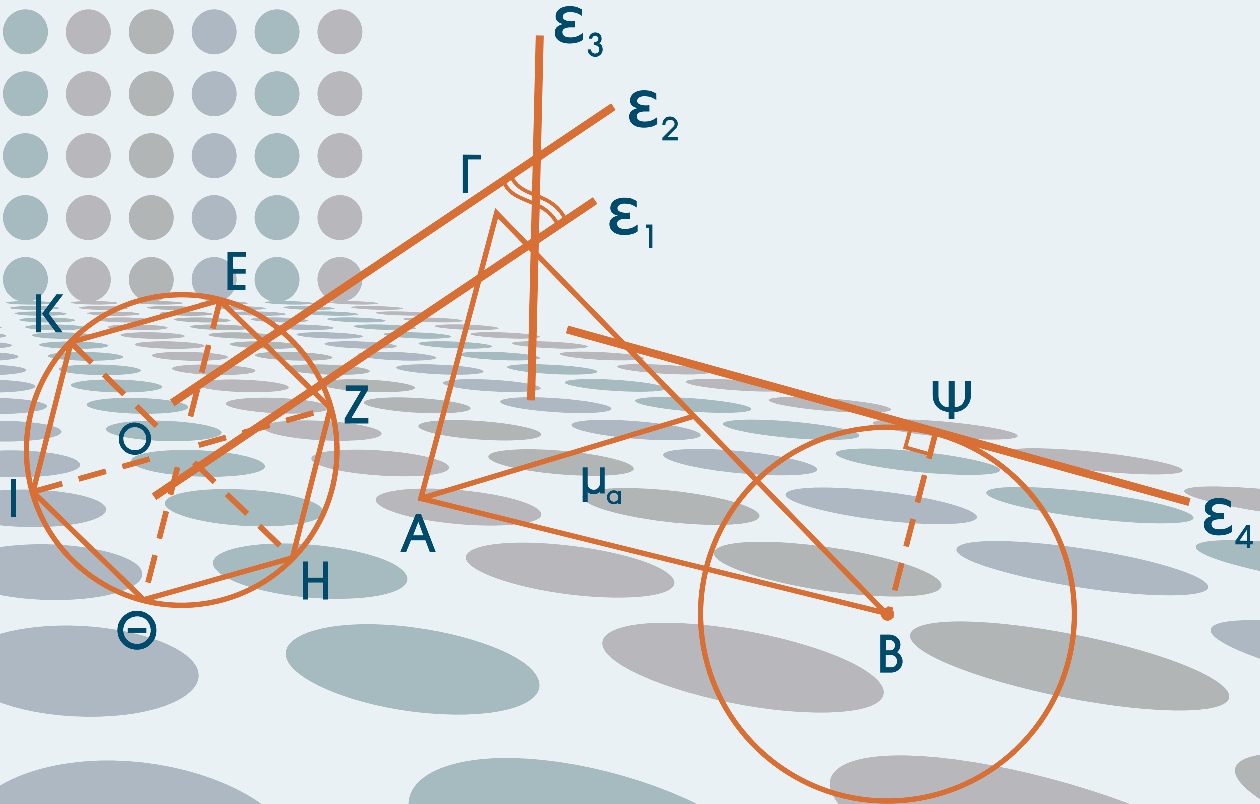
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Τεύχος Α΄



Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Τεύχος Α΄

ΑΡΓΥΡΟΠΟΥΛΟΣ ΗΛΙΑΣ
ΒΛΑΜΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΚΑΤΣΟΥΛΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ
ΜΑΡΚΑΤΗΣ ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ
ΣΙΔΕΡΗΣ ΠΟΛΥΧΡΟΝΗΣ

ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΕΡΓΟΥ:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΟΜΑΔΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ	**Αργυρόπουλος Ηλίας** *Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ.Πολυτεχνείου, Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης* **Βλάμος Παναγιώτης** *Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ.Πολυτεχνείου* **Κατσούλης Γεώργιος** *Μαθηματικός* **Μαρκάτης Στυλιανός** *Επίκουρος Καθηγητής Τομέα Μαθηματικών Ε.Μ.Πολυτεχνείου* **Σίδερης Πολυχρόνης** *Μαθηματικός, τ. Σχολικός Σύμβουλος*
ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ	**Βανδουλάκης Ιωάννης** *Διδάκτωρ Πανεπιστημίου Μ. Lomonosov Μόσχας Ιόνιο Πανεπιστήμιο*
ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ	**Δημητρίου Ελένη**
ΕΠΙΛΟΓΗ ΕΙΚΟΝΩΝ	**Παπαδοπούλου Μπία**
ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ ΣΕΛΙΔΟΠΟΙΗΣΗ	**Αλεξοπούλου Καίτη**

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η «Ευκλείδεια Γεωμετρία» έχει ένα διττό ρόλο να εκπληρώσει: να μυηθεί ο μαθητής στη συλλογιστική την οποία εκφράζει το αξεπέραστο λογικό-επαγωγικό σύστημα του Ευκλείδη και να ανταποκριθεί στις σύγχρονες εκπαιδευτικές επιταγές.

Το βιβλίο αυτό, σύμφωνο με τα πλαίσια συγγραφής που έθεσε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ευελπιστεί ότι θα οδηγήσει τους μαθητές του Λυκείου να γνωρίσουν την αυστηρή αλλά και λιτή μαθηματική γλώσσα, ελπίζοντας ότι θα συνεισφέρει στη μαθηματική παιδεία του τόπου, αναπτύσσοντας το ρεαλισμό της μαθηματικής λογικής και σκέψης.

Το έργο αυτό είναι αποτέλεσμα της συλλογικής προσπάθειας μιας ομάδας μαθηματικών, οι οποίοι αποδεχόμενοι την πρόσκληση του Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας εργάστηκαν συστηματικά για την πραγματοποίησή του.

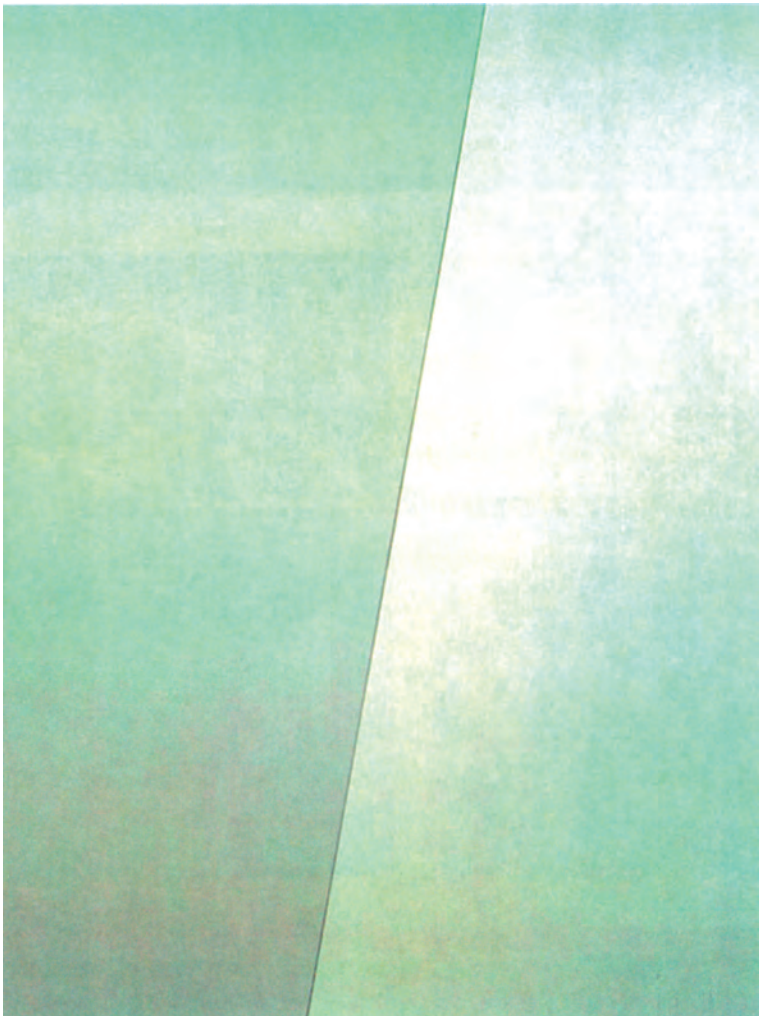
Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε θερμά: το Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας για τη βοήθεια που μας πρόσφερε σε όλη τη διάρκεια της συγγραφής του έργου, τον Καθηγητή του Ε.Μ.Πολυτεχνείου κ. Ευγένιο Αγγελόπουλο για τις σημαντικές του παρατηρήσεις στη διαμόρφωση του βιβλίου και τα μέλη της επιτροπής κρίσης που με τις εύστοχες παρατηρήσεις τους βοήθησαν στην τελική μορφή αυτού του έργου.

Οι συγγραφείς

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ



Ellsworth Kelly (Αμερικανός, 1923).
«Γκρι πανό 2»
2 πανό, λάδια σε καμβά, 1974.

1.1 Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η μελέτη του **χώρου** και των **σχημάτων**, επίπεδων και στερεών, που μπορούν να υπάρξουν μέσα σε αυτόν. Μέσα στο χώρο βρίσκεται ο φυσικός κόσμος, στον οποίο ζούμε, και όλα τα αντικείμενα, μεγάλα ή μικρά, έμψυχα ή άψυχα.

Στο χώρο διακρίνουμε τις **επιφάνειες**, τις **γραμμές** και τα **σημεία**. Οι επιφάνειες έχουν δύο διαστάσεις, οι γραμμές μία, τα σημεία καμία. Οι επιφάνειες διαχωρίζουν τα αντικείμενα μεταξύ τους ή από το περιβάλλον. Πάνω σε μια επιφάνεια μπορούμε να θεωρήσουμε γραμμές, οι οποίες μάλιστα μπορεί να την οριοθετούν. Εδώ χρειάζεται μια διευκρίνιση. Στην καθημερινή γλώσσα μιλάμε για «γραμμές» της ασφάλτου ή για σιδηροδρομικές «γραμμές», επειδή το πλάτος στη μία περίπτωση, το πλάτος και το ύψος στην άλλη είναι αμελητέα ως προς το μήκος. Γενικά, όλα τα υλικά αντικείμενα εκτείνονται σε τρεις διαστάσεις. Στην καθημερινή γλώσσα δεχόμαστε τις προσεγγίσεις, στη Γεωμετρία όχι. Λειτουργούμε αναγκαστικά με αφηρημένες έννοιες, που τις αποκαλούμε **όρους** της Γεωμετρίας.

Η Γεωμετρία ήταν ο πρώτος κλάδος της ανθρώπινης γνώσης που διαμορφώθηκε ως επιστήμη και επί αιώνες ο μόνος. Το αντικείμενό της, ο χώρος και τα σχήματα, είναι και προσιτό και πλούσιο, πρόσφορο για θεωρητική μελέτη αλλά και για πρακτικές εφαρμογές. Από την εποχή του Αρχιμήδη και του Ήρωνα μέχρι σήμερα, τα πεδία εφαρμογής της Γεωμετρίας συνεχώς διευρύνονται. Για τα σπίτια που ζούμε, τα καράβια που ταξιδεύουμε ή τις επεξεργασμένες εικόνες της τηλεόρασης είναι αναγκαία η χρήση της Γεωμετρίας, άμεση ή έμμεση.

Αρχικά, η μελέτη των ιδιοτήτων των διάφορων γεωμετρικών σχημάτων έγινε με τρόπο εμπειρικό, όπως τη συναντήσαμε στο Γυμνάσιο. Η μέθοδος που ακολουθήσαμε τότε ήταν η εύρεση ή επαλήθευση των ιδιοτήτων και σχέσεων ανάμεσα στα γεωμετρικά σχήματα με βάση τη μέτρηση, για την οποία χρησιμοποιούσαμε το διαβαθμισμένο κανόνα (υποδεκάμετρο) και το μοιρογνωμόνιο. Η μέτρηση όμως δεν μπορεί να είναι ακριβής και τα αποτελέσματά της δε γενικεύονται.

Η διαφοροποίηση της Πρακτικής Γεωμετρίας από τη Θεωρητική ή Ευκλείδεια Γεωμετρία, την οποία θα μελετήσουμε στο Λύκειο, συνίσταται στη συστηματική χρήση της λογικής για να θεμελιώσει τις γνώσεις μας για το χώρο, ξεφεύγοντας από μετρήσεις και επιμέρους συμπεράσματα. Οι γνώσεις αυτές υπάρχουν ήδη: όλοι ξέρουν τι είναι κύκλος και τι τετράγωνο – οι αντίστοιχες λέξεις υπάρχουν σε όλες τις γνωστές γλώσσες. Πρόκειται όμως για γνώσεις σκόρπιες, ασύνδετες μεταξύ τους. Η Γεωμετρία τις θεμελιώνει, δηλαδή τις οργανώνει σε ένα σύστημα, και φυσικά προσθέτει και νέες γνώσεις σε αυτές που ήδη υπάρχουν. Κάθε καινούργιο αποτέλεσμα προκύπτει από τα προηγούμενα, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που λέγεται **απόδειξη** και που στηρίζεται στους κανόνες της Λογικής.

Πώς προχωράει αυτή η διαδικασία; Ας δούμε λίγο το τετράγωνο. Το τετράγωνο, όσο απλό και αν φαίνεται, είναι σύνθετη έννοια. Έχει ίσες πλευρές και μάλιστα ανά δύο παράλληλες, ίσες γωνίες και μάλιστα όλες ορθές. Πρέπει, επομένως, πρώτα να ξεκαθαρίσουμε τι σημαίνει ισότητα και ανισότητα (πλευρών ή γωνιών), τι παραλληλία και τι ορθή γωνία (ή καθετότητα). Μόνο μετά από αυτά μπορούμε να μιλήσουμε για τετράγωνο, αφού πρώτα δώσουμε τον ορισμό του. **Η Γεωμετρία προχωράει από το πιο απλό στο πιο σύνθετο**.

Θα πρέπει, ωστόσο, από κάπου να ξεκινήσουμε, από έννοιες οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας, όπως οι έννοιες **σημείο**, **ευθεία** και **επίπεδο** τις οποίες δεχόμαστε ως πρωταρχικές χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις. Όμως οι έννοιες αυτές υπόκεινται στις παρακάτω παραδοχές:

- Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
- Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτή.
- Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.

Ισχυρισμούς όπως οι παραπάνω, που τους δεχόμαστε ως αληθείς χωρίς απόδειξη, τους ονομάζουμε **αξιώματα**. Επομένως, τα αξιώματα δεν αποδεικνύονται, επιλέγονται. Για την Ευκλείδεια Γεωμετρία έχουν προταθεί πάρα πολλά αξιωματικά συστήματα, δηλαδή διαφορετικές επιλογές αξιωμάτων (βλ. Παράρτημα Α). Η δομή του βιβλίου, η σειρά των αποτελεσμάτων εξαρτώνται από την επιλογή των αξιωμάτων, τα οποία δίνονται εκεί που χρειάζονται. Γενικότερα, γίνεται προσπάθεια ώστε, μετά από μία νέα έννοια ή ένα νέο σημαντικό αποτέλεσμα, να εξετάζεται τι καινούργιο μπορεί να προκύψει σε συνδυασμό με τα προηγούμενα. Κάθε νέο αποτέλεσμα που προκύπτει από μία σειρά συλλογισμών θεμελιωμένη στα αξιώματα λέγεται **θεώρημα**, ενώ οι άμεσες συνέπειες ενός θεωρήματος λέγονται **πορίσματα**.

Όπως προαναφέραμε αντικείμενο της Γεωμετρίας είναι η μελέτη των σχημάτων του επιπέδου και του χώρου. Η μελέτη αυτή συχνά υποβοηθείται από ένα σχέδιο του σχήματος.

Στην πορεία εξαγωγής των συμπερασμάτων σημαντικό ρόλο παίζει η διαίσθηση και η εποπτεία. Τα συμπεράσματα, για να είναι γενικά, δεν πρέπει να είναι συνέπειες μόνο της παρατήρησης του σχεδίου. Είναι αναγκαίο να προκύπτουν με ορθό συλλογισμό από τις ιδιότητες του σχήματος, οι οποίες άλλωστε είναι δυνατό να μην είναι όλες ορατές στο σχήμα. Για να καταλήξουμε σε μία απόδειξη ο δρόμος μπορεί να είναι μακρύς και να περνάει μέσα από εικασίες, λάθη, επανατοποθετήσεις, μέχρι να οδηγηθούμε στην τελική μορφή.

Είναι λοιπόν φανερό ότι οι συλλογισμοί μας, για την αντιμετώπιση ενός γεωμετρικού προβλήματος, πρέπει να είναι θεωρητικοί, γενικοί και το σχέδιο του σχήματος να έρχεται αρωγός στην προσπάθεια ανακάλυψης εκείνων των ιδιοτήτων που θα μας οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ερμηνεύει τις μορφές του περιβάλλοντος χώρου χρησιμοποιώντας λίγες πρώτες αρχές και αξιοποιώντας τη σκέψη και τον ορθό λόγο.

1.2 Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας

Η γένεση των πρώτων εννοιών της Γεωμετρίας είναι μια διαδικασία που κράτησε πολλούς αιώνες. Η διαμόρφωσή τους ήταν αποτέλεσμα νοητικής αφαίρεσης όλων των άλλων ιδιοτήτων και σχέσεων των αντικειμένων του κόσμου που μας περιβάλλει, εκτός από τις ιδιότητες της αμοιβαίας θέσης και του μεγέθους. Οι ιδιότητες αυτές εκφράζονται με την ιδέα ότι δύο αντικείμενα είναι «κοντά» ή ότι «άπτονται» το ένα του άλλου, τη σχέση τους όταν το ένα είναι «μέρος» του άλλου ή όταν ένα αντικείμενο βρίσκεται «μεταξύ» δύο άλλων ή το ένα «μέσα» στο άλλο, και την ιδέα της σύγκρισης δύο αντικειμένων, της εξακρίβωσης ότι το ένα είναι «μεγαλύτερο», «μικρότερο» ή «ίσο» με ένα άλλο. Στη διαμόρφωση των γεωμετρικών εννοιών, αποφασιστικής σημασίας πρέπει να ήταν η προσπάθεια απεικόνισης των γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων με ζωγραφικές παραστάσεις, που λειτουργούσαν ως μοντέλα των πραγματικών αντικειμένων. Η διαδικασία αυτή όμως δεν μπορεί να χρονολογηθεί ιστορικά.

Οι πρώτες γραπτές μαρτυρίες γεωμετρικών γνώσεων ανάγονται στην τρίτη με δεύτερη χιλιετία π.Χ. και προέρχονται από τους λαούς της αρχαίας Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας. Αν και οι μαρτυρίες αυτές δεν είναι πλούσιες, ωστόσο μπορούμε να σχηματίσουμε μια ιδέα για το χαρακτήρα της Γεωμετρίας στους πολιτισμούς αυτούς. Οι γεωμετρικές γνώσεις των λαών αυτών συνίστανται, κατά κύριο λόγο, στον υπολογισμό επιφανειών και όγκων ακολουθώντας μια «αλγοριθμική» διαδικασία, έναν κανόνα, ο οποίος εφαρμόζεται για συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές. Με μικρές εξαιρέσεις, τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται είναι εμπειρικής προέλευσης και η λύση που δίνεται δε συνιστά λογική απόδειξη, αν και σε μεμονωμένες περιπτώσεις προβλημάτων αναπτύσσονται μέθοδοι γεωμετρικών μετασχηματισμών, οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ως ένα είδος αποδεικτικής διαδικασίας. Αυτή η μορφή Γεωμετρίας διήρκεσε πολλούς αιώνες χωρίς να σημειωθεί αισθητή πρόοδος.

Μία νέα περίοδος εγκαινιάζεται στην αρχαία Ελλάδα, όπου η Γεωμετρία μετασχηματίζεται σε αφηρημένη αποδεικτική επιστήμη. Εμφανίζεται η έννοια της λογικής απόδειξης που λειτουργεί ως μέθοδος επιβεβαίωσης της αλήθειας μιας γεωμετρικής πρότασης, αλλά και ως στοιχείο που συστηματοποιεί τις γεωμετρικές γνώσεις. Έτσι εμφανίζονται οι πρώτες συστηματικές γεωμετρικές πραγματείες, όπως του Ιπποκράτη του Χίου περί το 440 π.Χ., και τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, που αποτέλεσαν το επιστέγασμα της αρχαίας Ελληνικής μαθηματικής παράδοσης, αλλά και πρότυπο επιστημονικού ιδεώδους για πολλούς αιώνες. Από μελέτη της θέσης, του μεγέθους και της μορφής των γεωμετρικών σχημάτων για άμεσες πρακτικές εφαρμογές η Γεωμετρία μεταμορφώνεται σε επιστήμη που μελετά αφηρημένα νοητικά αντικείμενα, οι σχέσεις των οποίων αποδεικνύονται με τη βοήθεια μιας λογικής ακολουθίας προτάσεων, ξεκινώντας από ορισμένες υποθέσεις που λαμβάνονται χωρίς απόδειξη.

Την Ελληνιστική ακόμα περίοδο αναπτύσσονται θεμελιακά νέες μέθοδοι υπολογισμού επιφανειών και όγκων (π.χ. η μέθοδος της εξάντλησης στα έργα του Αρχιμήδη), που στηρίζονται σε αφηρημένες θεωρητικές προσεγγίσεις και βαθιές μαθηματικές θεωρίες. Επίσης, εμφανίζονται αφηρημένες θεωρίες για νέα γεωμετρικά αντικείμενα, η δυνατότητα εφαρμογής των οποίων θα διευκρινιστεί πολλούς αιώνες μετά, όπως π.χ. η θεωρία των κωνικών τομών του Απολλωνίου, που θα βρει εφαρμογή στη Φυσική μόλις το 17ο αιώνα. Την ίδια περίπου εποχή φαίνεται ότι άρχισαν και οι έρευνες στα θεμέλια της Γεωμετρίας με τις προσπάθειες απόδειξης του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη (των παραλλήλων), οι οποίες συνεχίστηκαν από πολλούς μαθηματικούς του Αραβικού κόσμου.

Η Ευρωπαϊκή Αναγέννηση οδήγησε σε νέα άνθηση της Γεωμετρίας. Ένα νέο βήμα πραγματοποιείται με την εισαγωγή της μεθόδου των συντεταγμένων από τον Ντεκάρτ το πρώτο μισό του 17ου αι. Ο νέος μετασχηματισμός της Γεωμετρίας συνίσταται στη σύνθεση της αναπτυσσόμενης τότε Άλγεβρας με την Ανάλυση που βρισκόταν στο στάδιο της γένεσής της και τη δημιουργία της Αναλυτικής Γεωμετρίας, η οποία μελετά τα γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια των μεθόδων της Άλγεβρας.

Η εφαρμογή των νέων μεθόδων του διαφορικού λογισμού στην Αναλυτική Γεωμετρία οδήγησε στον πολλαπλασιασμό των κλάδων της Γεωμετρίας. Το 18ο αι. διαμορφώνεται η Διαφορική Γεωμετρία στα έργα του Όυλερ και του Μονζ, αντικείμενο της οποίας αρχικά γίνονται οποιεσδήποτε λείες καμπύλες και επιφάνειες και οι μετασχηματισμοί τους. Στα μέσα του 17ου αι. αναπτύσσεται και η Προβολική Γεωμετρία στις μελέτες του Ντεζάργκ και του Πασκάλ πάνω στην απεικόνιση σωμάτων στο επίπεδο. Το αντικείμενο του νέου κλάδου επικεντρώνεται από τον

Πονσελέ (1822) στη μελέτη των ιδιοτήτων των επίπεδων σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες κατά την προβολή τους από ένα επίπεδο σε άλλο, ενώ η καθαυτό θεωρία της γεωμετρικής απεικόνισης (σε συνδυασμό με τα προβλήματα σχεδίασης) οδήγησε στο σύστημα της Παραστατικής Γεωμετρίας του Μονζ.

Σε όλους τους παραπάνω κλάδους οι θεμελιακές έννοιες και αξιώματα παρέμεναν σχεδόν τα ίδια από την εποχή της αρχαίας Ελλάδας. Άλλαζε το πεδίο των γεωμετρικών αντικειμένων που μελετόνταν και οι μέθοδοι που εφαρμόζονταν. Ριζική ανατροπή της εικόνας αυτής παρουσιάζεται στις αρχές του 19ου αι. με την ανακάλυψη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τον Ν. Λομπατσέφσκι (1829) και τον Γ. Μπόλυαϊ (1832). Ο Λομπατσέφσκι, ξεκινώντας από την άρνηση του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη, κατασκεύασε ένα λογικά άψογο σύστημα Γεωμετρίας, παρά το γεγονός ότι οι ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων στο σύστημα που περιέγραφε βρίσκονταν σε κατάφωρη αντίθεση με τη συνήθη εποπτική αντίληψη του χώρου.

Η νέα περίοδος που εγκαινιάζεται με τον Λομπατσέφσκι χαρακτηρίζεται από την ανάπτυξη νέων γεωμετρικών θεωριών (νέων «Γεωμετριών»), την αλλαγή του αντικειμένου της Γεωμετρίας (αντικείμενο της Γεωμετρίας γίνονται τώρα «χώροι» διάφορων ειδών) και το διαχωρισμό της έννοιας του «μαθηματικού» από την έννοια του «πραγματικού» χώρου. Η νέα έννοια του γενικευμένου μαθηματικού χώρου διατυπώνεται σαφώς από τον Ρήμαν το 1854 και ανοίγει νέες προοπτικές στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας οδηγώντας στη δημιουργία της λεγόμενης Ρη-μάνειας Γεωμετρίας, η οποία βρίσκει εφαρμογή στη θεωρία της σχετικότητας. Με τη δύση του 19ου αι. τα θεμέλια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά και των άλλων (μη Ευκλείδειων) «Γεω-μετριών» αποσαφηνίζονται και εκτίθενται με τη μορφή συστήματος αξιωμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η εμπέδωση και η συστηματική μελέτη των πρωταρχικών εννοιών: σημείο, ευθεία, επίπεδο καθώς και των βασικών γεωμετρικών σχημάτων: ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, κύκλος, επίπεδο ευθύγραμμο σχήμα. Όπως είδαμε, οι πρωταρχικές έννοιες σημείο, ευθεία, επίπεδο δίνονται χωρίς ορισμό και με βάση αυτές ορίζονται τα βασικά γεωμετρικά σχήματα, τα οποία θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Andrea Mantegna (Ιταλός, περίπου 1431 - 1506).
Οροφή από την "Camera degli Sposi" (Δωμάτιο των Συζύγων),
τοιχογραφία από το Δουκικό Παλάτι, στη Μάντοβα της Ιταλίας.

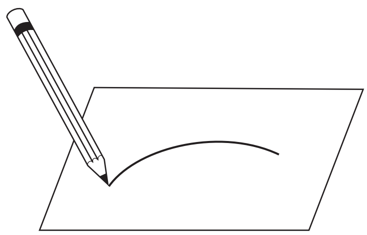
Οι πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες

Όπως αναφέραμε ήδη στην Εισαγωγή, η μελέτη της Γεωμετρίας ξεκινά από έννοιες οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας, όπως οι έννοιες **σημείο, ευθεία** και **επίπεδο** τις οποίες δεχόμαστε ως πρωταρχικές χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις. Οι έννοιες αυτές υπόκεινται στις παρακάτω παραδοχές:

Σχήμα 1

- Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
- Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτή.
- Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.

2.1 Σημεία, γραμμές και επιφάνειες


Σχήμα 2

Ένα ***σημείο*** δεν έχει διαστάσεις. Το παριστάνουμε με μια τελεία και το ονομάζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα (π.χ. Σημείο Α, Σημείο Β (σχ.1)).

Αν μετακινήσουμε χωρίς διακοπή τη μύτη του μολυβιού πάνω σε ένα χαρτί, τότε το ίχνος της γράφει μία ***γραμμή*** (σχ.2). Σε κάθε θέση του μολυβιού το ίχνος της μύτης του παριστάνει ένα σημείο.

Επομένως, η γραμμή μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνεχής σειρά θέσεων που παίρνει ένα κινητό σημείο.

Τη μορφή (σχήμα) κάθε στερεού σώματος την αντιλαμβανόμαστε από την ***επιφάνειά*** του. Το σύνολο των σημείων τα οποία το χωρίζουν από το περιβάλλον του ονομάζεται επιφάνεια του σώματος.

Αρχικά θα ασχοληθούμε με τη μελέτη σχημάτων ή γραμμών, που βρίσκονται σε μια ειδικού τύπου επιφάνεια, το ***επίπεδο***.

2.2 Το επίπεδο

Η απλούστερη από όλες τις επιφάνειες είναι η επίπεδη επιφάνεια ή απλά το ***επίπεδο***. Η επιφάνεια του πίνακα, η επιφάνεια ενός λείου δαπέδου, η επιφάνεια μιας ήρεμης λίμνης κτλ. μας δίνουν την εικόνα ενός επιπέδου.

Στο πρώτο μέρος της Γεωμετρίας, που λέγεται επιπεδομετρία, δε θα ορίσουμε το επίπεδο ούτε τα αξιώματα που το χαρακτηρίζουν, αλλά θα το μελετήσουμε εξετάζοντας τις ιδιότητες των σχημάτων, των οποίων όλα τα στοιχεία περιέχονται στο ίδιο επίπεδο. Τα σχήματα αυτά ονομάζονται ***επίπεδα σχήματα***.

2.3 Η ευθεία

Γνωρίζουμε ότι από δύο διαφορετικά σημεία Α, Β διέρχεται μοναδική ευθεία. Την ευθεία αυτή ονομάζουμε ευθεία ΑΒ ή ΒΑ (σχ.3). Επίσης μία ευθεία συμβολίζεται είτε με ένα μικρό γράμμα (ε, ζ,...) του ελληνικού αλφαβήτου είτε ως x′x. Προφανώς δύο διαφορετικές ευθείες δεν μπορεί να έχουν δύο κοινά σημεία. Άρα θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο ή κανένα. Δύο ευθείες που έχουν ένα μόνο κοινό σημείο λέγονται ***τεμνόμενες*** ευθείες και το κοινό σημείο τους λέγεται ***τομή*** των δύο ευθειών, ενώ δύο ευθείες που δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται ***παράλληλες***.

Το ευθύγραμμο τμήμα

2.4 Η ημιευθεία

Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα χωρίς διακοπές και κενά. Έστω μία ευθεία x′x και σημείο της Α (σχ.4). Τότε το σημείο χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη τα οποία συμβολίζουμε Αx και Αx′ και τα ονομάζουμε ***ημιευθείες*** με ***αρχή*** το σημείο Α.

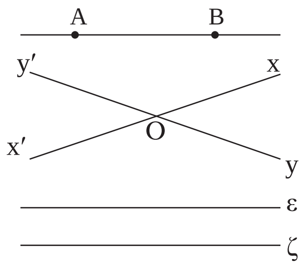
Η ευθεία x′x λέγεται ***φορέας*** της ημιευθείας Αx (σχ.5).

Δύο ημιευθείες Αx, Αy με μόνο κοινό σημείο την αρχή τους Α, όταν έχουν τον ίδιο φορέα λέγονται ***αντικείμενες*** (σχ.6).

2.5 Το ευθύγραμμο τμήμα

Σε ευθεία ε θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία Α, Β. ***Ευθύγραμμο τμήμα*** ΑΒ ή ΒΑ (σχ.7) λέγεται το σχήμα που αποτελείται από τα δύο σημεία Α, Β και τα σημεία της ευθείας ε που βρίσκονται μεταξύ τους.

Τα σημεία Α και Β λέγονται ***άκρα*** του ευθύγραμμου τμήματος, ενώ η ευθεία ε λέγεται ***φορέας*** του τμήματος. Τα σημεία ενός ευθύγραμμου τμήματος, εκτός των άκρων του, λέγονται ***εσωτερικά*** σημεία του τμήματος. Αν π.χ. το Γ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΑΒ (σχ.7), λέμε ότι τα Α, Β βρίσκονται ***εκατέρωθεν*** του Γ, ενώ τα Β, Γ είναι ***προς το***



Σχήμα 3

Σχήμα 4

Σχήμα 5

Σχήμα 6

Σχήμα 7

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Όταν λέμε ότι προεκτείνουμε το τμήμα ΑΒ, θα εννοούμε προς το μέρος του Β, ενώ το ΒΑ προς το μέρος του Α.

ίδιο μέρος του Α. Δύο τμήματα, που έχουν κοινό ένα άκρο και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, λέγονται ***διαδοχικά***.

2.6 Μετατοπίσεις στο επίπεδο

Για κάθε επίπεδο σχήμα δεχόμαστε ότι μπορεί **να μετατοπισθεί μέσα στο επίπεδο πηγαίνοντας από την αρχική του θέση σε μια οποιαδήποτε άλλη θέση και να παραμένει αναλλοίωτο ως προς τη μορφή και το μέγεθος.**

Το τελικό σχήμα που προκύπτει (δηλαδή το αρχικό σχήμα στην τελική θέση) λέγεται ***ομόλογο*** (ή ***εικόνα***) του αρχικού.

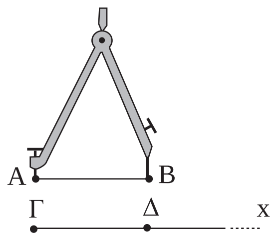
2.7 Σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων

► Ίσα ευθύγραμμα τμήματα

Δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται **ίσα**, όταν με κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν.

Για την ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων δεχόμαστε το παρακάτω αξίωμα:

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Τότε για κάθε ημιευθεία Γx υπάρχει μοναδικό σημείο της Δ, ώστε ΑΒ = ΓΔ (σχ.8). Άμεση συνέπεια του παραπάνω αξιώματος είναι η επόμενη κατασκευή.



Σχήμα 8

► Κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος ίσου προς δοσμένο

Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και η ημιευθεία Γx. Εφαρμόζουμε τη μια ακίδα του διαβήτη στο Α και την άλλη στο Β και, στη συνέχεια, κρατώντας σταθερό το άνοιγμα του διαβήτη τοποθετούμε το ένα άκρο του στο Γ, οπότε το άλλο άκρο του ορίζει το σημείο Δ της Γx (σχ.8). Τότε το τμήμα ΓΔ είναι ίσο με το αρχικό.

► Γεωμετρικές κατασκευές

Η παραπάνω διαδικασία λέγεται ***γεωμετρική κατασκευή***. Θα λέμε ότι ένα σχήμα κατασκευάζεται γεωμετρικά, όταν μπορούμε να το σχεδιάσουμε χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τα ***γεωμετρικά όργανα***, δηλαδή τον ***κανόνα*** (χωρίς υποδιαιρέσεις) και το ***διαβήτη***.

► Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ονομάζεται ένα εσωτερικό του σημείο Μ τέτοιο, ώστε ΑΜ = ΜΒ (σχ.9).

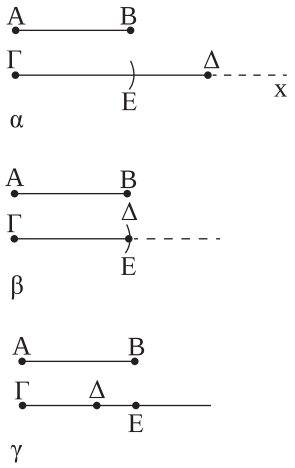
Σχήμα 9

Δεχόμαστε ότι κάθε τμήμα έχει μοναδικό μέσο.

► Άνισα ευθύγραμμα τμήματα

Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ. Προεκτείνουμε το ΓΔ οπότε προκύπτει η ημιευθεία Γx. Μετατοπίζουμε το ΑΒ ώστε το Α να ταυτιστεί με το Γ. Τότε θα υπάρχει μοναδικό σημείο Ε της Γx, ώστε ΑΒ = ΓΕ.

- Αν το Ε είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΓΔ, θα λέμε ότι το τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο από το ΓΔ. Συμβολίζουμε ΑΒ < ΓΔ (σχ.10α).
- Αν το Ε ταυτίζεται με το Δ, τότε ΑΒ = ΓΔ, όπως προηγούμενα (σχ.10β).
- Αν το Ε δεν είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΓΔ, θα λέμε ότι το τμήμα ΑΒ είναι μεγαλύτερο από το ΓΔ. Συμβολίζουμε ΑΒ > ΓΔ (σχ.10γ).

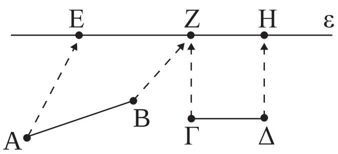


Σχήμα 10

2.8 Πράξεις μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων

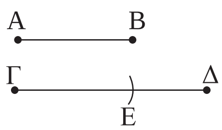
Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ.

i) Με τη βοήθεια του διαβήτη ορίζουμε πάνω σε μία ευθεία ε τα διαδοχικά τμήματα ΕΖ = ΑΒ και ΖΗ = ΓΔ (σχ.11). Έτσι κατασκευάζουμε το τμήμα ΕΗ, που λέγεται ***άθροισμα*** των ΑΒ και ΓΔ και γράφουμε **ΕΗ = ΑΒ + ΓΔ**. Η διαδικασία αυτή λέγεται ***πρόσθεση*** δύο ευθύγραμμων τμημάτων. Στην πρόσθεση ευθύγραμμων τμημάτων ισχύουν ιδιότητες ανάλογες με αυτές που ισχύουν στην πρόσθεση αριθμών (βλ. Δραστηριότητα).



Σχήμα 11

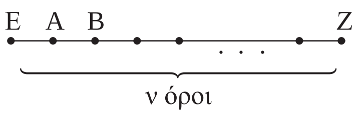
ii) Αν ΑΒ < ΓΔ τότε υπάρχει εσωτερικό σημείο Ε του ΓΔ, ώστε ΓΕ = ΑΒ (σχ.12). Το τμήμα ΕΔ λέγεται διαφορά του ΑΒ από το ΓΔ και συμβολίζεται **ΕΔ = ΓΔ – ΑΒ**.



Σχήμα 12

iii) Αν ν φυσικός αριθμός, τότε ονομάζεται ***γινόμενο*** του τμήματος ΑΒ επί το φυσικό αριθμό ν το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ, το οποίο είναι το άθροισμα ν διαδοχικών ευθύγραμμων τμημάτων ίσων προς το ΑΒ (σχ.13). Γράφουμε

$$\mathbf{EZ = \nu \cdot AB} \text{ ή ισοδύναμα } \mathbf{AB = \frac{EZ}{\nu}}.$$



Σχήμα 13

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

*Αν ΑΒ = ΓΔ, τότε η διαφορά ΓΔ – ΑΒ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, τα άκρα του οποίου συμπίπτουν. Το τμήμα αυτό λέγεται **μηδενικό** ευθύγραμμο τμήμα.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να αποδείξετε τις παρακάτω ιδιότητες που ισχύουν στην πρόσθεση των ευθύγραμμων τμημάτων:

i) ΑΒ + ΓΔ = ΓΔ + ΑΒ ***(αντιμεταθετική)***

ii) (ΑΒ + ΓΔ) + ΕΖ = ΑΒ + (ΓΔ + ΕΖ) ***(προσεταιριστική)***.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Το μήκος του τμήματος ΑΒ θα συμβολίζεται με (ΑΒ) ή απλούστερα με ΑΒ, όταν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης.

2.9 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος - Απόσταση δύο σημείων

► Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

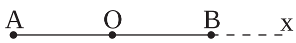
Είπαμε παραπάνω ότι μπορούμε να συγκρίνουμε κάθε ευθύγραμμο τμήμα με ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα. Ένα τμήμα με το οποίο συγκρίνουμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα λέγεται ***μονάδα μήκους***. Θα δούμε στη συνέχεια (Κεφάλαιο 7) ότι για δύο οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΑΒ υπάρχει ένας θετικός αριθμός ρ (όχι απαραίτητα φυσικός), ώστε ΓΔ = ρΑΒ. Έτσι, αν θεωρήσουμε ως μονάδα μήκους το ΑΒ, τότε ο αριθμός ρ λέγεται ***μήκος*** του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ.

Σχήμα 14

► Απόσταση δύο σημείων

Έστω δύο σημεία Α, Β (σχ.14). Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ λέγεται ***απόσταση*** των σημείων Α και Β.

2.10 Σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο



Σχήμα 15

Έστω Ο σημείο του επιπέδου. Τότε για κάθε σημείο Α, υπάρχει μοναδικό σημείο Β τέτοιο, ώστε το Ο να είναι το μέσο του ΑΒ. Πράγματι αρκεί να προεκτείνουμε το τμήμα ΑΟ και στην ημιευθεία Οx να πάρουμε τμήμα ΟΒ = ΟΑ (σχ.15). Το σημείο Β λέγεται ***συμμετρικό*** του Α ως προς Ο. Προφανώς και το Α είναι συμμετρικό του Β ως προς το Ο. Τα σημεία Α και Β λέγονται ***συμμετρικά*** σημεία ως προς ***κέντρο συμμετρίας*** το σημείο Ο. Παρατηρούμε ότι τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι συμμετρικά ως προς το μέσο του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

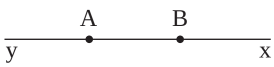
1. *Δύο διαφορετικές ευθείες μπορεί να έχουν:*

☐ *i) κανένα κοινό σημείο*
☐ *ii) ένα κοινό σημείο*
☐ *iii) δύο κοινά σημεία*
☐ *iv) άπειρα κοινά σημεία*

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. *Στο παρακάτω σχήμα ποιες ημιευθείες ορίζονται:*

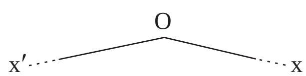
i) με αρχή το Α, *ii) με αρχή το Β.*



Ποιες από αυτές είναι αντικείμενες;

3. *Τα σημεία Α, Β, Γ και Δ είναι συνευθειακά. Αν το Β είναι μεταξύ των Α, Γ και το Γ μεταξύ των Α, Δ, να δικαιολογήσετε γιατί το Γ είναι μεταξύ των Β, Δ.*

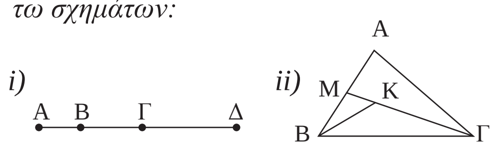
4. *Οι ημιευθείες Οx′ και Οx του παρακάτω σχήματος είναι αντικείμενες;*



5. *Πόσες ευθείες ορίζουν τρία διαφορετικά σημεία;*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από όλα τα σημεία των παρακάτω σχημάτων:*



2. *Σχεδιάστε τρεις ευθείες, οι οποίες να τέμνονται ανά δυο, χωρίς να διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο και βρείτε: i) πόσα είναι τα σημεία τομής των ευθειών, ii) πόσες ημιευθείες και πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται.*

3. *Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ και Δ ώστε ΑΒ = ΓΔ. Να δικαιολογήσετε ότι ΑΓ = ΒΔ.*

4. *Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ. Αν Μ και Ν τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε ότι ΑΓ = 2ΜΝ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

i) $ΕΖ = \dfrac{ΑΔ + ΒΓ}{2}$, ii) $ΑΓ + ΒΔ = ΑΔ + ΒΓ$.

2. *Σε ευθεία ε θεωρούμε τμήμα ΑΒ, το μέσο του Μ, Γ τυχαίο εσωτερικό σημείο του τμήματος ΜΒ και Δ τυχαίο σημείο εξωτερικό του τμήματος ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:*

i) $ΓΜ = \dfrac{ΓΑ - ΓΒ}{2}$, ii) $ΔΜ = \dfrac{ΔΑ + ΔΒ}{2}$.

3. *i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τριάδα συνευθειακών σημείων Α, Β, Γ, ισχύει $ΑΒ \leq ΑΓ + ΓΒ$.*

ii) Αν τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι $ΑΔ \leq ΑΓ + ΓΒ + ΒΔ$.

Σύνθετα Θέματα

1. *Αν Α, Β, Γ είναι τρία συνευθειακά σημεία και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι*

$ΔΕ = \dfrac{ΒΓ}{2}$.

2. *Από μια περιοχή διέρχονται τέσσερις ευθείες οδοί, έτσι ώστε ανά δύο να διασταυρώνονται και ανά τρεις να μη διέρχονται από το ίδιο σημείο. Η τροχαία για να διευκολύνει την κίνηση θέλει να τοποθετήσει έναν τροχονόμο σε κάθε διασταύρωση. Πόσοι τροχονόμοι χρειάζονται; Να εξετασθεί το ίδιο πρόβλημα για ν δρόμους ($ν \geq 2$).*

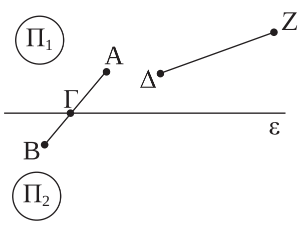
Γωνίες

2.11 Ημιεπίπεδα

Για το επίπεδο δεχόμαστε ότι:

Κάθε ευθεία ε ενός επιπέδου Π χωρίζει το επίπεδο αυτό σε δύο μέρη $Π_1$ και $Π_2$, τα οποία βρίσκονται ***εκατέρωθεν*** αυτής. Τα σημεία του $Π_1$, μαζί με τα σημεία της ε (σχ.16) αποτελούν ένα σχήμα που λέγεται ***ημιεπίπεδο***.

Για να καθορισθεί ένα ημιεπίπεδο, αρκεί να ξέρουμε, εκτός από την ευθεία ε, ένα ακόμα σημείο του. Έστω Α αυτό το σημείο (σχ.16), τότε το $Π_1$ συμβολίζεται και (ε, Α). Όμοια το $Π_2$ συμβολίζεται (ε, Β).

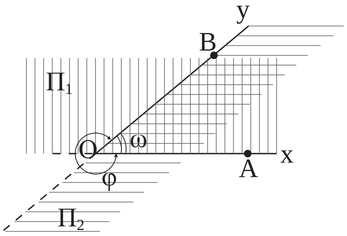


Σχήμα 16

Για τα ημιεπίπεδα $Π_1$ και $Π_2$ δεχόμαστε ότι:

Αν δύο σημεία του επιπέδου βρίσκονται εκατέρωθεν μίας ευθείας ε, τότε η ευθεία ε τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα δύο σημεία.

Έτσι η ε τέμνει το ΑΒ στο σημείο Γ, που βρίσκεται **μεταξύ** των Α και Β, ενώ δεν τέμνει το ΔΖ (σχ.16).

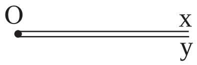


Σχήμα 17

2.12 Η γωνία

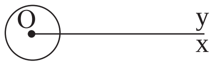
Από τυχαίο σημείο O ενός επιπέδου φέρουμε δύο ημιευθείες Ox και Oy (σχ.17), οι οποίες δεν έχουν τον ίδιο φορέα. Έστω σημεία A, B των ημιευθειών Ox, Oy αντίστοιχα. Το σχήμα που αποτελείται από τα κοινά σημεία των ημιεπιπέδων (Ox, B) και (Oy, A) λέγεται ***κυρτή γωνία*** με ***κορυφή*** O και ***πλευρές*** Ox και Oy. Συμβολίζεται με $x\hat{O}y$ ή $y\hat{O}x$ ή $\hat{O}$ ή $A\hat{O}B$ ή $B\hat{O}A$ (σχ.17) και είναι φανερό ότι καθορίζεται από τις πλευρές της.

Τα σημεία του επιπέδου, που δεν ανήκουν στην κυρτή γωνία $x\hat{O}y$, μαζί με τα σημεία των ημιευθειών Ox και Oy λέγεται ***μη κυρτή γωνία*** με κορυφή O και πλευρές Ox και Oy.



Σχήμα 18

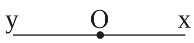
Τα σημεία μίας γωνίας, που δεν ανήκουν στις πλευρές της λέγονται ***εσωτερικά*** σημεία της και αποτελούν το ***εσωτερικό*** της γωνίας. Τα σημεία που δεν ανήκουν στη γωνία λέγονται ***εξωτερικά*** σημεία της και αποτελούν το ***εξωτερικό*** της γωνίας.



Σχήμα 19

Στην ειδική περίπτωση που οι ημιευθείες Ox και Oy έχουν τον ίδιο φορέα τότε:

- Αν οι ημιευθείες Ox και Oy ταυτίζονται, τότε ορίζουν μία μόνο ημιευθεία Ox (σχ.18) και η κυρτή γωνία $x\hat{O}y$ λέγεται ***μηδενική γωνία***, ενώ η μη κυρτή γωνία $x\hat{O}y$ ταυτίζεται με όλο το επίπεδο (σχ.19) και λέγεται ***πλήρης γωνία***.
- Αν οι ημιευθείες Ox, Oy είναι αντικείμενες (σχ.20), τότε καθένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία xy λέγεται ***ευθεία γωνία***.

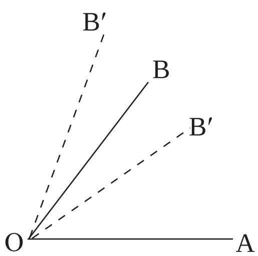


Σχήμα 20

Στα επόμενα, όταν θα λέμε απλώς γωνία, θα εννοούμε κυρτή γωνία.

2.13 Σύγκριση γωνιών

Ας θεωρήσουμε δύο γωνίες $A\hat{O}B$ και $A\hat{O}B'$ που έχουν κοινή κορυφή O, την OA κοινή πλευρά και τις OB, OB′ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς το φορέα της OA (σχ.21α). Τότε:

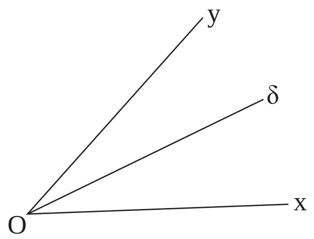


Σχήμα 21α

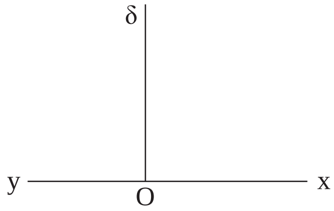
i) Αν οι πλευρές OB και OB′ συμπίπτουν, λέμε ότι οι γωνίες είναι ίσες και γράφουμε $A\hat{O}B = A\hat{O}B'$.

ii) Αν η πλευρά OB′ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $A\hat{O}B$, λέμε ότι η γωνία $A\hat{O}B'$ είναι μικρότερη από τη γωνία $A\hat{O}B$ και γράφουμε $A\hat{O}B' < A\hat{O}B$.

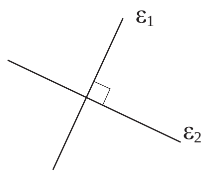
iii) Αν η πλευρά OB′ βρίσκεται εκτός της γωνίας $A\hat{O}B$,



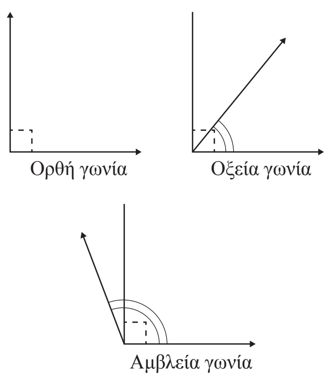
Σχήμα 22



Σχήμα 23



Σχήμα 24



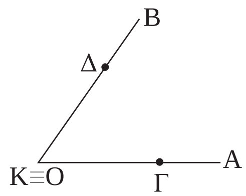
Σχήμα 25

λέμε ότι η γωνία $A\hat{O}B'$ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία $A\hat{O}B$ και γράφουμε $A\hat{O}B' > A\hat{O}B$.

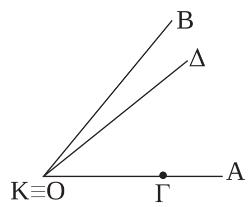
Για να συγκρίνουμε δύο γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{K}\Delta$ που βρίσκονται σε τυχαία θέση μετατοπίζουμε την $\Gamma\hat{K}\Delta$ έτσι ώστε, η κορυφή της Κ να ταυτισθεί με το Ο και η μία της πλευρά ΓΚ να συμπέσει με την πλευρά ΟΑ της γωνίας $A\hat{O}B$.

Τότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

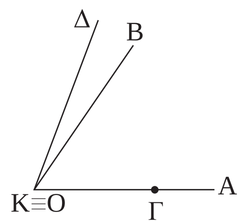
- Αν η πλευρά ΚΔ συμπίπτει με την ΟΒ, τότε οι γωνίες είναι ίσες: $A\hat{O}B = \Gamma\hat{K}\Delta$ (σχ.21β).
- Αν η πλευρά ΚΔ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $A\hat{O}B$, τότε η γωνία $\Gamma\hat{K}\Delta$ είναι μικρότερη της $A\hat{O}B$: $\Gamma\hat{K}\Delta < A\hat{O}B$ (σχ.21γ).
- Αν η πλευρά ΚΔ βρίσκεται στο εξωτερικό της γωνίας $A\hat{O}B$, τότε η γωνία $\Gamma\hat{K}\Delta$ είναι μεγαλύτερη της $A\hat{O}B$: $\Gamma\hat{K}\Delta > A\hat{O}B$ (σχ.21δ).



Σχήμα 21β



Σχήμα 21γ



Σχήμα 21δ

Διχοτόμος γωνίας

Διχοτόμος μιας γωνίας $x\hat{O}y$ λέγεται η ημιευθεία Οδ, που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες, δηλαδή $x\hat{O}\delta = \delta\hat{O}y$ (σχ.22).

Δεχόμαστε ότι κάθε γωνία έχει μοναδική διχοτόμο.

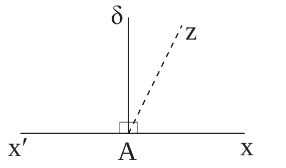
Κάθετες ευθείες - Είδη γωνιών

Έστω $x\hat{O}y$ μια ευθεία γωνία και Οδ η διχοτόμος της (σχ.23). Καθεμία από τις ίσες γωνίες $x\hat{O}\delta$ και $\delta\hat{O}y$ που προκύπτουν λέγεται ***ορθή*** γωνία, και θα τη συμβολίζουμε ∟.

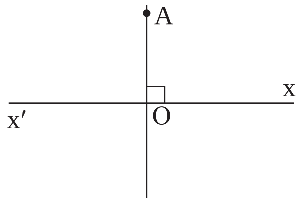
Οι φορείς των πλευρών μίας ορθής γωνίας ονομάζονται ευθείες ***κάθετες*** μεταξύ τους. Δύο κάθετες ευθείες ε_1, ε_2 τις συμβολίζουμε με $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ (σχ.24).

Μια κυρτή γωνία θα λέγεται ***οξεία*** αν είναι μικρότερη από ορθή γωνία, ενώ θα λέγεται ***αμβλεία*** αν είναι μεγαλύτερη από ορθή γωνία (σχ.25).

2.14 Ευθεία κάθετη από σημείο σε ευθεία



Σχήμα 26



Σχήμα 27

Ας θεωρήσουμε ευθεία x′x και ένα σημείο A (σχ.26).

Αν το A είναι σημείο της ευθείας και Aδ η διχοτόμος της ευθείας γωνίας $x\hat{A}x'$, τότε από τον ορισμό της ορθής γωνίας προκύπτει ότι $A\delta \perp x'x$.

Αν υποθέσουμε ότι και μια άλλη ευθεία Az (σχ.26), διαφορετική της Aδ, είναι κάθετη στην xx′, τότε θα είναι $x\hat{A}z = z\hat{A}x' = 1\llcorner$, δηλαδή η Az είναι διχοτόμος της $x\hat{A}x'$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, γιατί η διχοτόμος είναι μοναδική. Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Από κάθε σημείο ευθείας άγεται μία μόνο κάθετος σε αυτή.

Το ίδιο συμβαίνει (σχ.27) όταν το A δεν είναι σημείο της ευθείας. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιούμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της καθέτου, έννοιες τις οποίες θα διαπραγματευθούμε με περισσότερες λεπτομέρειες παρακάτω (βλ. §3.5), όπου και θα γίνει η κατασκευή της καθέτου με χρήση κανόνα και διαβήτη.

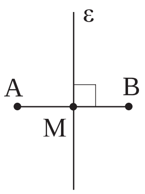
Το μήκος του μοναδικού κάθετου ευθύγραμμου τμήματος AO που άγεται από το σημείο A στην ευθεία x′x λέγεται ***απόσταση*** του σημείου A από την ευθεία x′x (σχ.27).

ΣΧΟΛΙΟ

Μέθοδος της «απαγωγής σε άτοπο»

Στην απόδειξη της μοναδικότητας της καθέτου σε ευθεία, από σημείο A της ευθείας, υποθέσαμε ότι εκτός της Aδ υπάρχει και άλλη κάθετος προς τη x′x (δηλαδή ότι το συμπέρασμα δεν είναι ακριβές) και καταλήξαμε ότι η γωνία $x'\hat{A}x$ έχει δύο διχοτόμους, το οποίο είναι «άτοπο» (δηλαδή έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ή άλλη γνωστή πρόταση). Ο παραπάνω τρόπος απόδειξης λέγεται μέθοδος της «απαγωγής σε άτοπο».

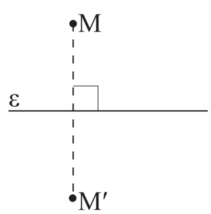
► Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος - Σημεία συμμετρικά ως προς άξονα



Σχήμα 28

Η ευθεία ε που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα AB και διέρχεται από το μέσο του λέγεται ***μεσοκάθετος*** του ευθύγραμμου τμήματος AB (σχ.28).

Τα σημεία A, B λέγονται ***συμμετρικά*** ως προς την ευθεία ε. Η ευθεία ε λέγεται ***άξονας συμμετρίας***.

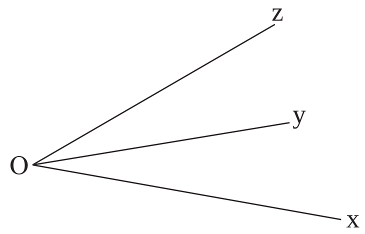


Σχήμα 29

Για να βρούμε επομένως το συμμετρικό ενός σημείου M ως προς μια ευθεία ε, φέρουμε το κάθετο τμήμα από το M προς την ευθεία και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα. Το άκρο M′ της προέκτασης αυτής είναι το συμμετρικό του M (σχ.29). Το συμμετρικό ως προς την ευθεία ε κάθε σημείου της ορίζεται να είναι το ίδιο το σημείο.

2.15 Πράξεις μεταξύ γωνιών

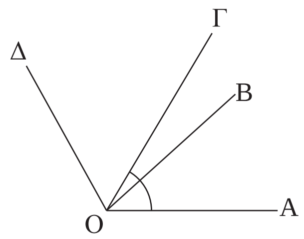
► Εφεξής γωνίες



Σχήμα 30

Δύο γωνίες λέγονται ***εφεξής***, αν έχουν κοινή κορυφή, μία πλευρά κοινή και τις μη κοινές πλευρές εκατέρωθεν της κοινής, π.χ. οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}z$ (σχ.30) είναι εφεξής.

Η γωνία $A\hat{O}B$ (σχ.31) είναι εφεξής με τη $B\hat{O}\Gamma$, και η $B\hat{O}\Gamma$ είναι εφεξής με τη $\Gamma\hat{O}\Delta$. Οι γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ λέγονται ***διαδοχικές***.

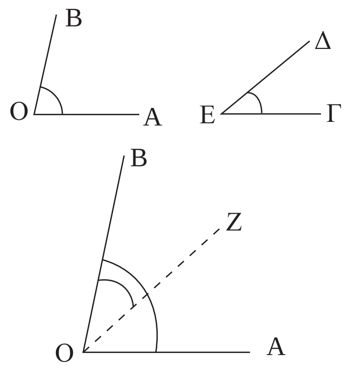


Σχήμα 31

► Πρόσθεση γωνιών - Γινόμενο γωνίας επί φυσικό αριθμό

i) ***Άθροισμα*** δύο εφεξής γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ λέγεται η γωνία $A\hat{O}\Gamma$ με πλευρές τις δύο μη κοινές πλευρές των εφεξής γωνιών (σχ.31).

Αν οι γωνίες δεν είναι εφεξής τις μετατοπίζουμε ώστε να γίνουν. Αν έχουμε παραπάνω από δύο γωνίες, τις καθιστούμε διαδοχικές, π.χ. $A\hat{O}\Delta = A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta$ (σχ.31).



Σχήμα 32

ii) Έστω $A\hat{O}B > \Gamma\hat{E}\Delta$ (σχ.32). Μετατοπίζουμε τη γωνία $\Gamma\hat{E}\Delta$, ώστε η πλευρά της ΕΓ να συμπέσει με την ΟΑ ενώ η πλευρά της ΕΔ μετατοπίζεται σε ημιευθεία ΟΖ στο εσωτερικό της $A\hat{O}B$ (σχ.32). Η γωνία $Z\hat{O}B$ λέγεται ***διαφορά*** της γωνίας $\Gamma\hat{E}\Delta$ από την $A\hat{O}B$ και συμβολίζεται $A\hat{O}B - \Gamma\hat{E}\Delta$. Είναι φανερό ότι $\Gamma\hat{E}\Delta + Z\hat{O}B = A\hat{O}B$.

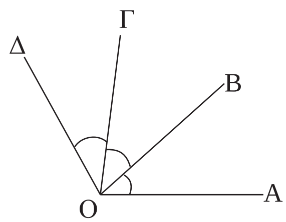
Η διαφορά δύο ίσων γωνιών είναι η μηδενική γωνία.

iii) ***Γινόμενο*** της γωνίας $A\hat{O}B$ επί το φυσικό αριθμό ν ονομάζεται το άθροισμα ν διαδοχικών γωνιών ίσων με $A\hat{O}B$.

Γράφουμε $\nu \cdot A\hat{O}B = \underbrace{A\hat{O}B + A\hat{O}B + \ldots + A\hat{O}B}_{\nu \text{ όροι}}$,

π.χ. $A\hat{O}\Delta = A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta = 3A\hat{O}B$ ή ισοδύναμα

$A\hat{O}B = \dfrac{A\hat{O}\Delta}{3}$ (σχ.33).



Σχήμα 33

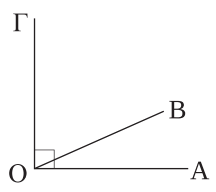
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το άθροισμα γωνιών ή το γινόμενο γωνίας με φυσικό αριθμό μπορεί να ξεπεράσει την πλήρη γωνία.

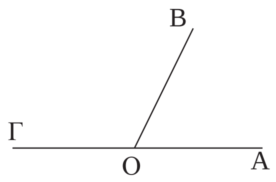
2.16 Απλές σχέσεις γωνιών

► Συμπληρωματικές γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται ***συμπληρωματικές*** αν έχουν άθροισμα μία ορθή γωνία. Καθεμία από αυτές λέγεται και ***συμπλήρωμα*** της άλλης, π.χ. οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ (σχ.34) είναι συμπληρωματικές.



Σχήμα 34



Σχήμα 35

► Παραπληρωματικές γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται ***παραπληρωματικές*** αν έχουν άθροισμα μια ευθεία γωνία. Καθεμία από αυτές λέγεται και ***παραπλήρωμα*** της άλλης (σχ.35).

Προφανώς τα παραπληρώματα ή συμπληρώματα της ίδιας γωνίας (ή ίσων γωνιών) είναι ίσες γωνίες.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες και αντίστροφα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν οι εφεξής γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ (σχ.35) είναι παραπληρωματικές, το άθροισμά τους $A\hat{O}\Gamma$ είναι μία ευθεία γωνία. Επομένως, από τον ορισμό της ευθείας γωνίας οι πλευρές ΟΑ και ΟΓ είναι αντικείμενες ημιευθείες.

Αντίστροφα. Αν οι εφεξής γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ (σχ.35) έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες, τότε από τον ορισμό του αθροίσματος δύο γωνιών προκύπτει ότι το άθροισμα των γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ είναι η ευθεία γωνία $A\hat{O}\Gamma$. Άρα, οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές.

ΣΧΟΛΙΟ

Αντίστροφα Θεωρήματα *λέγονται αυτά στα οποία η υπόθεση του ενός είναι συμπέρασμα του άλλου. Όταν αποδείξουμε ένα θεώρημα (ευθεία πρόταση) δεν προκύπτει ότι και το αντίστροφο είναι αληθές, π.χ.:*

Ευθεία Πρόταση: *Αν δύο γωνίες είναι ορθές, τότε είναι ίσες.*

Αντίστροφη Πρόταση: *Αν δύο γωνίες είναι ίσες, τότε είναι ορθές. Προφανώς η πρόταση αυτή δεν αληθεύει.*

► Κατακορυφήν γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται ***κατακορυφήν***, αν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μίας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης.

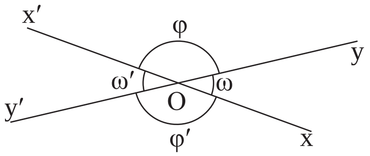
Π.χ. οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ καθώς και οι γωνίες $y\hat{O}x'$ και $x\hat{O}y'$ είναι κατακορυφήν (σχ.36).

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

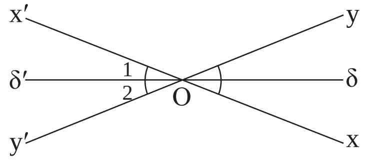
Θεωρούμε τις κατακορυφήν γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ (σχ.36). Παρατηρούμε ότι οι δύο γωνίες είναι ίσες ως παραπληρώματα της ίδιας γωνίας $y\hat{O}x'$.



Σχήμα 36

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας είναι διχοτόμος της κατακορυφήν της γωνίας.



Σχήμα 37

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

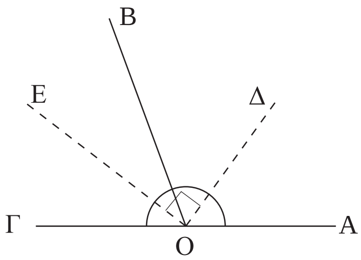
Έστω οι κατακορυφήν γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ και η διχοτόμος $O\delta$ της $x\hat{O}y$. Τότε $\delta\hat{O}x = \delta\hat{O}y$.

Αν $O\delta'$ είναι η προέκταση της $O\delta$, τότε $\hat{O}_1 = \delta\hat{O}x$ και $\hat{O}_2 = \delta\hat{O}y$ (ως κατακορυφήν).

Άρα $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, δηλαδή η $O\delta'$ είναι διχοτόμος της $x'\hat{O}y'$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ

Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.



Σχήμα 38

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες και ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι τους (σχ.38).

Τότε $A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma = 2\llcorner$ ή $2\Delta\hat{O}B + 2B\hat{O}E = 2\llcorner$ ή

$\Delta\hat{O}B + B\hat{O}E = 1\llcorner$ ή $\Delta\hat{O}E = 1\llcorner$. Άρα $O\Delta \perp OE$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

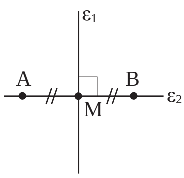
1. *Ποιο είναι το συμμετρικό του σημείου Α ως προς:*

i) την ευθεία ε_1,

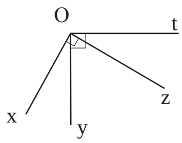
ii) την ευθεία ε_2,

iii) το σημείο Μ.

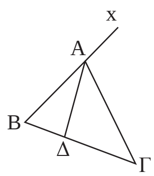
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



2. *Στο διπλανό σχήμα να βρείτε τις οξείες, τις ορθές και τις αμβλείες γωνίες που υπάρχουν.*



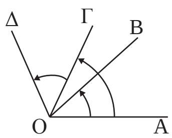
3. *Να γράψετε τρία ζεύγη εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών που υπάρχουν στο διπλανό σχήμα.*



4. *i) Οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι εφεξής;*

ii) Οι γωνίες $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}B$ είναι διαδοχικές;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



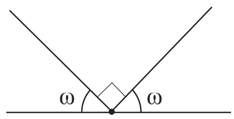
5. *Υπάρχει περίπτωση η συμπληρωματική μιας γωνίας να είναι ίση με την παραπληρωματική της;*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες $x\hat{O}y$, $y\hat{O}z$ και $z\hat{O}t$, ώστε $x\hat{O}z = y\hat{O}t$.*

Να δικαιολογήσετε ότι $x\hat{O}y = z\hat{O}t$.

2. *Να υπολογίσετε, σε μέρη ορθής, τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος.*



3. *Ένα ρολόι τοίχου δείχνει εννέα η ώρα ακριβώς. Τι γωνία σχηματίζουν οι δείκτες του ρολογιού; Μετά από πόσες ώρες (φυσικό αριθμό) οι δείκτες του ρολογιού θα σχηματίζουν ίση γωνία;*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής γωνιών σχηματίζουν γωνία ίση με το ημιάθροισμα των γωνιών αυτών.*

2. *Θεωρούμε κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, τη διχοτόμο της ΟΔ και τυχαία ημιευθεία ΟΓ εσωτερική της γωνίας $A'\hat{O}B$, όπου ΟΑ' η αντικείμενη ημιευθεία της ΟΑ. Να αποδείξετε ότι* $\Gamma\hat{O}\Delta = \dfrac{\Gamma\hat{O}A + \Gamma\hat{O}B}{2}$.

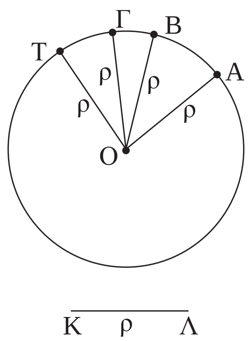
3. *Θεωρούμε κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, τη διχοτόμο της ΟΔ και τυχαία ημιευθεία ΟΓ εσωτερική της γωνίας $\Delta\hat{O}B$. Να αποδείξετε ότι* $\Gamma\hat{O}\Delta = \dfrac{\Gamma\hat{O}A - \Gamma\hat{O}B}{2}$.

Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές. Αν Οx, Οy είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $x\hat{O}y = \dfrac{A\hat{O}\Delta + B\hat{O}\Gamma}{2}$.

2. *Θεωρούμε αμβλεία γωνία $A\hat{O}B$ και στο εσωτερικό της την ημιευθεία $O\Gamma \perp OA$. Αν ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $\Delta\hat{O}E = \dfrac{1}{2}\llcorner$.

Κύκλος

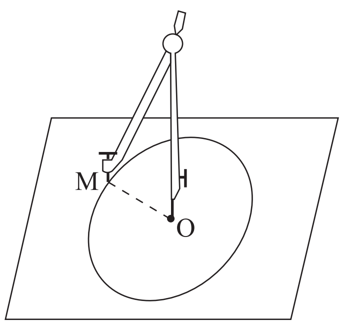


Σχήμα 39

2.17 Έννοια και στοιχεία του κύκλου

Θεωρούμε ένα σταθερό σημείο Ο και ένα τμήμα ΚΛ = ρ (σχ.39).

Κύκλος με ***κέντρο*** Ο και ***ακτίνα*** ρ λέγεται το επίπεδο σχήμα του οποίου όλα τα σημεία απέχουν από το Ο απόσταση ίση με ρ. Δεχόμαστε ότι ο κύκλος είναι μία κλειστή γραμμή χωρίς διακοπές και κενά. Ένας κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ συμβολίζεται με (Ο, ρ) ή με (Ο) αν δεν είναι απαραίτητη η αναφορά της ακτίνας και σχεδιάζεται με το γνωστό μας διαβήτη (σχ.40). Κάθε τμήμα ΟΜ, όπου Μ σημείο του κύκλου (Ο, ρ) (σχ.40), λέγεται επίσης ακτίνα του κύκλου.



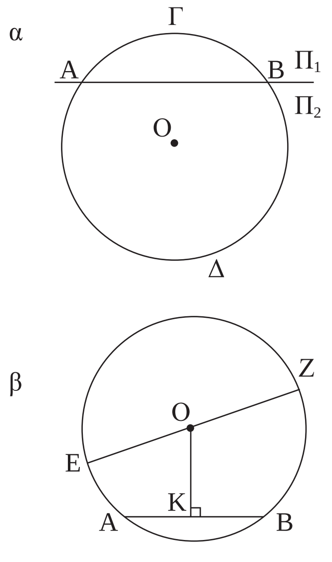
Σχήμα 40

Για τα σημεία Μ ενός κύκλου (Ο, ρ) και μόνο γι' αυτά ισχύει ΟΜ = ρ. Η ισότητα αυτή είναι, επομένως, «χαρακτηριστική» για τα σημεία του.

Το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα λέγεται ***γεωμετρικός τόπος***. Έτσι ο κύκλος (Ο, ρ) είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία, και μόνο γι' αυτά, ισχύει ΟΜ = ρ.

► Τόξα - Χορδές

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο, κέντρου Ο και δύο σημεία του Α και Β (σχ.41α). Τα σημεία αυτά χωρίζουν τον κύκλο σε



Σχήμα 41

δύο μέρη. Το ένα βρίσκεται στο ημιεπίπεδο $Π_1$, που ορίζει η ευθεία ΑΒ, και το άλλο στο $Π_2$.

Καθένα από τα μέρη αυτά λέγεται ***τόξο*** του κύκλου με άκρα Α και Β και συμβολίζεται με $\overset{\frown}{AB}$. Κάθε σημείο ενός τόξου, διαφορετικό από τα άκρα του λέγεται ***εσωτερικό σημείο*** του τόξου. Για να αναφερθούμε στο ένα από τα τόξα με άκρα τα Α και Β, χρησιμοποιούμε και ένα εσωτερικό σημείο. Έτσι, τα τόξα του σχ.41α με άκρα Α, Β συμβολίζονται με $\overset{\frown}{ΑΓΒ}$ το ένα και με $\overset{\frown}{ΑΔΒ}$ το άλλο.

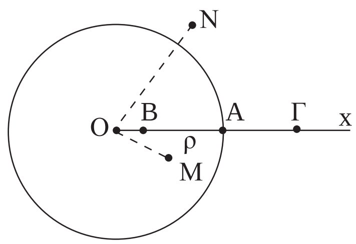
Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (σχ.41β) που ορίζεται από τα άκρα Α, Β ενός τόξου λέγεται ***χορδή*** του τόξου. Η χορδή ενός τόξου λέγεται και χορδή του κύκλου.

Το μοναδικό κάθετο τμήμα ΟΚ (σχ.41β) που άγεται από το κέντρο Ο προς τη χορδή ΑΒ λέγεται ***απόστημα*** της χορδής.

Μια χορδή που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου λέγεται ***διάμετρος*** του κύκλου.

Τα άκρα μιας διαμέτρου λέγονται ***αντιδιαμετρικά*** σημεία του κύκλου. Για παράδειγμα, το τμήμα ΕΖ (σχ.41β) είναι μια διάμετρος του κύκλου και τα σημεία Ε, Ζ είναι αντιδιαμετρικά σημεία. Είναι φανερό ότι η διάμετρος είναι διπλάσια της ακτίνας και το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο της.

Επειδή το μέσο ενός τμήματος είναι μοναδικό, προκύπτει ότι **το κέντρο κάθε κύκλου είναι μοναδικό**.

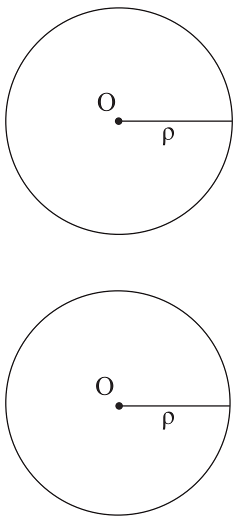


Σχήμα 42

► Θέση σημείου ως προς κύκλο

Έστω ένας κύκλος (Ο, ρ) και μία ημιευθεία Οx που τον τέμνει στο σημείο Α. Για κάθε σημείο Β (σχ.42) της ακτίνας ΟΑ, διαφορετικό του Α ισχύει $ΟΒ < ρ$, ενώ για κάθε σημείο Γ της προέκτασης της ΟΑ ισχύει $ΟΓ > ρ$. Τα σημεία Β, Γ λέγονται αντίστοιχα εσωτερικό και εξωτερικό σημείο του κύκλου.

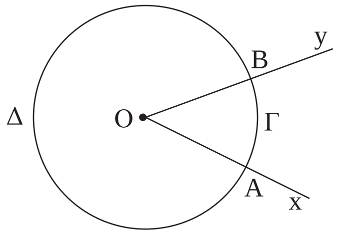
Γενικά, ένα σημείο Μ του επιπέδου ενός κύκλου (Ο, ρ) (σχ.42) λέγεται ***εσωτερικό*** σημείο του κύκλου, όταν $ΟΜ < ρ$, ενώ ένα σημείο Ν λέγεται ***εξωτερικό*** του κύκλου, όταν $ΟΝ > ρ$.



Σχήμα 43

► Ίσοι κύκλοι

Δύο κύκλοι λέγονται ίσοι, όταν ο ένας με κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζεται με τον άλλον (σχ.43). Είναι φανερό ότι δύο κύκλοι είναι ίσοι, αν και μόνο αν έχουν ίσες ακτίνες.



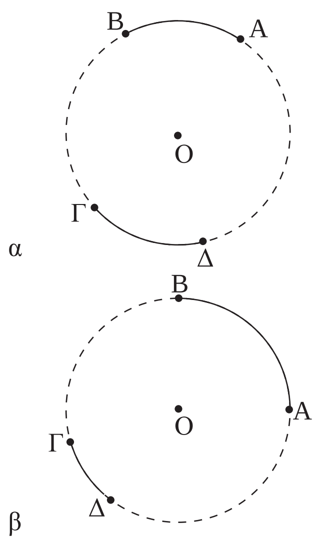
Σχήμα 44

2.18 Επίκεντρη γωνία - Σχέση επίκεντρης γωνίας και τόξου

Μία γωνία λέγεται ***επίκεντρη*** όταν η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου.

Για παράδειγμα, στο σχ.44 η $x\hat{O}y$ είναι μία επίκεντρη γωνία.

Οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Α και Β. Το τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma B}$ που περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας και έχει άκρα τα Α, Β λέγεται ***αντίστοιχο τόξο*** της επίκεντρης γωνίας. Επίσης, λέμε ότι η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ ***βαίνει*** στο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma B}$.



Σχήμα 45

► Σύγκριση τόξων

Η σύγκριση δύο τόξων γίνεται όπως και η σύγκριση των ευθύγραμμων τμημάτων.

Δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων λέγονται **ίσα**, όταν με κατάλληλη μετατόπιση το ένα ταυτίζεται με το άλλο και γράφουμε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ (σχ.45α).

Το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ λέγεται **μεγαλύτερο** από το τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ (ή το τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ μικρότερο του $\overset{\frown}{AB}$) και γράφουμε $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, όταν μετά από κατάλληλη μετατόπιση το $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ταυτίζεται με μέρος του $\overset{\frown}{AB}$ (σχ.45β).

Επισημαίνουμε ότι τα τόξα άνισων κύκλων δεν είναι συγκρίσιμα.

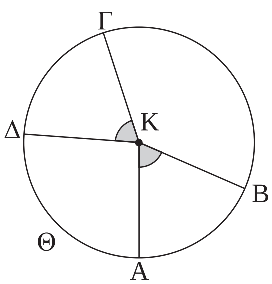
► Σχέση επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου

Η σύγκριση δύο τόξων μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των επίκεντρων γωνιών που βαίνουν σε αυτά, σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, αν και μόνο αν οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες.

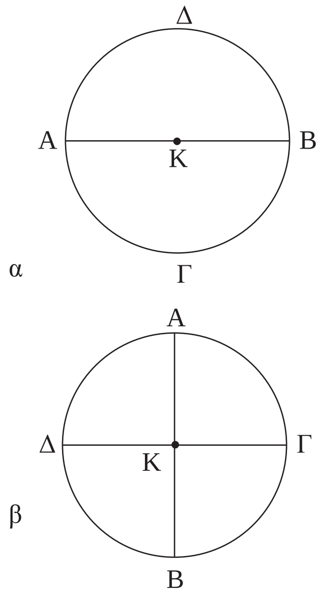
ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 46

Έστω $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ δύο τόξα ενός κύκλου (Κ) (σχ.46). Τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, αφού είναι ίσα μετά από κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν, οπότε το Γ συμπίπτει με το Α και το Δ με το Β. Επομένως η ΚΓ θα συμπέσει με την ΚΑ και η ΚΔ με την ΚΒ, που σημαίνει ότι οι γωνίες $A\hat{K}B$ και $\Gamma\hat{K}\Delta$ είναι ίσες.

Αντίστροφα. Έστω δύο ίσες επίκεντρες γωνίες $A\hat{K}B$ και $\Gamma\hat{K}\Delta$ στον κύκλο (Κ). Τότε, αφού τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι



Σχήμα 47

σημεία του ίδιου κύκλου, μετά από μετατόπιση της $\Gamma\hat{K}\Delta$ η γωνία αυτή θα ταυτισθεί με την $A\hat{K}B$, το Γ θα ταυτισθεί με το Α και το Δ με το Β. Έτσι τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ έχουν τα ίδια άκρα και επειδή βρίσκονται στο εσωτερικό των γωνιών που ταυτίζονται θα είναι ίσα, δηλαδή $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

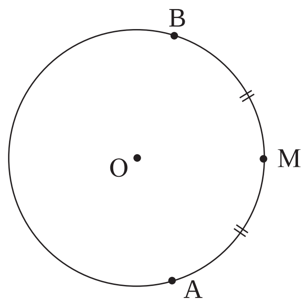
ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

i) Κάθε διάμετρος ενός κύκλου τον διαιρεί σε δύο ίσα τόξα.

ii) Δύο κάθετες διάμετροι ενός κύκλου τον διαιρούν σε τέσσερα ίσα τόξα.

iii) Δύο τόξα ενός κύκλου είναι άνισα, όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ομοιοτρόπως άνισες.

Καθένα από τα ίσα τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma B}$ και $\overset{\frown}{B\Delta A}$ (σχ.47α) στα οποία διαιρείται ο κύκλος (Κ) από τη διάμετρο του ΑΒ, λέγεται ***ημικύκλιο***, ενώ το καθένα από τα ίσα τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma B}$, $\overset{\frown}{B\Delta}$ και $\overset{\frown}{\Delta A}$ (σχ.47β) στα οποία διαιρείται από τις κάθετες διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ, λέγεται ***τεταρτοκύκλιο***.



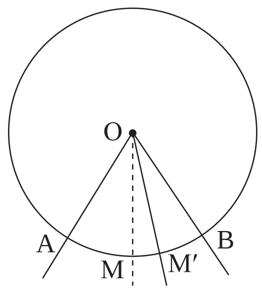
Σχήμα 48

► Μέσο τόξου

Ένα εσωτερικό σημείο Μ ενός τόξου $\overset{\frown}{AB}$ (σχ.48) λέγεται ***μέσο*** του, όταν τα τόξα $\overset{\frown}{AM}$ και $\overset{\frown}{MB}$ είναι ίσα, δηλαδή όταν $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Το μέσο ενός τόξου είναι μοναδικό.



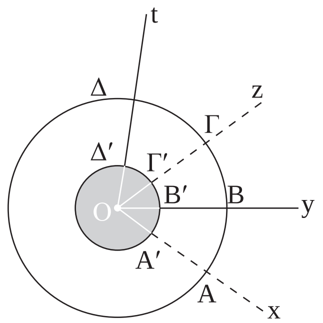
Σχήμα 49

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\overset{\frown}{AB}$ τόξο κύκλου, κέντρου Ο, και Μ το μέσο του (σχ.49). Επειδή $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$, οι επίκεντρες γωνίες $A\hat{O}M$ και $M\hat{O}B$ είναι ίσες και επομένως η ΟΜ είναι διχοτόμος της $A\hat{O}B$. Αν υποθέσουμε ότι το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ έχει και δεύτερο μέσο το Μ′, τότε η ΟΜ′ είναι διχοτόμος της $A\hat{O}B$, που είναι άτοπο γιατί η διχοτόμος μιας γωνίας είναι μοναδική.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Οι γωνίες xÔy και zÔt του διπλανού σχήματος είναι επίκεντρες σε δύο *ομόκεντρους* κύκλους, (δηλαδή κύκλους με το ίδιο κέντρο), (Ο, R) και (Ο, R′) με R′ < R. Αν $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, να αποδείξετε ότι και $\overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{\Gamma'\Delta'}$ (σχ.50).



Σχήμα 50

Απόδειξη

Επειδή $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, θα είναι $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$, οπότε και $\overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{\Gamma'\Delta'}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να δώσετε τον ορισμό του κύκλου (Ο, ρ). Πότε δύο κύκλοι λέγονται ίσοι; Πώς ελέγχεται η ισότητα δύο κύκλων;*

2. *Πότε ένα σημείο λέγεται εσωτερικό σημείο ενός κύκλου και πότε εξωτερικό;*

3. *Τι λέγεται γεωμετρικός τόπος;*

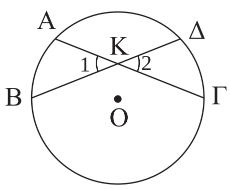
4. *Τι λέγεται διάμετρος ενός κύκλου και ποια η σχέση της με την ακτίνα του κύκλου;*

5. *Τι λέγεται τόξο κύκλου με άκρα Α, Β και τι χορδή του; Πώς ορίζεται η ισότητα και η ανισότητα δύο τόξων ενός κύκλου;*

6. *Τι λέγεται επίκεντρη γωνία και τι αντίστοιχο τόξο της; Ποια σχέση ισότητας-ανισότητας υπάρχει μεταξύ επίκεντρων γωνιών και αντίστοιχων τόξων;*

7. *Τι λέγεται μέσο τόξου; Αν τα σημεία Μ, Ν είναι μέσα ενός τόξου $\overset{\frown}{AB}$, τι συμπεραίνετε γι' αυτά;*

8. *Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$;*



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σχεδιάστε έναν κύκλο ακτίνας ρ, που να διέρχεται από σταθερό σημείο Κ. Πόσους τέτοιους κύκλους μπορούμε να χαράξουμε στο επίπεδο; Πού βρίσκονται τα κέντρα τους;*

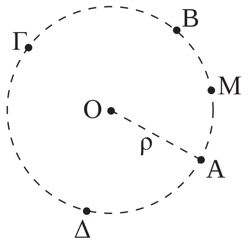
2. *Σχεδιάστε δύο κύκλους (Ο, ρ) και (Ο, R) με R > ρ. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που είναι εσωτερικά του κύκλου (Ο, R) και εξωτερικά του κύκλου (Ο, ρ).*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο,R) και (Ο, ρ) με R > ρ. Μία ευθεία ε διέρχεται από το Ο και τέμνει τους κύκλους στα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ. Να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΓΔ και ΑΓ = ΒΔ.*

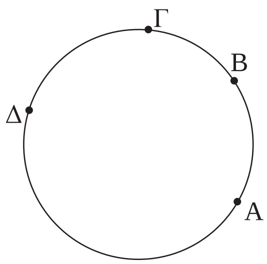
2. *Αν δύο διάμετροι σχηματίζουν δύο εφεξής γωνίες ίσες, τότε να αποδείξετε ότι διαιρούν τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα.*

2.19 Μέτρο τόξου και γωνίας



Σχήμα 51

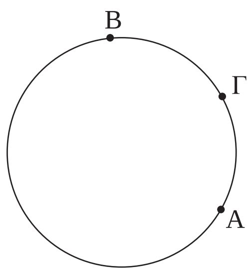
Δύο τόξα ενός κύκλου με ένα άκρο κοινό και χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία λέγονται ***διαδοχικά***, π.χ. τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$ (σχ.51) είναι διαδοχικά. Τρία ή περισσότερα τόξα με καθορισμένη σειρά λέγονται διαδοχικά, όταν το καθένα είναι διαδοχικό με το επόμενό του, π.χ. τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ (σχ.51) είναι διαδοχικά. Είναι φανερό ότι τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ είναι διαδοχικά, όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι διαδοχικές.



Σχήμα 52

Έστω $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$ δύο διαδοχικά τόξα ενός κύκλου (σχ.52). Το τόξο $\overset{\frown}{AB\Gamma}$ λέγεται άθροισμα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και συμβολίζεται με $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{B\Gamma}$, δηλαδή $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{B\Gamma}=\overset{\frown}{AB\Gamma}$. Αν το τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$ είναι ίσο με το $\overset{\frown}{AB}$ τότε το τόξο $\overset{\frown}{AB\Gamma}$ συμβολίζεται με $2\,\overset{\frown}{AB}$ και λέγεται διπλάσιο του $\overset{\frown}{AB}$. Όμοια ορίζεται και το $\nu\cdot\overset{\frown}{AB}$, όπου ν φυσικός.

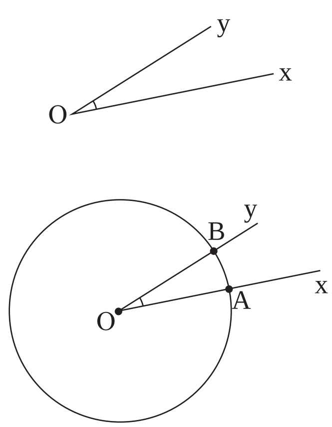
Αν για δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ενός κύκλου ισχύει $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}=\nu\overset{\frown}{AB}$, τότε το $\overset{\frown}{AB}$ λέγεται ένα ***ν-οστό του*** $\boldsymbol{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}}$ και συμβολίζεται με $\frac{1}{\nu}\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, δηλαδή $\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{\nu}\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.



Σχήμα 53

Στην περίπτωση που τα τόξα δεν είναι διαδοχικά, μπορούμε να μετατοπίσουμε το ένα από αυτά, ώστε να γίνουν διαδοχικά. Στην §3.18 θα αναφέρουμε τη σχετική γεωμετρική κατασκευή.

Αν $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{A\Gamma}$ είναι δύο μη διαδοχικά τόξα ενός κύκλου με $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{A\Gamma}$ (σχ.53) που έχουν κοινό σημείο το ένα άκρο τους Α, τότε το τόξο $\overset{\frown}{\Gamma B}$ λέγεται διαφορά του $\overset{\frown}{A\Gamma}$ από το $\overset{\frown}{AB}$ και συμβολίζεται με $\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A\Gamma}$. Όταν $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A\Gamma}$, τότε η διαφορά τους είναι το μηδενικό τόξο $\overset{\frown}{0}$.



Σχήμα 54

Είδαμε ότι μπορούμε να συγκρίνουμε ένα τόξο ενός κύκλου με ένα άλλο τόξο του ίδιου κύκλου. Ένα τόξο με το οποίο συγκρίνουμε όλα τα άλλα το λέμε μονάδα μέτρησης. Έχει επικρατήσει να χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης το τόξο μίας ***μοίρας*** που ορίζεται ως το $\frac{1}{360}$ του τόξου ενός κύκλου και συμβολίζεται με 1°. Για κάθε τόξο υπάρχει ένας θετικός αριθμός (όχι απαραίτητα φυσικός), που εκφράζει πόσες φορές το τόξο περιέχει τη μοίρα ή μέρη αυτής. Ο αριθμός αυτός λέγεται ***μέτρο*** του τόξου.

Από τον ορισμό της μοίρας προκύπτει ότι το τόξο ενός κύκλου είναι 360° και επομένως το ημικύκλιο και το τεταρτοκύκλιο είναι τόξα 180° και 90° αντίστοιχα. Η μοίρα υποδιαιρείται σε 60 πρώτα λεπτά (συμβολικά 60′) και κάθε πρώτο λεπτό σε 60 δεύτερα λεπτά (συμβολικά 60″).

Θεωρούμε μια γωνία $x\hat{O}y$ (σχ.54), που την καθιστούμε επίκεντρη σε έναν κύκλο (Ο, ρ), και έστω $\overset{\frown}{AB}$ το τόξο στο οποίο βαίνει. Ορίζουμε ως ***μέτρο*** της γωνίας $x\hat{O}y$ το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Το μέτρο της $x\hat{O}y$ το συμβολίζουμε με $(x\hat{O}y)$ ή απλά $x\hat{O}y$.

Το μέτρο μίας ορθής, ευθείας και μιας πλήρους γωνίας είναι αντίστοιχα 90°, 180° και 360°.

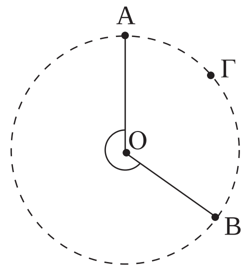
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Σε κύκλο κέντρου Ο, θεωρούμε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma A}$ (σχ. 55), ώστε $\overset{\frown}{AB} = 3\overset{\frown}{B\Gamma} = 6\overset{\frown}{\Gamma A}$.

Να υπολογισθούν:

i) τα μέτρα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{A\Gamma}$

ii) τα μέτρα των γωνιών $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ και $\Gamma\hat{O}A$.



Σχήμα 55

Λύση

i) Από την υπόθεση έχουμε ότι $\overset{\frown}{AB} = 6\,\overset{\frown}{\Gamma A}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 2\,\overset{\frown}{\Gamma A}$, οπότε με αντικατάσταση στη σχέση $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma A} = 360°$ προκύπτει ότι $9\,\overset{\frown}{\Gamma A} = 360°$ ή $\overset{\frown}{\Gamma A} = 40°$. Άρα $\overset{\frown}{AB} = 240°$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 80°$.

ii) Η $A\hat{O}B$ είναι επίκεντρη με αντίστοιχο τόξο το $\overset{\frown}{AB}$, επομένως $A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} = 240°$ (μη κυρτή). Όμοια $B\hat{O}\Gamma = 80°$ και $\Gamma\hat{O}A = 40°$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

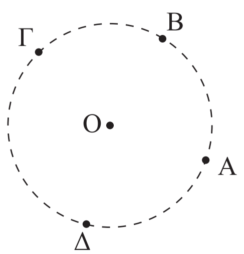
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Στο παρακάτω σχήμα, να βρεθούν τα τόξα:*

i) $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma}$,

ii) $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$,

iii) $\overset{\frown}{AB\Gamma} - \overset{\frown}{B\Gamma}$.



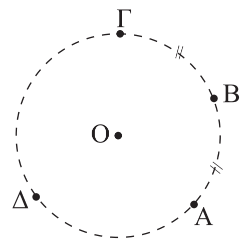
2. *Στο παρακάτω σχήμα να βρεθούν τα τόξα:*

i) $2\,\overset{\frown}{AB}$,

ii) $2\,\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$,

iii) $2\,\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{B\Gamma}$,

iv) $\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{B\Gamma}$.



3. *Το μέτρο ενός τόξου είναι αριθμός:*

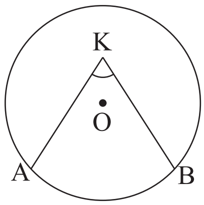
α. αρνητικός   *β. μηδέν*

γ. θετικός   *δ. μη αρνητικός.*

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

4. *Πώς ορίζεται το μέτρο μιας γωνίας;*

5. *Αν* $\overset{\frown}{AB} = \mu°$ *(παρακάτω σχήμα), τότε η γωνία* $A\hat{K}B$ *θα είναι* $\mu°$;



Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε ημικύκλιο δίνονται τα σημεία Α, Β και σημείο Μ του τόξου $\widehat{AB}$, ώστε $\widehat{MA} = \widehat{MB}$.*

i) Αν Ρ σημείο του ημικυκλίου που δεν ανήκει στο τόξο $\widehat{AB}$, να αποδείξετε ότι $\widehat{PM} = \frac{1}{2}(\widehat{PA} + \widehat{PB})$.

ii) Αν Σ σημείο του τόξου $\widehat{MB}$, να αποδείξετε ότι $\widehat{\Sigma M} = \frac{1}{2}(\widehat{\Sigma A} - \widehat{\Sigma B})$.

2. *Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε $\widehat{A\Gamma} - \widehat{B\Gamma} = 80°$. Να βρείτε τα μέτρα:*

i) των τόξων $\widehat{A\Gamma}$ και $\widehat{\Gamma B}$,

ii) των γωνιών $A\hat{O}\Gamma$ και $\Gamma\hat{O}B$ (Ο είναι το κέντρο του κύκλου).

3. *Δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές. Αν η μία είναι διπλάσια από την άλλη, να βρείτε πόσες μοίρες είναι καθεμία από τις γωνίες αυτές.*

4. *Αν μια γωνία ω είναι τα 6/5 μιας ορθής γωνίας, να υπολογίσετε σε μοίρες την παραπληρωματική της. Η γωνία ω έχει συμπληρωματική γωνία;*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Η παραπληρωματική μιας γωνίας ω είναι τριπλάσια της συμπληρωματικής γωνίας της ω. Να υπολογίσετε την ω.*

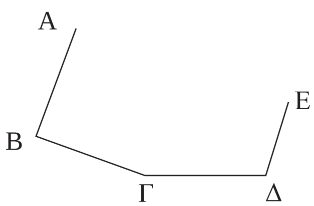
2. *Μια γωνία φ είναι μικρότερη από τη συμπληρωματική της κατά 20°. Να υπολογίσετε τις δύο γωνίες.*

3. *Τέσσερις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ σχηματίζουν τις διαδοχικές γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$, $\Delta\hat{O}A$, που έχουν μέτρα ανάλογα με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4. Να υπολογίσετε τις γωνίες αυτές.*

Ευθύγραμμα σχήματα

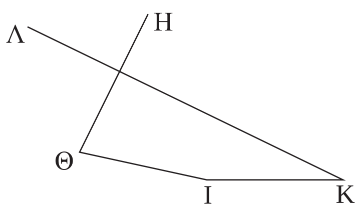
2.20 Τεθλασμένη γραμμή - Πολύγωνο - Στοιχεία πολυγώνου

Θεωρούμε σημεία που έχουν καθορισμένη σειρά και ανά τρία διαδοχικά δεν είναι συνευθειακά, π.χ. τα Α, Β, Γ, Δ και Ε, με την αλφαβητική τους σειρά και θέση, όπως στο σχ.56. Το σχήμα που ορίζουν τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ λέγεται ***τεθλασμένη γραμμή*** ή απλά ***τεθλασμένη***. Η τεθλασμένη αυτή συμβολίζεται με ΑΒΓΔΕ.



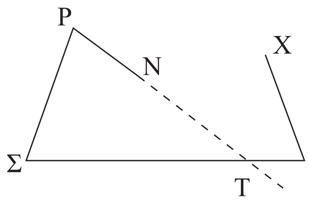
Σχήμα 56

Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε λέγονται ***κορυφές*** της τεθλασμένης και ειδικότερα οι κορυφές Α και Ε λέγονται ***άκρα*** της. Τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ λέγονται ***πλευρές*** της τεθλασμένης και το άθροισμά τους λέγεται ***περίμετρος*** της τεθλασμένης.



Σχήμα 57

Μία τεθλασμένη λέγεται ***απλή***, όταν δύο οποιεσδήποτε μη διαδοχικές πλευρές της δεν έχουν κοινό εσωτερικό σημείο. Έτσι, η τεθλασμένη ΑΒΓΔΕ (σχ.56) είναι απλή, ενώ η ΗΘΙΚΛ (σχ.57) δεν είναι.



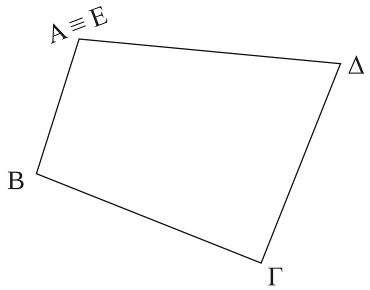
Σχήμα 58

Μία τεθλασμένη λέγεται ***κυρτή***, όταν ο φορέας κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις άλλες κορυφές της προς το ίδιο μέρος του, διαφορετικά λέγεται ***μη κυρτή***. Έτσι η γραμμή ΑΒΓΔΕ (σχ.56) είναι κυρτή, ενώ οι ΗΘΙΚΛ (σχ.57) και ΝΡΣΤΧ (σχ.58) είναι μη κυρτές.

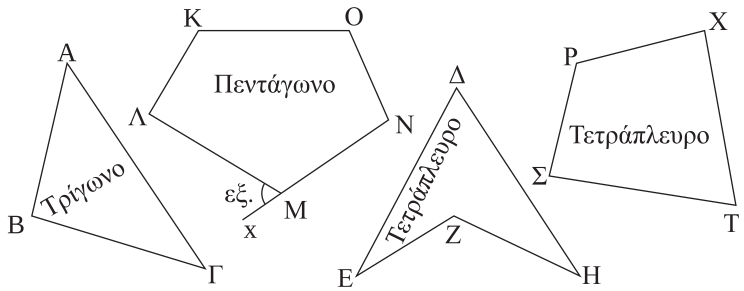
Επίσης, μια τεθλασμένη, της οποίας τα άκρα ταυτίζονται, λέγεται ***κλειστή***, π.χ. η ΑΒΓΔΕ, όπου το Α ταυτίζεται με το Ε (σχ.59).

Μια κλειστή και απλή τεθλασμένη λέγεται ***πολύγωνο***.

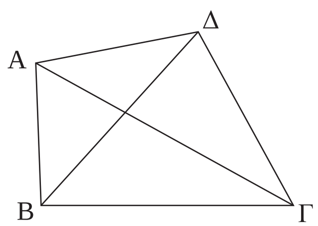
Αν η τεθλασμένη είναι κυρτή, τότε το πολύγωνο λέγεται ***κυρτό***, ενώ, αν είναι μη κυρτή, το πολύγωνο λέγεται ***μη κυρτό***.



Σχήμα 59



Σχήμα 60



Σχήμα 61

Για παράδειγμα, τα πολύγωνα ΑΒΓ (σχ.60) και ΚΛΜΝΟ (σχ.60) είναι κυρτά, ενώ το ΔΕΖΗ (σχ.60) είναι μη κυρτό. Το πολύγωνο με τρεις κορυφές λέγεται ***τρίγωνο*** (σχ.60), με τέσσερις ***τετράπλευρο*** (σχ.60), με πέντε ***πεντάγωνο*** (σχ.60) και γενικά με ν, ***ν-γωνο***. Στο εξής λέγοντας πολύγωνο θα εννοούμε κυρτό πολύγωνο.

Κάθε τμήμα που έχει άκρα δύο μη διαδοχικές κορυφές του πολυγώνου λέγεται ***διαγώνιος*** του πολυγώνου. Έτσι τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ είναι οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (σχ.61).

Γωνίες πολυγώνου λέγονται οι γωνίες που σχηματίζουν οι πλευρές του. Σε ένα κυρτό πολύγωνο τα κοινά εσωτερικά σημεία των γωνιών τους λέγονται ***εσωτερικά*** σημεία του πολυγώνου και αποτελούν το ***εσωτερικό*** του πολυγώνου.

Εξωτερική γωνία πολυγώνου λέγεται κάθε γωνία που είναι εφεξής και παραπληρωματική μιας εσωτερικής γωνίας του. Για να τη σχηματίσουμε, αρκεί να προεκτείνουμε μια πλευρά του πολυγώνου, π.χ. η γωνία $\Lambda\hat{M}x$ (σχ.60) είναι εξωτερική γωνία του πενταγώνου ΚΛΜΝΟ και συμβολίζεται $\hat{M}_{εξ}$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ ώστε* $ΑΒ < \frac{ΑΓ}{2}$, $ΒΓ < \frac{ΒΔ}{2}$ *και ονομάζουμε Ε, Ζ τα μέσα των ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι* $ΕΖ = \frac{ΑΔ - ΒΓ}{2}$.

2. *Σε ευθεία ε παίρνουμε δύο διαδοχικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΔΕ, ΒΖ έχουν κοινό μέσο.*

3. *Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ονομάζουμε Ε το μέσο του ΒΔ. Να αποδείξετε ότι* $ΑΕ > \frac{ΑΓ}{2}$.

4. *Θεωρούμε κύκλο (Ο, R) και τα διαδοχικά σημεία του Α, Β, Γ και Δ, ώστε* $\widehat{ΑΒ} = 150°$, $\widehat{ΓΔ} = 45°$ *και* $\widehat{ΑΔ} = 105°$. *Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας* $Β\hat{Ο}Γ$ *είναι αντικείμενη ημιευθεία της ΟΑ.*

5. *Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ, Μ το μέσο του τόξου* $\widehat{ΑΒ}$ *και Κ τυχαίο σημείο του τόξου* $\widehat{ΒΜ}$. *Αν Γ και Δ είναι τα μέσα των τόξων* $\widehat{ΑΚ}$ *και* $\widehat{ΜΚ}$ *αντίστοιχα, να υπολογίσετε το μέτρο του τόξου* $\widehat{ΓΔ}$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να βρείτε κατά πόσο αυξάνει ο αριθμός των διαγωνίων κυρτού ν-γώνου όταν ο αριθμός των πλευρών του αυξηθεί κατά 1.

ΕΡΓΑΣΙΑ

Να βρείτε το πλήθος δ των διαγωνίων κυρτού ν-γώνου ως συνάρτηση του πλήθους των πλευρών του ($ν \geq 3$), *ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:*

i) *Να κατασκευάσετε τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο και εξάγωνο και να βρείτε:*
   α) το πλήθος των διαγωνίων με μια κοινή κορυφή,
   β) το συνολικό πλήθος των διαγωνίων.

ii) *Μπορείτε να «ανακαλύψετε» ποιος τύπος δίνει το δ ως συνάρτηση του ν;*

iii) *Υποθέστε ότι ο τύπος ισχύει για πολύγωνο με ν πλευρές και να αποδείξετε ότι ισχύει για πολύγωνο με ν + 1 πλευρές.* ***Υπόδειξη:*** *Προσθέστε μια κορυφή και βρείτε το πλήθος των επιπλέον διαγωνίων.*

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό δώσαμε τις πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες: σημείο, ευθεία, επίπεδο και ορίσαμε τα βασικά γεωμετρικά σχήματα: ευθύγραμμο τμήμα, γωνία και κύκλο. Τέλος, δώσαμε την έννοια της τεθλασμένης γραμμής και του πολυγώνου.

Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία Α, Β ορίστηκε ως το σχήμα που αποτελείται από τα σημεία Α, Β και τα σημεία της ευθείας ΑΒ που είναι μεταξύ των Α, Β. Στη συνέχεια μιλήσαμε για σύγκριση τμημάτων, για το μέσο ενός τμήματος και δεχθήκαμε τη μοναδικότητά του. Κατόπιν ορίσαμε πράξεις με τμήματα, την έννοια του μήκους ενός τμήματος και την απόσταση δύο σημείων.

Η γωνία ορίστηκε ως το σχήμα που αποτελείται από τα κοινά σημεία δύο ημιεπιπέδων. Στη συνέχεια μιλήσαμε για σύγκριση γωνιών, για τη διχοτόμο μιας γωνίας και δεχθήκαμε τη μοναδικότητά της. Κατόπιν ορίσαμε την έννοια της ορθής (καθεμία από τις γωνίες στις οποίες χωρίζεται η ευθεία γωνία από τη διχοτόμο της), οξείας, αμβλείας γωνίας και της καθετότητας δύο ευθειών. Επίσης, ορίσαμε τις πράξεις με γωνίες και τις έννοιες συμπληρωματικές, παραπληρωματικές και κατακορυφήν γωνίες.

Ο κύκλος (Ο, ρ) ορίστηκε ως το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου που απέχουν από το σημείο Ο, απόσταση ρ. Στη συνέχεια ασχοληθήκαμε με τόξα, χορδές και σύγκριση τόξων. Αποδείξαμε τη μοναδικότητα του μέσου ενός τόξου στηριζόμενοι στη μοναδικότητα της διχοτόμου μιας γωνίας και αξιοποιώντας τη βασική σχέση της επίκεντρης γωνίας με το αντίστοιχο τόξο της. Τέλος, ορίσαμε το μέτρο τόξου και γωνίας (ως το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της, όταν αυτή γίνει επίκεντρη σε κύκλο).

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

Τα βασικά Γεωμετρικά Σχήματα

Πρωταρχικές έννοιες: **σημείο, ευθεία, επίπεδο**

Ευθύγραμμο τμήμα
- **Σύγκριση τμημάτων**
- **Μέσο τμήματος**
- **Πράξεις με τμήματα**
- **Μήκος τμήματος - Απόσταση σημείων**

Γωνίες
- **Σύγκριση γωνιών**
- **Διχοτόμος γωνίας**
- **Οξεία, ορθή, αμβλεία γωνία, κάθετες ευθείες**
- **Πράξεις με γωνίες**
- **Συμπληρωματικές, παραπληρωματικές, κατακορυφήν γωνίες**

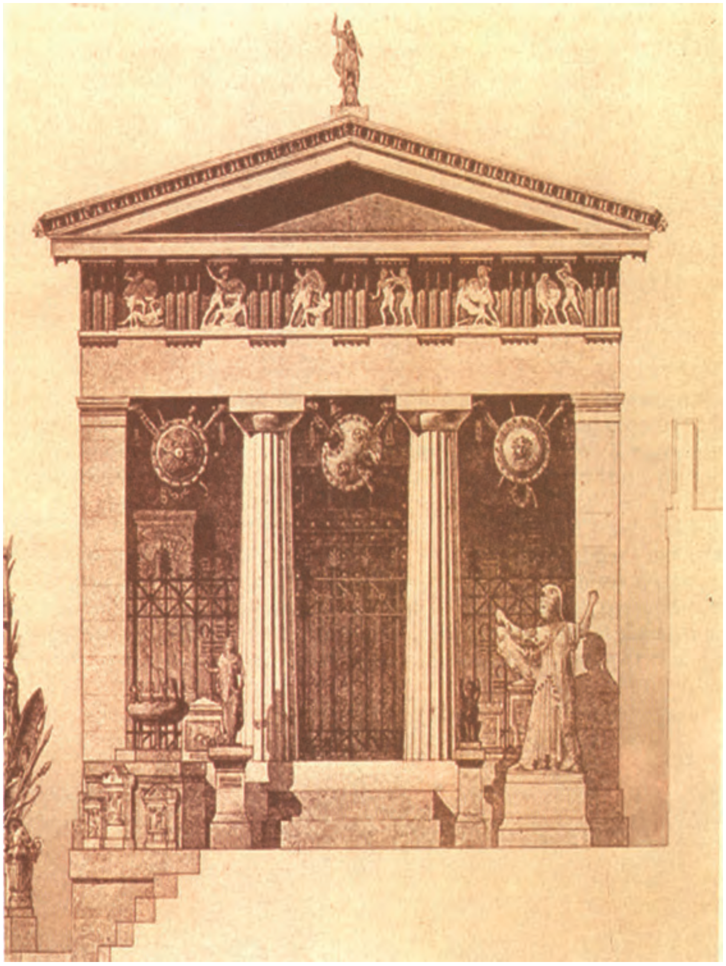
Κύκλος
- **Διάμετρος**
- **Τόξα - χορδές, σύγκριση τόξων, μέσο τόξου**
- **Επίκεντρη γωνία και σχέση με το αντίστοιχο τόξο**
- **Μέτρο τόξου και γωνίας**

Ευθύγραμμα σχήματα: **τεθλασμένη γραμμή, πολύγωνο, στοιχεία πολυγώνου**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΡΙΓΩΝΑ

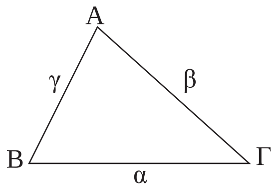
Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με το πλέον θεμελιώδες σχήμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, που είναι το τρίγωνο. Αρχικά δίνουμε τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων. Ως εφαρμογή των κριτηρίων αυτών παρουσιάζουμε ιδιότητες των στοιχείων του κύκλου, των ισοσκελών τριγώνων, της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος και της διχοτόμου μιας γωνίας. Η μεσοκάθετος και η διχοτόμος εξετάζονται και ως βασικοί γεωμετρικοί τόποι. Στη συνέχεια αναφέρουμε συνοπτικά την έννοια της συμμετρίας ως προς κέντρο και άξονα και μελετάμε ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο και τις εφαρμογές τους στη σύγκριση κάθετων και πλάγιων τμημάτων. Επίσης, παρουσιάζουμε τις σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου, καθώς και τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων. Το κεφάλαιο κλείνει με κάποιες βασικές γεωμετρικές κατασκευές.



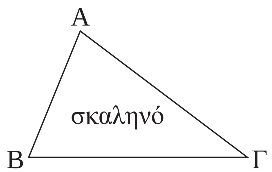
Ο Θησαυρός των Αθηναίων στους Δελφούς, 508 π.Χ. Αναπαράσταση Α. Tournaire

3.1 Στοιχεία και είδη τριγώνων

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.1) έχει τρεις κορυφές Α, Β, Γ, τρεις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ και τρεις γωνίες $B\hat{A}\Gamma$, $A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}A$. Για ευκολία οι πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ συμβολίζονται με α, β, γ αντίστοιχα, και οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma$, $A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}A$ με $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου λέγονται ***κύρια στοιχεία*** του τριγώνου. Το άθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$ των πλευρών του τριγώνου, δηλαδή η περίμετρός του συμβολίζεται συνήθως με 2τ. Συγκρίνοντας τις πλευρές ενός τριγώνου, μεταξύ τους, προκύπτουν τρία είδη τριγώνων: το σκαληνό, το ισοσκελές και το ισόπλευρο. Έτσι, ένα τρίγωνο λέγεται:

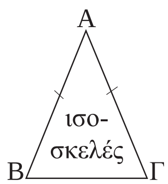


Σχήμα 1

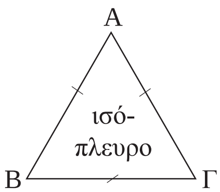


Σχήμα 2

- ***σκαληνό***, όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες (σχ.2),
- ***ισοσκελές***, όταν έχει δύο πλευρές του ίσες (σχ.3). Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ η πλευρά ΒΓ λέγεται ***βάση*** του και το Α ***κορυφή*** του,
- ***ισόπλευρο***, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες (σχ.4).



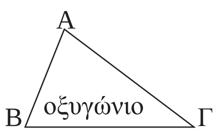
Σχήμα 3



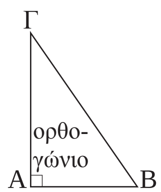
Σχήμα 4

Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του, λέγεται

- ***οξυγώνιο***, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες (σχ.5),
- ***ορθογώνιο***, όταν έχει μια γωνία ορθή (σχ.6). Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται ***υποτείνουσα*** και οι άλλες δύο λέγονται ***κάθετες πλευρές*** του τριγώνου,
- ***αμβλυγώνιο***, όταν έχει μια γωνία αμβλεία (σχ.7).



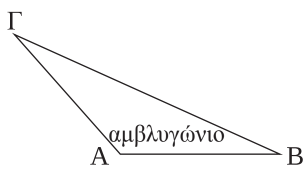
Σχήμα 5



Σχήμα 6

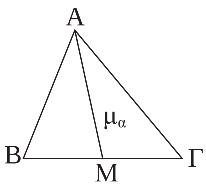
► Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Διάμεσος ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς. Στο σχ.8 το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά α του τριγώνου ΑΒΓ και συμβολίζεται με μ_α. Οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ συμβολίζονται με μ_β και μ_γ αντίστοιχα.

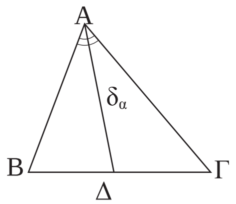


Σχήμα 7

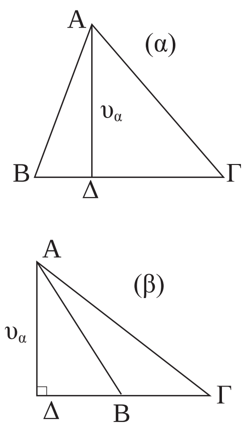
Διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά. Στο σχ.9 το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου και συμβολίζεται με δ_α. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου συμβολίζονται με δ_β και δ_γ αντίστοιχα.



Σχήμα 8



Σχήμα 9



Σχήμα 10

Ύψος τριγώνου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς. Τα ύψη που φέρονται από τις κορυφές Α, Β και Γ συμβολίζονται αντίστοιχα με $υ_α$, $υ_β$ και $υ_γ$.

Στο σχ.10 το ΑΔ είναι το ύψος από την κορυφή Α. Το σημείο Δ λέγεται ***προβολή*** του Α πάνω στην ευθεία ΒΓ ή και ***ίχνος*** της καθέτου, που φέρεται από το Α στην ευθεία ΒΓ.

Οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη ενός τριγώνου λέγονται **δευτερεύοντα στοιχεία** του.

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Είδαμε ότι δύο ευθύγραμμα σχήματα, επομένως και δύο τρίγωνα, είναι ίσα αν μετά από κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζονται. Συνεπώς:

- **Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.**
- **Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.**

Οι ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες λέγονται ***αντίστοιχες*** ή ***ομόλογες***.

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε προτάσεις, που θα μας εξασφαλίζουν την ισότητα δύο τριγώνων από την ισότητα τριών μόνο κατάλληλων στοιχείων τους.

Οι προτάσεις αυτές αποτελούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

ΣΧΟΛΙΟ

Η συντομογραφία ΠΓΠ σημαίνει πλευρά, γωνία, πλευρά.

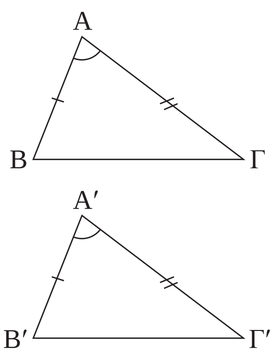
3.2 1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι (1ο Κριτήριο – ΠΓΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν ΑΒ = Α′Β′, ΑΓ = Α′Γ′ και $\hat{Α} = \hat{Α}'$ (σχ.11). Μετατοπίζουμε το τρίγωνο Α′Β′Γ′, ώστε το σημείο Α′ να ταυτιστεί με το Α και η ημιευθεία Α′Β′ να ταυτιστεί με την ΑΒ. Επειδή $\hat{Α} = \hat{Α}'$ και η ημιευθεία Α′Γ′ θα ταυτισθεί με την ΑΓ. Τότε, αφού ΑΒ = Α′Β′ και ΑΓ = Α′Γ′, το σημείο Β′ ταυτίζεται με το Β και το Γ′ με το Γ. Επομένως τα δύο τρίγωνα συμπίπτουν, άρα είναι ίσα.



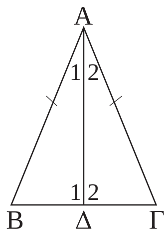
Σχήμα 11

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 12

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ (σχ.12).

Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ κοινή και $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{Β} = \hat{Γ}$.

Από την ίδια ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι ΒΔ = ΔΓ, οπότε η ΑΔ είναι διάμεσος και $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$. Από την τελευταία ισότητα και επειδή $\hat{Δ}_1 + \hat{Δ}_2 = 180°$ προκύπτει ότι $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2 = 90°$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.

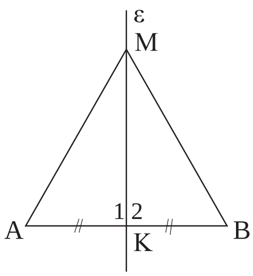
ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



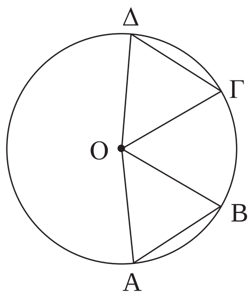
Σχήμα 13

Έστω ε η μεσοκάθετος ενός τμήματος ΑΒ (σχ.13) και Μ ένα σημείο της. Τα τρίγωνα ΜΚΑ και ΜΚΒ έχουν ΚΑ = ΚΒ, ΜΚ κοινή και $\hat{Κ}_1 = \hat{Κ}_2 = 90°$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε ΜΑ = ΜΒ.

ΠΟΡΙΣΜΑ IV

Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 14

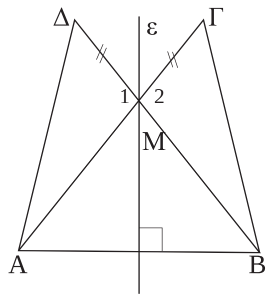
Έστω $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΓΔ}$ δύο ίσα τόξα ενός κύκλου (Ο, ρ) (σχ.14). Τότε είναι $Α\hat{Ο}Β = Γ\hat{Ο}Δ$. Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ έχουν ΟΑ = ΟΓ(= ρ), ΟΒ = ΟΔ(= ρ) και $Α\hat{Ο}Β = Γ\hat{Ο}Δ$. Επομένως είναι ίσα, οπότε ΑΒ = ΓΔ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, η μεσοκάθετός του ε και σημείο Μ της ε (σχ.15). Στις προεκτάσεις των ΑΜ και ΒΜ προς το Μ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Γ, Δ, ώστε ΜΓ = ΜΔ. Να αποδείξετε ότι:

i) $M\hat{A}B = M\hat{B}A$,

ii) $A\Delta = B\Gamma$.



Σχήμα 15

Λύση

i) Επειδή το Μ είναι σημείο της μεσοκαθέτου ε του ΑΒ είναι ΜΑ = ΜΒ, επομένως το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ισοσκελές, οπότε $M\hat{A}B = M\hat{B}A$.

ii) Τα τρίγωνα ΜΑΔ και ΜΒΓ έχουν ΜΑ = ΜΒ, ΜΓ = ΜΔ (υπόθεση) και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (κατακορυφήν), άρα (ΠΓΠ) είναι ίσα, οπότε ΑΔ = ΒΓ.

ΣΧΟΛΙΟ

Η ισότητα τριγώνων είναι η βασική μέθοδος για την απόδειξη της ισότητας τμημάτων ή γωνιών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ, ΓΑ ενός τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τμήματα ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΔ.*

2. *Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ και στις προεκτάσεις τους θεωρούμε τμήματα ΒΚ = ΓΛ = ΑΜ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.*

3. *Να αποδείξετε ότι στις ομόλογες πλευρές δύο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσες διάμεσοι.*

4. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της $\hat{A}$ στην οποία θεωρούμε τμήματα ΑΕ = ΑΒ και ΑΖ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $A\hat{\Gamma}E = A\hat{Z}B$.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Κ σημείο εξωτερικό του τριγώνου. Αν στις προεκτάσεις των ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ θεωρήσουμε τμήματα ΚΔ = ΑΚ, ΚΕ = ΒΚ, ΚΖ = ΓΚ, να αποδείξετε ότι $E\hat{\Delta}Z = B\hat{A}\Gamma$.*

2. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του ΒΑ, ΓΑ θεωρούμε ίσα τμήματα ΑΔ, ΑΕ αντίστοιχα. Αν Μ το μέσο της βάσης ΒΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.*

3. *Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και χορδή του ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΑΒ και προς τα δύο της άκρα, κατά ίσα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $O\hat{\Gamma}A = O\hat{\Delta}B$.*

ΣΧΟΛΙΟ

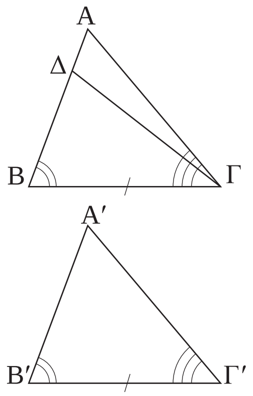
Η συντομογραφία ΓΠΓ σημαίνει γωνία, πλευρά, γωνία.

3.3 2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

Με τη βοήθεια του 1ου κριτηρίου αποδεικνύουμε το 2ο και 3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων.

ΘΕΩΡΗΜΑ (2ο Κριτήριο – ΓΠΓ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



Σχήμα 16

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ (σχ.16) έχουν $ΒΓ = Β'Γ'$, $\hat{Β} = \hat{Β}'$ και $\hat{Γ} = \hat{Γ}'$.

Θα αποδείξουμε ότι έχουν και $ΑΒ = Α'Β'$. Έστω ότι $ΑΒ \neq Α'Β'$, π.χ. $ΑΒ > Α'Β'$. Τότε υπάρχει σημείο Δ στην ΑΒ, ώστε να είναι $ΒΔ = Β'Α'$. Τα τρίγωνα ΔΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν $ΒΓ = Β'Γ'$, $ΒΔ = Β'Α'$ και $\hat{Β} = \hat{Β}'$, επομένως (ΠΓΠ) είναι ίσα, οπότε $Β\hat{Γ}Δ = \hat{Γ}'$. Αλλά $\hat{Γ}' = \hat{Γ}$, οπότε $Β\hat{Γ}Δ = \hat{Γ}$ που είναι άτοπο, γιατί το Δ είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας $Α\hat{Γ}Β$ και επομένως $Β\hat{Γ}Δ < \hat{Γ}$. Οδηγηθήκαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $ΑΒ \neq Α'Β'$, άρα $ΑΒ = Α'Β'$. Τα τρίγωνα, λοιπόν, ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν $ΒΓ = Β'Γ'$, $ΑΒ = Α'Β'$ και $\hat{Β} = \hat{Β}'$, άρα (ΠΓΠ) είναι ίσα.

* **Σημείωση:** *Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί και με τη μέθοδο της μετατόπισης, όπως το θεώρημα Ι (σελ. 41).*

ΣΧΟΛΙΟ

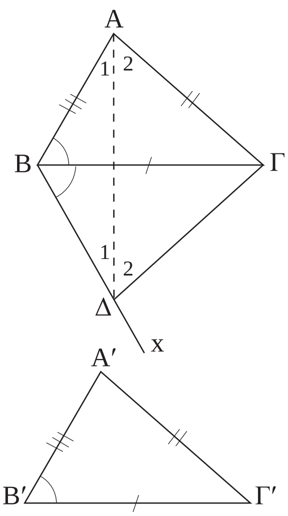
Η συντομογραφία ΠΠΠ σημαίνει πλευρά, πλευρά, πλευρά.

3.4 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

Η ισότητα δύο τριγώνων εξασφαλίζεται και από την ισότητα των τριών πλευρών τους, μία προς μία, όπως μας βεβαιώνει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (3ο Κριτήριο – ΠΠΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



Σχήμα 17

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ με $ΑΒ = Α'Β'$, $ΒΓ = Β'Γ'$, $ΓΑ = Γ'Α'$ (σχ.17). Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{Α} = \hat{Α}'$. Υποθέτουμε ότι τα τρίγωνα είναι οξυγώνια.

Θεωρούμε την ημιευθεία Βx, ώστε $Γ\hat{Β}x = \hat{Β}'$ (σχ.17) και σημείο της Δ, ώστε $ΒΔ = Α'Β'$. Τα τρίγωνα ΔΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα, γιατί έχουν $ΒΓ = Β'Γ'$, $ΒΔ = Α'Β'$ και $Γ\hat{Β}Δ = \hat{Β}'$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι $ΓΔ = Γ'Α'$ και $\hat{Δ} = \hat{Α}'$.

Επειδή ΒΔ = Α′Β′ και Α′Β′ = ΑΒ, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε

$$\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 \qquad (1).$$

Επίσης, αφού ΓΔ = Α′Γ′ και Α′Γ′ = ΑΓ, προκύπτει ότι

$$\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_2 \qquad (2).$$

Επειδή τα τρίγωνα είναι οξυγώνια το τμήμα ΑΔ βρίσκεται στο εσωτερικό των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$, οπότε με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Επειδή $\hat{\Delta} = \hat{A}'$, έχουμε $\hat{A} = \hat{A}'$, που είναι το ζητούμενο.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Εξετάστε τις άλλες δύο περιπτώσεις της απόδειξης του 3ου Κριτηρίου:

i) $\hat{B} > 90°$ *και* $\hat{B}' > 90°$.

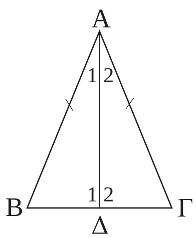
ii) $\hat{B} = 90°$ *και* $\hat{B}' = 90°$.

Με τη βοήθεια του κριτηρίου ΠΠΠ αποδεικνύονται τα επόμενα πορίσματα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



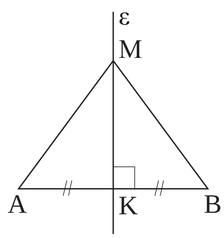
Σχήμα 18

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ η διάμεσός του (σχ.18). Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ κοινή και ΒΔ = ΔΓ, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από τις ισότητες αυτές προκύπτει αντίστοιχα ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



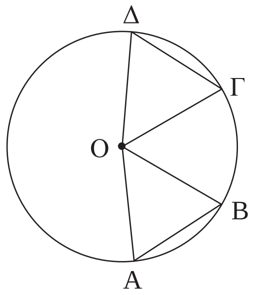
Σχήμα 19

Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (σχ.19), Μ ένα σημείο, ώστε ΜΑ = ΜΒ και Κ το μέσο του ΑΒ. Τότε το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές και η ΜΚ διάμεσός του, οπότε, σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, η ΜΚ θα είναι και ύψος, δηλαδή η ΜΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.

Από το παραπάνω πόρισμα και το πόρισμα III του θεωρήματος I (§3.2) προκύπτει ότι **η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.**

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να βρεθεί σημείο που ισαπέχει από τις κορυφές ενός τριγώνου.



Σχήμα 20

ΠΟΡΙΣΜΑ III

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ενός κύκλου (Ο, ρ) μικρότερα του ημικυκλίου, με ΑΒ = ΓΔ. Τότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ (σχ.20) έχουν: ΟΑ = ΟΓ (= ρ), ΟΒ = ΟΔ (= ρ) και ΑΒ = ΓΔ, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα. Επομένως, $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$, οπότε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα πορίσματα III και IV προκύπτει ότι για να κατασκευάσουμε ίσα τόξα πάνω σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους αρκεί να πάρουμε, με το διαβήτη, ίσες χορδές.

ΠΟΡΙΣΜΑ IV

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις ισότητας τριγώνων διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής:

Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:

- **δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ),**
- **μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΓΠΓ),**
- **και τις τρεις πλευρές ίσες μία προς μία (ΠΠΠ).**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

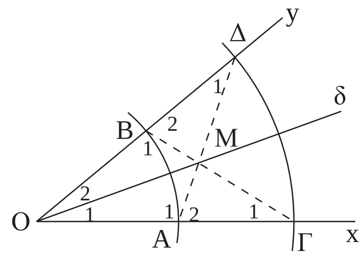
Θεωρούμε γωνία $x\hat{O}y$ και δύο κύκλους (Ο, ρ), (Ο, R) με ρ < R (σχ.21). Αν ο πρώτος κύκλος τέμνει τις πλευρές Οx, Oy στα Α, Β, ο δεύτερος στα Γ, Δ και Μ είναι το σημείο τομής των ΑΔ, ΒΓ, να αποδειχθεί ότι:

i) τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι ίσα,

ii) τα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ είναι ίσα,

iii) τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ είναι ίσα,

iv) η ΟΜ είναι η διχοτόμος της $x\hat{O}y$.



Σχήμα 21

Απόδειξη

i) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ έχουν ΟΑ = ΟΒ (= ρ), ΟΓ = ΟΔ(= R) και $\hat{O}$ κοινή (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα.

ii) Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ ή $180° - \hat{A}_2 = 180° - \hat{B}_2$ ή $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$. Επομένως, τα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ έχουν ΑΓ = ΒΔ, $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$ (ΓΠΓ), άρα είναι ίσα.

iii) Από το (ii) προκύπτει ότι ΜΑ=ΜΒ, οπότε τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ έχουν ΟΑ = ΟΒ, ΜΑ = ΜΒ και ΟΜ κοινή (ΠΠΠ), άρα είναι ίσα.

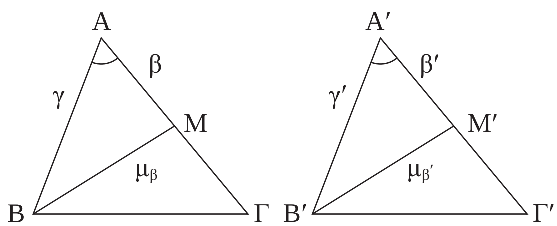
iv) Επειδή τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ είναι ίσα, έχουμε ότι $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, δηλαδή η ΟΜ είναι η διχοτόμος της $x\hat{O}y$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η εφαρμογή 1 δίνει έναν τρόπο κατασκευής της διχοτόμου μιας γωνίας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν β = β′, γ = γ′ και $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.



Σχήμα 22

Απόδειξη

Εξετάζουμε πρώτα τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α′Β′Μ′ (σχ.22). Αυτά έχουν ΑΒ = Α′Β′, ΒΜ= Β′Μ′ (από την υπόθεση) και ΑΜ =Α′Μ′, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΓ και Α′Γ′. Άρα, τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α′Β′Μ′ είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε $\hat{A} = \hat{A}'$. Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν β = β′, γ = γ′ και $\hat{A} = \hat{A}'$, άρα (ΠΓΠ) είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

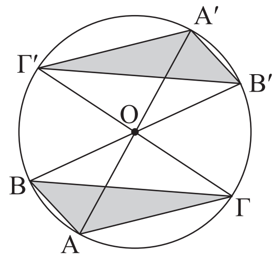
1. *Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:*
   i) *Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν μία γωνία του είναι οξεία.*
   ☐ Σ ☐ Λ
   ii) *Ένα τρίγωνο είναι σκαληνό όταν δύο πλευρές του είναι άνισες.*
   ☐ Σ ☐ Λ
2. *Διατυπώστε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων.*
3. *Συμπληρώστε τα κενά:*
   i) *Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι*
   ....
   ii) *Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι*
   ....
   iii) *Ένα σημείο Μ βρίσκεται στη μεσοκάθετο ενός τμήματος ΑΒ, όταν*
   ....
   iv) *Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, όταν*
   ....

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$. Αν Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ και Ι' το σημείο τομής των διχοτόμων Α'Δ' και Β'Ε' του Α'Β'Γ' να αποδείξετε ότι:*
   i) $AΔ = A'Δ'$ και $BE = B'E'$
   ii) $AI = A'I'$ και $BI = B'I'$.
2. *Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν $\beta = \beta'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$. Να αποδείξετε ότι:*
   i) $\hat{Γ} = \hat{Γ}'$,
   ii) $\alpha = \alpha'$ και $\gamma = \gamma'$.
3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά ίσο τμήμα ΜΔ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ίσα.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.*
2. *Αν ΑΑ', ΒΒ' και ΓΓ' είναι τρεις διάμετροι κύκλου (βλ. σχήμα), να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα.*



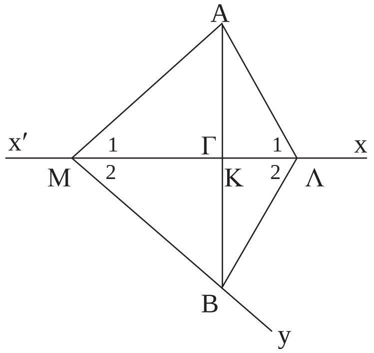
3. *Σε ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $AB = ΓΔ$ και $\hat{B} = \hat{Γ}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = \hat{Δ}$.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Θεωρούμε δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ'. Η διάμεσος ΑΜ και η διχοτόμος ΒΔ του ΑΒΓ τέμνονται στο Θ, ενώ η αντίστοιχη διάμεσος Α'Μ' και η αντίστοιχη διχοτόμος Β'Δ' του Α'Β'Γ' τέμνονται στο Θ'. Να αποδείξετε ότι:*
   i) $BΔ = B'Δ'$,
   ii) $B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'$,
   iii) *Τα τρίγωνα ΑΒΘ και Α'Β'Θ' είναι ίσα,*
   iv) $AΘ = A'Θ'$ και $ΘΔ = Θ'Δ'$.
2. *Δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ, που δεν έχουν τον ίδιο φορέα, έχουν την ίδια μεσοκάθετο ε. Αν η ε και η μεσοκάθετος του ΑΓ τέμνονται, να αποδείξετε ότι από το σημείο τομής τους διέρχεται και η μεσοκάθετος του ΒΔ.*
3. *Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Δ. Προεκτείνουμε τη ΔΑ κατά τμήμα ΑΕ = ΔΒ. Να αποδείξετε ότι:*
   i) *το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές,*
   ii) *το τρίγωνο ΓΔΕ είναι επίσης ισοσκελές.*

3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου

Στο 2ο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στην κάθετη που φέρεται από σημείο σε ευθεία. Στην παρούσα παράγραφο θα μελετήσουμε τη μοναδικότητα και την ύπαρξή της.



Σχήμα 23

ΘΕΩΡΗΜΑ

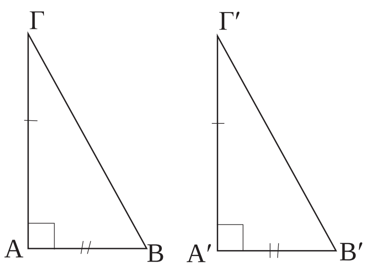
Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ευθεία x′x, σημείο A εκτός αυτής και σημείο M της x′x (σχ.23). Αν η AM είναι κάθετη στην x′x, τότε το θεώρημα ισχύει ως προς την ύπαρξη της καθέτου. Έστω ότι η AM δεν είναι κάθετη στην x′x. Στο ημιεπίπεδο που ορίζει η x′x και δεν περιέχει το A θεωρούμε την ημιευθεία My, ώστε να είναι $x\hat{M}y = A\hat{M}x$ και πάνω σε αυτή σημείο B, ώστε MA = MB. Επειδή τα σημεία A, B είναι εκατέρωθεν της x′x, η x′x τέμνει την AB σε ένα εσωτερικό σημείο, έστω K. Αφού MA = MB και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, η MK είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο MAB, άρα είναι και ύψος και επομένως $AB \perp x'x$.

Έστω ότι υπάρχει και άλλη ευθεία AΛ κάθετη στην x′x . Τότε τα τρίγωνα AMΛ και BMΛ είναι ίσα, γιατί έχουν MΛ κοινή, MA = MB και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, οπότε θα είναι και $\hat{\Lambda}_1 = \hat{\Lambda}_2$. Όμως $\hat{\Lambda}_1 = 90°$, άρα και $\hat{\Lambda}_2 = 90°$, οπότε $\hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2 = 180°$ το οποίο σημαίνει ότι τα σημεία A, Λ, B είναι συνευθειακά, δηλαδή η AΛ ταυτίζεται με την AK, που είναι άτοπο.

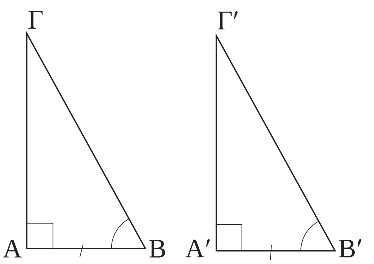
3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων



Σχήμα 24

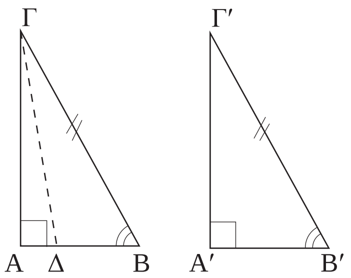
Επειδή δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση, την ορθή, από το 1ο (ΠΓΠ) και 2ο (ΓΠΓ) κριτήριο ισότητας τυχαίων τριγώνων προκύπτει άμεσα ότι:

- **Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα. (σχ.24)**
- **Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία, είναι ίσα. (σχ.25)**



Σχήμα 25

Η ισότητα ορθογώνιων τριγώνων εξασφαλίζεται ακόμη και από τα επόμενα θεωρήματα.



Σχήμα 26

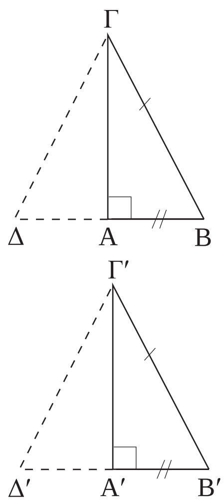
ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ με $\hat{A} = \hat{A}' = 90°$, ΒΓ = Β′Γ′ και $\hat{B} = \hat{B}'$ (σχ.26). Θα αποδείξουμε ότι είναι και ΑΒ = Α′Β′. Έστω ότι ΑΒ ≠ Α′Β′ , π.χ. ΑΒ > Α′Β′. Τότε στην πλευρά ΒΑ υπάρχει σημείο Δ, ώστε ΒΔ = Α′Β′.

Τα τρίγωνα ΔΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν ΒΓ = Β′Γ′, ΔΒ = Α′Β′ και $\hat{B} = \hat{B}'$, επομένως είναι ίσα, οπότε θα είναι $\hat{\Delta} = \hat{A}' = 90°$, δηλαδή ΓΔ⊥ΑΒ. Έτσι έχουμε ΓΑ⊥ΑΒ και ΓΔ⊥ΑΒ που είναι άτοπο (μοναδικότητα καθέτου). Οδηγηθήκαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι ΑΒ ≠ Α′Β′. Άρα ΑΒ = Α′Β′, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα, γιατί έχουν ΒΓ = Β′Γ′, ΒΑ = Β′Α′ και $\hat{B} = \hat{B}'$ (ΠΓΠ).



Σχήμα 27

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

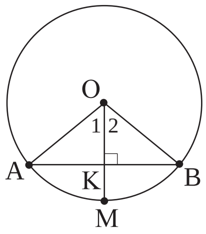
Έστω δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ (σχ.27) με $\hat{A} = \hat{A}' = 90°$, ΒΓ = Β′Γ′ και ΑΒ = Α′Β′. Θα αποδείξουμε ότι και $\hat{B} = \hat{B}'$. Στις προεκτάσεις των ΒΑ και Β′Α′ θεωρούμε αντίστοιχα τα σημεία Δ και Δ′, ώστε να είναι ΑΔ = ΑΒ και Α′Δ′ = Α′Β′. Τότε η ΓΑ είναι μεσοκάθετος του ΔΒ και η Γ′Α′ μεσοκάθετος του Δ′Β′. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ΓΔ = ΓΒ και Γ′Δ′ = Γ′Β′. Από τις τελευταίες ισότητες και την ΒΓ = Β′Γ′ προκύπτει ότι ΓΔ = Γ′Δ′. Έτσι τα τρίγωνα ΓΔΒ και Γ′Δ′Β′ έχουν ΓΔ = Γ′Δ′, ΒΓ = Β′Γ′ και ΔΒ = Δ′Β′ (ως διπλάσια των ίσων τμημάτων ΑΒ και Α′Β′), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{B}'$. Τότε και τα αρχικά τρίγωνα είναι ίσα (ΠΓΠ).

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.



Σχήμα 28

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (Ο, ρ), μια χορδή του ΑΒ και την κάθετη ΟΚ της ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ (σχ.28). Επειδή το τμήμα ΟΚ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ (ΟΑ = ΟΒ = ρ), σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα είναι διάμεσος και διχοτόμος, δηλαδή το Κ είναι μέσο του ΑΒ και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Αφού $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ προκύπτει ότι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

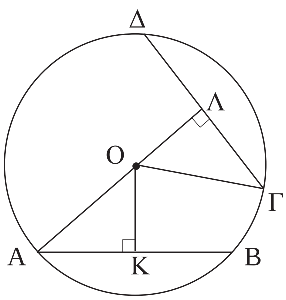
Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις ισότητας ορθογώνιων τριγώνων διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής:

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

- **Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.**
- **Μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.**

ΘΕΩΡΗΜΑ III

Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.



Σχήμα 29

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

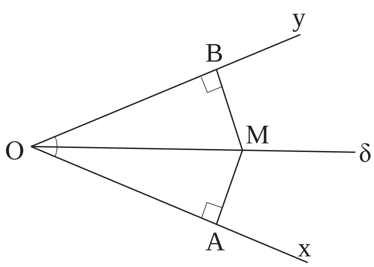
Έστω οι ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου (Ο, ρ) και ΟΚ, ΟΛ τα αποστήματά τους αντίστοιχα (σχ.29). Τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ, έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$, ΟΑ = ΟΓ (= ρ) και ΑΚ = ΓΛ (αφού ΑΒ = ΓΔ). Επομένως είναι ίσα, οπότε ΟΚ = ΟΛ.

Αντίστροφα. Έστω ότι τα αποστήματα ΟΚ και ΟΛ είναι ίσα. Τότε τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$, ΟΑ = ΟΓ και ΟΚ = ΟΛ, επομένως είναι ίσα, οπότε

$$A K = \Gamma\Lambda \text{ ή } \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \text{ ή } AB = \Gamma\Delta.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ IV

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.



Σχήμα 30

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω μια γωνία $x\hat{O}y$ και Μ ένα σημείο της διχοτόμου της Οδ (σχ.30). Φέρουμε ΜΑ⊥Οx και ΜΒ⊥Οy. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, ΟΜ κοινή και $M\hat{O}A = M\hat{O}B$, επομένως ΜΑ = ΜΒ.

Αντίστροφα. Έστω Μ ένα εσωτερικό σημείο της γωνίας. Φέρουμε ΜΑ⊥Οx και ΜΒ⊥Οy και υποθέτουμε ότι ΜΑ = ΜΒ. Τότε τα τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι πάλι ίσα, αφού $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, ΟΜ κοινή και ΜΑ = ΜΒ και επομένως $M\hat{O}A = M\hat{O}B$, οπότε το Μ είναι σημείο της διχοτόμου Οδ. Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι: **Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές της.**

Με τη βοήθεια του συμπεράσματος αυτού αντιμετωπίζεται η επόμενη δραστηριότητα.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

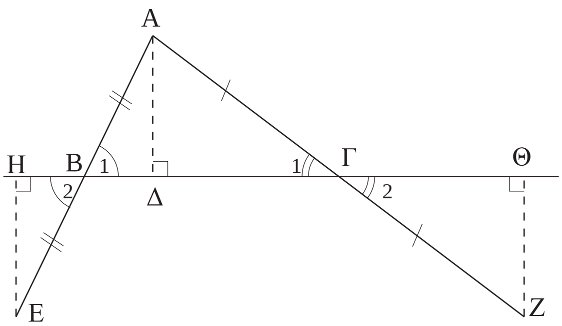
Να βρεθεί σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές ενός τριγώνου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ (σχ.31) παίρνουμε σημείο Ε, ώστε ΒΕ = ΑΒ και στην προέκταση της ΑΓ παίρνουμε σημείο Ζ, ώστε ΓΖ = ΑΓ. Αν ΑΔ το ύψος του τριγώνου και ΕΗ, ΖΘ τα κάθετα τμήματα προς την ευθεία ΒΓ, τότε:

i) να συγκριθούν τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΗ, καθώς και τα ΑΓΔ και ΖΓΘ,

ii) να αποδειχθεί ότι ΕΗ = ΖΘ.



Σχήμα 31

Λύση

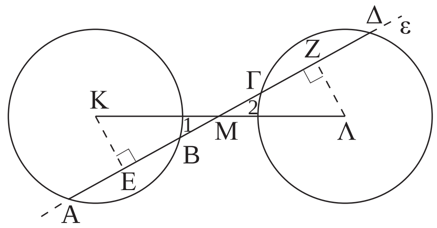
i) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΗ είναι ορθογώνια ($\hat{\Delta} = \hat{H} = 90°$) και έχουν ΑΒ = ΒΕ (από υπόθεση) και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (κατακορυφήν). Άρα, είναι ίσα.

Όμοια και τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΖΓΘ είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{\Delta} = \hat{\Theta} = 90°$, ΑΓ = ΓΖ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$.

ii) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΕΒΗ προκύπτει ότι ΕΗ = ΑΔ. Όμοια από την άλλη ισότητα των τριγώνων προκύπτει ΖΘ = ΑΔ. Επομένως ΕΗ = ΖΘ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα Κ, Λ και από το μέσο Μ του ΚΛ ευθεία ε που τέμνει τους κύκλους (σχ.32) στα σημεία Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι ΑΒ = ΓΔ.



Σχήμα 32

Απόδειξη

Επειδή τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι χορδές ίσων κύκλων, για να είναι ΑΒ = ΓΔ αρκεί τα αποστήματά τους ΚΕ και ΛΖ, αντίστοιχα, να είναι ίσα. Τα τρίγωνα ΕΜΚ και ΖΜΛ είναι ορθογώνια ($\hat{E} = \hat{Z} = 90°$) και έχουν ΚΜ = ΜΛ, γιατί το Μ είναι μέσο του ΚΛ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ως κατακορυφήν. Άρα είναι ίσα, οπότε ΚΕ = ΛΖ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Έστω ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής. Αν $AB \perp \varepsilon$ και $A\Gamma \perp \varepsilon$ (Β, Γ σημεία της ε) τότε:*

i) $B \equiv \Gamma$ ☐ Σ ☐ Λ

ii) $B \not\equiv \Gamma$ ☐ Σ ☐ Λ

iii) $AB = A\Gamma$ ☐ Σ ☐ Λ

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. *Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), Δ σημείο της βάσης και οι προτάσεις:*

π_1: *Το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.*

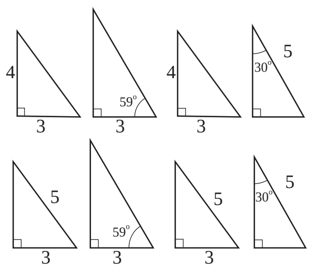
π_2: *Το ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου.*

π_3: *Το ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου.*

Αν για το ΑΔ ισχύει μία από τις π_1, π_2, π_3, τότε ισχύουν οι άλλες δύο προτάσεις;

3. *Διατυπώστε τις δύο ανακεφαλαιωτικές περιπτώσεις ισότητας ορθογώνιων τριγώνων.*

4. *Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει οκτώ ορθογώνια τρίγωνα. Καθένα από αυτά είναι ίσο με ένα από τα υπόλοιπα. Να βρείτε τα ζεύγη των ίσων τριγώνων και να αναφέρετε το λόγο για τον οποίο είναι ίσα.*



5. *Συμπληρώστε τα κενά στην επόμενη πρόταση:*
Ο φορέας του αποστήματος μιας χορδής είναι μεσοκάθετος της .... και διχοτομεί ....

6. *Αν ΑΒ, ΓΔ είναι χορδές ενός κύκλου (Κ) και ΚΕ, ΚΖ είναι αντίστοιχα τα αποστήματά τους τότε:*

α. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE = \frac{1}{2}KZ$,

β. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE > KZ$,

γ. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE = KZ$,

δ. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow \frac{1}{2}KE = \frac{1}{3}KZ$,

ε. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE < KZ$.

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

7. *Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας;*

8. *Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες είναι πάντοτε ίσα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να αποδείξετε ότι τα ύψη ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.*

2. *Να αποδείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν:*

i) *από τη βάση,*

ii) *από τις ίσες πλευρές.*

3. *Να αποδείξετε ότι τα άκρα ενός τμήματος ισαπέχουν από κάθε ευθεία που διέρχεται από το μέσο του.*

4. *Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι και τα ύψη τους που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές είναι ίσα.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:*

i) το Μ ισαπέχει από τις ίσες πλευρές του τριγώνου,

ii) η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι αποστάσεις του Μ από τις ίσες πλευρές μεταξύ τους.

2. *Να αποδείξετε ότι αν σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι* $\alpha = \alpha'$, $\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$ *και* $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$*, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.*

3. *Να αποδείξετε ότι αν σε δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι* $\alpha = \alpha'$, $\upsilon_\beta = \upsilon_{\beta'}$ *και* $\upsilon_\gamma = \upsilon_{\gamma'}$*, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.*

4. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ* ($\hat{A} = 1∟$) *και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε* $ΔΕ \perp ΒΓ$*, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές.*

5. *Δίνεται κύκλος (Ο, R), οι ίσες χορδές του ΑΒ, ΓΔ και τα αποστήματά τους ΟΚ και ΟΛ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των ΒΑ και ΔΓ τέμνονται στο Μ, να αποδείξετε ότι:*

i) τα τρίγωνα ΜΟΚ και ΜΟΛ είναι ίσα,

ii) ΜΑ = ΜΓ και ΜΒ = ΜΔ.

Σύνθετα Θέματα

1. *Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας* $\hat{A}$ *τέμνει τη μεσοκάθετο της ΒΓ στο σημείο Δ. Έστω Ε και Ζ οι προβολές του Δ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.*

i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΕ και ΔΓΖ.

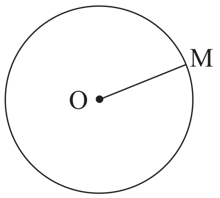
ii) Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα θεωρώντας την εξωτερική διχοτόμο της $\hat{A}$*, η οποία τέμνει τη μεσοκάθετο της ΒΓ στο σημείο Δ', με προβολές τα σημεία Ε', Ζ' στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.*

iii) Να αποδείξετε ότι ΕΕ' = ΑΓ και ΖΖ' = ΑΒ.

2. *Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' έχουν μία κάθετη πλευρά ίση και η περίμετρος του ενός είναι ίση με την περίμετρο του άλλου, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.*

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

3.7 Κύκλος - Μεσοκάθετος - Διχοτόμος

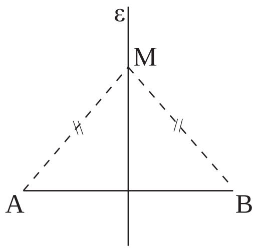


Σχήμα 33

Όπως έχουμε αναφέρει, γεωμετρικός τόπος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων, που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα.

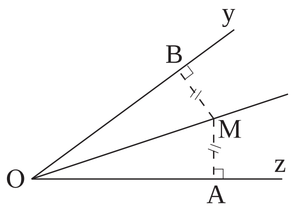
Επομένως:

- ο κύκλος (σχ.33) είναι ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία του και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη απόσταση από ένα σταθερό σημείο.



Σχήμα 34

- η μεσοκάθετος ενός τμήματος (σχ.34) είναι επίσης ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.
- η διχοτόμος μιας γωνίας (σχ.35) είναι ένας άλλος γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά (από τα σημεία της γωνίας) ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.



Σχήμα 35

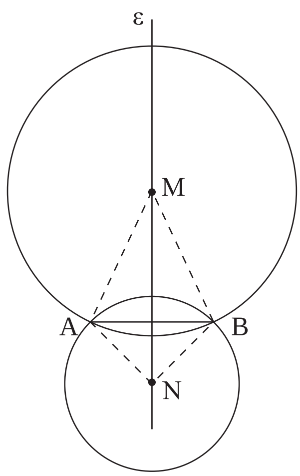
Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος γεωμετρικού τόπου απαιτεί μια ιδιαίτερη διαδικασία η οποία παρουσιάζεται στο επόμενο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, που διέρχονται από δύο σταθερά σημεία Α και Β.

Λύση

Έστω Μ ένα σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, δηλαδή το κέντρο ενός κύκλου που διέρχεται από τα Α, Β (σχ.36). Τότε ΜΑ = ΜΒ, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου και επομένως το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο ε του τμήματος ΑΒ.



Σχήμα 36

Αντίστροφα. Έστω Ν ένα σημείο της μεσοκαθέτου ε του ΑΒ. Τότε θα είναι ΝΑ = ΝΒ, οπότε ο κύκλος (Ν, ΝΑ) διέρχεται και από το Β.

Επομένως κάθε σημείο της ε είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τα Α, Β.

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος ε του τμήματος ΑΒ.

ΣΧΟΛΙΟ

Από το προηγούμενο παράδειγμα γίνεται φανερό ότι η λύση ενός προβλήματος γεωμετρικού τόπου ακολουθεί τα εξής στάδια:

Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο Μ του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου και με βάση τη χαρακτηριστική ιδιότητα που έχει, προσδιορίζουμε τη γραμμή Γ πάνω στην οποία βρίσκεται.

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε με τον κανόνα και το διαβήτη τη γραμμή αυτή και εξετάζουμε αν το τυχαίο σημείο Ν της γραμμής αυτής ικανοποιεί τη χαρακτηριστική ιδιότητα του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Αν αυτό συμβαίνει, τότε η γραμμή Γ είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Συμπληρώστε τα κενά στις επόμενες προτάσεις.*

i) Ο γεωμετρικός τόπος των κορυφών των ισοσκελών τριγώνων με γνωστή βάση είναι ....

ii) Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες είναι ....

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κορυφών Α των τριγώνων ΑΒΓ, που έχουν σταθερή την πλευρά ΒΓ = α και τη διάμεσο ΑΜ με γνωστό μήκος.*

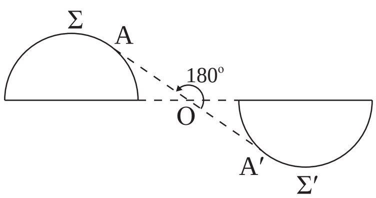
2. *Δίνεται κύκλος (Ο, R). Αν Ν τυχαίο σημείο του κύκλου και Μ σημείο στην προέκταση της ΟΝ, ώστε ΟΝ = ΝΜ, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ, όταν το Ν διαγράφει τον κύκλο.*

Συμμετρικά σχήματα

3.8 Κεντρική συμμετρία

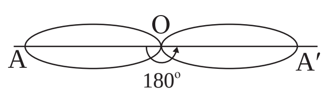
Σχήμα 37

Στην §2.10 είδαμε πότε δύο σημεία Α, Α′ λέγονται συμμετρικά ως προς κέντρο ένα σημείο Ο (σχ.37).



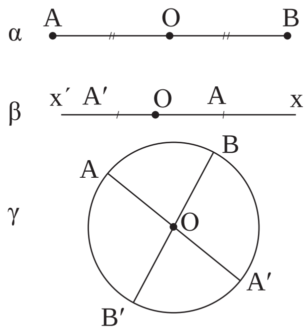
Σχήμα 38

Γενικότερα δύο σχήματα Σ, Σ′ λέγονται συμμετρικά ως προς ένα σημείο Ο (σχ.38), αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ′ είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς το Ο και αντίστροφα. Το σημείο Ο λέγεται ***κέντρο συμμετρίας*** του σχήματος, που αποτελείται από τα συμμετρικά ως προς το Ο σχήματα Σ και Σ′. Δηλαδή ένα σημείο Ο λέγεται κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο Α του σχήματος το συμμετρικό του Α′, ως προς το Ο, είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με κέντρο συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει ***κεντρική συμμετρία***.



Σχήμα 39

Αν στρέψουμε ένα σχήμα Σ, με κέντρο συμμετρίας το Ο (σχ.39), κατά 180° γύρω από το Ο, θα πάρουμε ένα σχήμα που θα συμπίπτει με το αρχικό.



Σχήμα 40

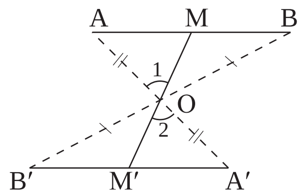
Από τα γνωστά μας, μέχρι τώρα σχήματα:

- Το ευθύγραμμο τμήμα έχει κέντρο συμμετρίας το μέσο του (σχ.40α).
- Η ευθεία έχει κέντρο συμμετρίας οποιοδήποτε σημείο της (σχ.40β).
- Ο κύκλος έχει κέντρο συμμετρίας το κέντρο του (σχ.40γ).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Το συμμετρικό ευθύγραμμου τμήματος ως προς σημείο που δεν ανήκει στο φορέα του, είναι τμήμα ίσο με αυτό.

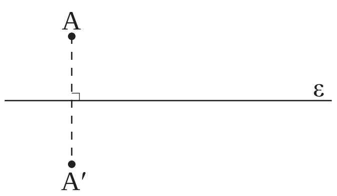
Απόδειξη



Σχήμα 41

Έστω ένα τμήμα ΑΒ (σχ.41), σημείο Ο που δεν ανήκει στην ευθεία ΑΒ και Α′, Β′ τα συμμετρικά των Α, Β ως προς το Ο αντίστοιχα. Επειδή ΟΑ′ = ΟΑ, ΟΒ′ = ΟΒ και $A'\hat{O}B' = A\hat{O}B$, τα τρίγωνα ΑΟΒ και Α′ΟΒ′ είναι ίσα, οπότε Α′Β′ = ΑΒ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα τμήματα ΑΒ και Α′Β′ είναι συμμετρικά ως προς το Ο. Έστω σημείο Μ του ΑΒ και Μ′ η τομή της ΜΟ με το Α′Β′. Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων έχουμε ότι $\hat{A} = \hat{A}'$, οπότε τα τρίγωνα ΑΟΜ και Α′ΟΜ′ είναι ίσα γιατί έχουν ΟΑ′ = ΟΑ, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Επομένως ΟΜ′ = ΟΜ, που σημαίνει ότι το Μ′ είναι συμμετρικό του Μ.

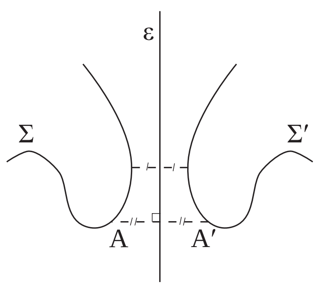
Όμοια το συμμετρικό κάθε σημείου Μ′ του Α′Β′ είναι σημείο του ΑΒ. Άρα τα ΑΒ, Α′Β′ είναι συμμετρικά ως προς το Ο.



Σχήμα 42

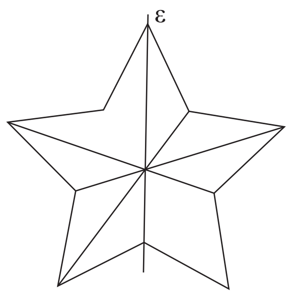
3.9 Αξονική συμμετρία

Στην §2.14 είδαμε πότε δύο σημεία Α, Α′ λέγονται συμμετρικά ως προς (άξονα) την ευθεία ε (σχ.42).



Σχήμα 43

Γενικότερα δύο σχήματα Σ, Σ′ (σχ.43) λέγονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ε, αν και μόνον αν κάθε σημείο του Σ′ είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς την ε και αντίστροφα. Η ευθεία ε λέγεται ***άξονας συμμετρίας*** του σχήματος που αποτελείται από τα σχήματα Σ και Σ′. Δηλαδή μια ευθεία ε λέγεται άξονας συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο Α του σχήματος το συμμετρικό του Α′, ως προς την ε, είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με άξονα συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει ***αξονική συμμετρία***. Αν ένα σχήμα έχει ως άξονα συμμετρίας μια ευθεία ε, τότε η ε χωρίζει το σχήμα (σχ.44) σε δύο μέρη με τέτοιο τρόπο,

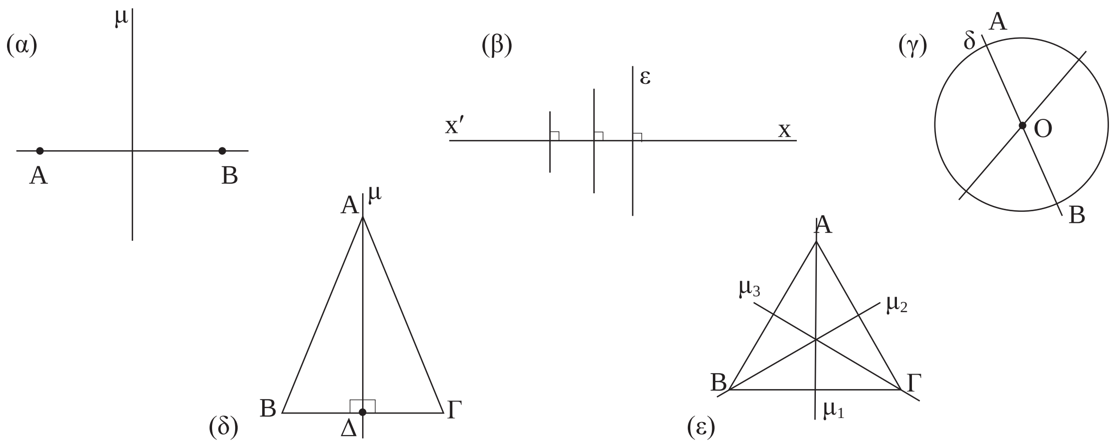


Σχήμα 44

ώστε, αν διπλώσουμε το φύλλο σχεδίασης κατά μήκος της ε, τα μέρη αυτά θα ταυτιστούν.

Από τα γνωστά μας σχήματα

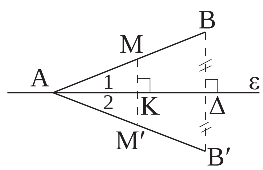
- Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει άξονες συμμετρίας τη μεσοκάθετό του μ και τον φορέα του ε (σχ.45α).
- Η ευθεία x′x έχει άξονα συμμετρίας κάθε ευθεία ε⊥x′x και την ίδια τη x′x (σχ.45β).
- Ο κύκλος έχει άξονα συμμετρίας το φορέα δ κάθε διαμέτρου του ΑΒ (σχ.45γ).
- Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) έχει άξονα συμμετρίας το φορέα μ του ύψους ΑΔ (σχ.45δ).
- Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας τους φορείς των τριών υψών του (σχ.45ε).



Σχήμα 45

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω μια ευθεία ε και ένα τμήμα ΑΒ του οποίου το ένα άκρο Α είναι σημείο της ε. Να αποδειχθεί ότι το συμμετρικό του ΑΒ ως προς την ε είναι το τμήμα ΑΒ′ ίσο με το ΑΒ, όπου Β′ το συμμετρικό του Β ως προς την ε.



Σχήμα 46

Απόδειξη

Το συμμετρικό του Α ως προς την ε είναι το ίδιο το Α, αφού το Α είναι σημείο της ε. Επειδή η ε είναι μεσοκάθετος του ΒΒ′, είναι ΑΒ′ = ΑΒ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΒ′ η ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος, δηλαδή $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. Έστω σημείο Μ του ΑΒ. Φέρουμε ΜΚ⊥ε η οποία όταν προεκταθεί τέμνει το ΑΒ′ στο Μ′. Στο τρίγωνο ΑΜΜ′ η ΑΚ είναι ύψος και διχοτόμος (αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$), άρα είναι και διάμεσος, δηλαδή ΚΜ′ = ΚΜ, οπότε το Μ′ είναι συμμετρικό του Μ.

Όμοια αποδεικνύεται ότι το συμμετρικό κάθε σημείου του ΑΒ′ είναι σημείο του ΑΒ. Άρα τα ΑΒ, ΑΒ′ είναι συμμετρικά ως προς την ε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να σχεδιάσετε τους άξονες συμμετρίας των γραμμάτων:* Α, Β, Δ, Η, Θ, Τ, Χ, Ψ.
2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ο. Αν Α', Β', Γ' είναι τα συμμετρικά των Α, Β, Γ ως προς το κέντρο Ο αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' είναι συμμετρικά ως προς το Ο και ίσα.*
3. *Αν $x'\hat{A}'y'$ είναι η συμμετρική της γωνίας $x\hat{A}y$, ως προς κέντρο συμμετρίας ένα σημείο Ο, εξωτερικό της $x\hat{A}y$, τότε να αποδειχθεί ότι $x'\hat{A}'y' = x\hat{A}y$.*
4. *Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς την ευθεία ΒΓ είναι τρίγωνο ίσο με το ΑΒΓ.*
5. *Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος μιας γωνίας είναι άξονας συμμετρίας της.*
6. *Έστω ε, ε' δύο κάθετοι που τέμνονται στο Ο και ένα τυχαίο σημείο Μ. Αν Μ' είναι το συμμετρικό του Μ ως προς ε και Μ'' το συμμετρικό του Μ' ως προς ε', τότε να αποδείξετε ότι:*
   i) ΟΜ = ΟΜ'',
   ii) τα σημεία Μ, Ο, Μ'' είναι συνευθειακά.

Ανισοτικές σχέσεις

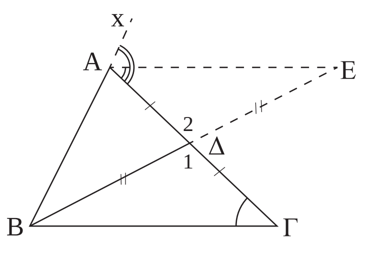
Στην ενότητα αυτή αποδεικνύουμε την ανισοτική σχέση που ισχύει μεταξύ μιας εξωτερικής γωνίας ενός τριγώνου και των απέναντι γωνιών του και την ανισοτική σχέση πλευρών και γωνιών ενός τριγώνου. Επίσης, παρουσιάζουμε την τριγωνική ανισότητα.

3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 47

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τη διάμεσο ΒΔ (σχ.47) και στην προέκτασή της, προς το Δ, θεωρούμε σημείο Ε, ώστε ΔΕ = ΒΔ. Επειδή το Ε βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\Gamma\hat{A}x$ έχουμε $\Gamma\hat{A}E < \Gamma\hat{A}x = \hat{A}_{\varepsilon\xi}$. Όμως τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΕΔΑ είναι ίσα γιατί έχουν: ΒΔ = ΔΕ, ΑΔ = ΔΓ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, οπότε $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}E$. Από την τελευταία ισότητα και την $\Gamma\hat{A}E < \hat{A}_{\varepsilon\xi}$ προκύπτει ότι $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{\Gamma}$. Όμοια αποδεικνύεται ότι και $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{B}$.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

i) Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.

ii) Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180°.

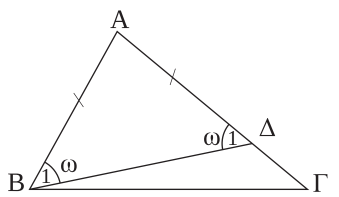
3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών

ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta > \gamma$ (σχ.48). Τότε υπάρχει μοναδικό εσωτερικό σημείο Δ της ΑΓ, ώστε ΑΔ = ΑΒ. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με βάση ΒΔ και επομένως $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$. Επειδή η ΒΔ είναι εσωτερική ημιευθεία της γωνίας $\hat{B}$, είναι $\hat{B} > \hat{B}_1$, ενώ η $\hat{\Delta}_1$, ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΒΔΓ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 > \hat{\Gamma}$. Έτσι έχουμε $\hat{B} > \omega$ και $\omega > \hat{\Gamma}$, επομένως $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.



Σχήμα 48

Αντίστροφα. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Τότε θα είναι και $\beta > \gamma$, γιατί αν ήταν $\beta = \gamma$ ή $\beta < \gamma$ θα είχαμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ή $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, που είναι άτοπο.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

i) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.

ii) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.

iii) Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.

ΣΧΟΛΙΟ

Το διπλανό πόρισμα (ii) είναι το αντίστροφο του πορίσματος Ι της §3.2. Τα δύο αυτά πορίσματα συνοψίζονται στο εξής: ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν έχει δύο γωνίες ίσες.

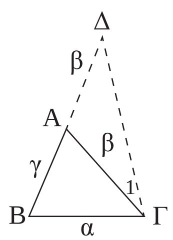
3.12 Τριγωνική ανισότητα

Γνωρίζουμε ότι ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων είναι η ευθεία που τα συνδέει. Αυτό εκφράζεται από το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 49

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι $\alpha < \beta + \gamma$ (σχ.49). Γι' αυτό προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ, προς το Α, κατά τμήμα ΑΔ = ΑΓ. Τότε το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές και η ΓΑ εσωτερική ημιευθεία της $B\hat{\Gamma}\Delta$, οπότε έχουμε αντίστοιχα $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Gamma}_1 < B\hat{\Gamma}\Delta$. Από τις σχέσεις αυτές προ-

ΣΧΟΛΙΟ

Γενικότερα ισχύει: Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο από κάθε τεθλασμένη γραμμή που έχει άκρα τα Α και Β.

κύπτει ότι $\hat{\Delta} < \mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta$, από την οποία σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{B\Gamma} < \mathrm{B\Delta}$ ή $\alpha < \beta + \gamma$. Όμοια προκύπτει ότι $\beta < \gamma + \alpha$ και $\gamma < \alpha + \beta$. Από τις ανισότητες αυτές, αντίστοιχα προκύπτει ότι $\alpha > \beta - \gamma$, αν $\beta \geq \gamma$ ή $\alpha > \gamma - \beta$, αν $\gamma \geq \beta$, δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις ισχύει το ζητούμενο. Επομένως:

$$\boldsymbol{\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma,\ \beta \geq \gamma}$$

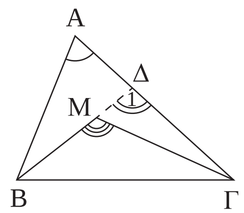
ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι:

i) $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma > \hat{\mathrm{A}}$ **ii)** $\mathrm{MB} + \mathrm{M\Gamma} < \mathrm{AB} + \mathrm{A\Gamma}$.



Σχήμα 50

Απόδειξη

i) Έστω Δ (σχ.50) το σημείο τομής της προέκτασης του ΒΜ με την ΑΓ. Η γωνία ΒΜΓ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΓ και επομένως $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma > \hat{\Delta}_1$. Αλλά η $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΔ, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_1 > \hat{\mathrm{A}}$. Άρα θα είναι και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma > \hat{\mathrm{A}}$.

ii) Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΜΓΔ προκύπτουν αντίστοιχα οι ανισότητες

$$\mathrm{MB} + \mathrm{M\Delta} < \mathrm{AB} + \mathrm{A\Delta} \text{ και } \mathrm{M\Gamma} < \mathrm{M\Delta} + \mathrm{\Delta\Gamma}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε:

$$\mathrm{MB} + \mathrm{M\Delta} + \mathrm{M\Gamma} < \mathrm{AB} + (\mathrm{A\Delta} + \mathrm{\Delta\Gamma}) + \mathrm{M\Delta} \text{ ή } \mathrm{MB} + \mathrm{M\Gamma} < \mathrm{AB} + \mathrm{A\Gamma}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

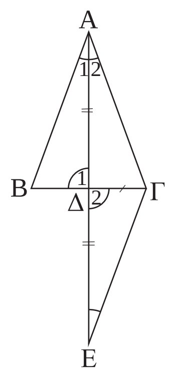
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ. Αν ισχύουν δύο από τις επόμενες προτάσεις:

i) το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος,

ii) το τμήμα ΑΔ είναι διχοτόμος,

iii) το τμήμα ΑΔ είναι ύψος,

τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ.



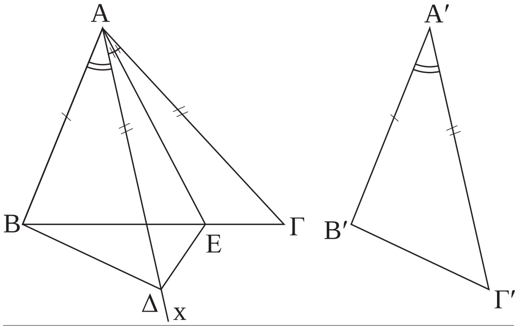
Σχήμα 51

Λύση

Έστω ΑΔ διχοτόμος και διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ (σχ.51). Προεκτείνουμε το ΑΔ κατά ίσο τμήμα ΔΕ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ είναι ίσα ($\mathrm{B\Delta} = \mathrm{\Delta\Gamma}$, $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{\Delta E}$, $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ ως κατακορυφήν). Άρα $\mathrm{AB} = \mathrm{\Gamma E}$ (1) και $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{E}}$. Από την $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{E}}$ προκύπτει $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{\Gamma E}$ (2), αφού ΑΔ διχοτόμος, οπότε $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2 = \hat{\mathrm{E}}$. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$. Αν ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος ή ύψος και διχοτόμος, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα, οπότε $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες, τότε και οι τρίτες πλευρές θα είναι όμοια άνισες και αντίστροφα.



Σχήμα 52

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ με ΑΒ = Α′Β′, ΑΓ = Α′Γ′ και $\hat{A} > \hat{A}'$ (σχ.55).

Θα αποδείξουμε ότι ΒΓ > Β′Γ′. Αφού $\hat{A} > \hat{A}'$, υπάρχει εσωτερική ημιευθεία Αx της $\hat{A}$ τέτοια, ώστε $B\hat{A}x = \hat{A}'$. Πάνω στην Αx θεωρούμε σημείο Δ, ώστε ΑΔ = Α′Γ′. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα, ΒΔ = Β′Γ′. Φέρουμε κατόπιν τη διχοτόμο ΑΕ της γωνίας $\Delta\hat{A}\Gamma$, οπότε σχηματίζονται δύο ίσα τρίγωνα, τα ΑΔΕ και ΑΓΕ, άρα ΕΔ = ΕΓ. Στο τρίγωνο ΒΔΕ, έχουμε από την τριγωνική ανισότητα ότι

$$B\Delta < BE + E\Delta \text{ ή } B\Delta < BE + E\Gamma \text{ ή } B'\Gamma' < B\Gamma.$$

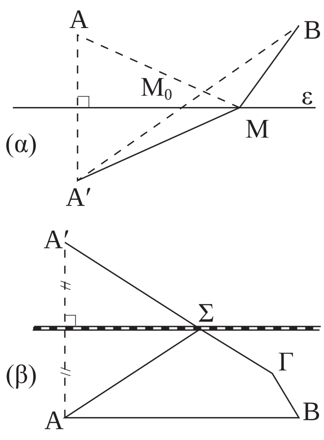
Αντίστροφα. Ας θεωρήσουμε ότι στα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ΑΒ = Α′Γ′, ΑΓ = Α′Γ′ και ΒΓ > Β′Γ′. Αν ήταν $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε θα είχαμε ότι ΒΓ = Β′Γ′, ενώ αν ήταν $\hat{A} < \hat{A}'$, θα είχαμε ότι Β′Γ′ < ΒΓ, που είναι άτοπο. Επομένως, $\hat{A} > \hat{A}'$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η

Δίνεται μια ευθεία ε, δύο σημεία Α, Β προς το ίδιο μέρος της και το συμμετρικό Α′ του Α ως προς την ε (Σχ.53α).

i) Για οποιοδήποτε σημείο Μ της ε, να αποδειχθεί ότι ΜΑ + ΜΒ = ΜΑ′ + ΜΒ ≥ Α′Β. Πότε το άθροισμα ΜΑ + ΜΒ παίρνει τη μικρότερή του τιμή;

ii) Στα σημεία Α, Β, Γ (σχ.53β) βρίσκονται τρεις κωμοπόλεις. Κοντά σε αυτές διέρχεται σιδηροδρομική γραμμή, πάνω στην οποία πρόκειται να κατασκευασθεί σταθμός Σ. Σε ποιο σημείο πρέπει να κατασκευασθεί ο σταθμός, ώστε ο δρόμος ΑΣΓΒ να είναι ο ελάχιστος δυνατός;



Σχήμα 53

Λύση

i) Επειδή το Α′ είναι συμμετρικό του Α ως προς την ε, η ε είναι μεσοκάθετος του ΑΑ′, οπότε ΜΑ = ΜΑ′ και επομένως ΜΑ + ΜΒ = ΜΑ′ + ΜΒ (1). Αν το Μ δεν είναι σημείο του τμήματος Α′Β από το τρίγωνο ΜΑ′Β, έχουμε ΜΑ′ + ΜΒ > Α′Β (2), ενώ αν το Μ είναι σημείο του Α′Β′ έχουμε ΜΑ′ + ΜΒ = Α′Β (3). Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΜΑ + ΜΒ = ΜΑ′ + ΜΒ ≥ Α′Β και ότι το ΜΑ + ΜΒ παίρνει τη μικρότερή του τιμή Α′Β, όταν Μ = M_0, όπου M_0 το σημείο τομής της ε με το Α′Β.

ii) Όμοια με το i).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:*

i) *Η εξωτερική γωνία $\hat{A}_{\varepsilon\xi}$ τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$.* ☐ Σ ☐ Λ

ii) *Η εξωτερική γωνία $\hat{B}_{\varepsilon\xi}$ τριγώνου ΑΒΓ είναι μικρότερη από τη $\hat{\Gamma}$.* ☐ Σ ☐ Λ

iii) *Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°.* ☐ Σ ☐ Λ

iv) *Αν $\beta > \gamma$ (σε τρίγωνο ΑΒΓ), τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και αντίστροφα.* ☐ Σ ☐ Λ

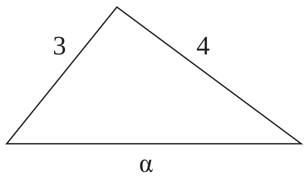
v) *Αν $\beta = \gamma$ (σε τρίγωνο ΑΒΓ), τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και αντίστροφα.* ☐ Σ ☐ Λ

2. *Για το τρίγωνο του παρακάτω σχήματος ισχύει:*

α. $\alpha = 7$ β. $\alpha = 1$

γ. $1 < \alpha < 7$ δ. $\alpha > 7$ ε. $0 < \alpha < 1$.

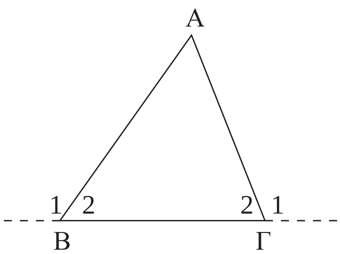
Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.



3. *Υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = \dfrac{\gamma}{3}$ και $\beta = \dfrac{3\gamma}{5}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_1$. Να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 > 90°$.*



2. *Αν σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν ΑΒ = ΒΓ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΓΔ. Τι συμπεραίνετε για τη ΒΔ;*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=\hat{\Gamma}$.*

i) *Τι είδους γωνία είναι η $\hat{B}$;*

ii) *Να αποδείξετε ότι το ύψος από την κορυφή Α τέμνει την ευθεία ΒΓ, σε εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της ημιευθείας Βx που περιέχει το Α. Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι μεγαλύτερη, ίση ή μικρότερη της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$, αν το σημείο Δ βρίσκεται μεταξύ των Β και Α, ταυτίζεται με το Α ή βρίσκεται μετά το Α, αντίστοιχα.*

5. *Αν Μ σημείο της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι ΑΜ < ΑΒ.*

6. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ =90°), η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι ΑΔ < ΔΒ.*

7. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Ο σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Οι ΒΟ και ΓΟ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Λ και Μ αντίστοιχα. Αν ισχύει ότι ΒΟ = ΓΟ και ΟΛ = ΟΜ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.*

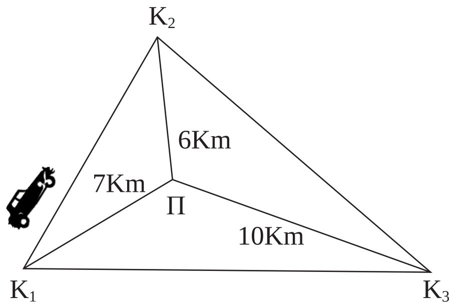
8. *Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι αν οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο Δ, τότε το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.*

9. *Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:*

i) *το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές,*

ii) *η ΑΙ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$.*

10. *Οι κωμοπόλεις K_1, K_2, K_3 απέχουν από την πόλη Π (παρακάτω σχήμα), αποστάσεις 7, 6 και 10 km αντίστοιχα. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από την κωμόπολη K_1 και ακολουθώντας τη διαδρομή $K_1K_2K_3K_1$ επιστρέφει στην K_1. Ο χιλιομετρητής του γράφει ότι για αυτή τη διαδρομή διήνυσε απόσταση 48 km. Είναι* *αυτό δυνατόν; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.*



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2}$, να αποδείξετε ότι $\hat{A} > \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Τι ισχύει όταν $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$ ή $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2}$;*

2. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και Μ το μέσο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $A\hat{M}\Gamma > A\hat{M}B$.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και η διάμεσος ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:*
   i) $M\hat{A}B > M\hat{A}\Gamma$,
   ii) $\frac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$,
   iii) $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$.

4. *Έστω κύκλος (Ο, R) διαμέτρου ΑΒ και σημείο Σ της ημιευθείας ΟΑ. Για κάθε σημείο Μ του κύκλου να αποδειχθεί ότι ΣΑ ≤ ΣΜ ≤ ΣΒ. (Το τμήμα ΣΑ λέγεται απόσταση του Σ από τον κύκλο).*

5. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Αν η διχοτόμος δ_α τέμνει κάθετα τη διάμεσο μ_β, να αποδείξετε ότι:*
   i) ΑΓ = 2ΑΒ,
   ii) ΑΒ < ΒΓ.

6. *Έστω κύκλος (Ο, R) και δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Αν $\overset{\frown}{AB} = 2\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ να αποδείξετε ότι ΑΒ < 2ΓΔ.*

7. *Να αποδείξετε ότι σε δύο άνισα τόξα ενός κύκλου αντιστοιχούν χορδές όμοια άνισες και αντίστροφα.*

Σύνθετα Θέματα

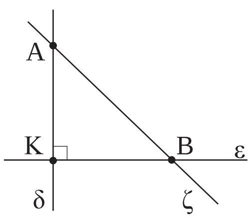
1. *Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Ο εσωτερικό σημείο του.*
   i) *Να αποδείξετε ότι*
   $$OA + OB + O\Gamma + O\Delta > \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2}.$$
   ii) *Για ποια θέση του Ο το άθροισμα ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ + ΟΔ γίνεται ελάχιστο;*

2. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ προς το μέρος του Α κατά τμήματα ΑΔ = ΑΓ και ΑΕ = ΑΒ αντίστοιχα. Η ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι:*
   i) *το τρίγωνο ΜΒΕ είναι ισοσκελές,*
   ii) *η διχοτόμος της $B\hat{M}E$ διέρχεται από το σημείο Α.*

3. *Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ενός κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:*
   i) *κάθε διαγώνιος είναι μικρότερη της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου,*
   ii) *ΑΓ + ΒΔ > ΑΒ + ΓΔ και ΑΓ + ΒΔ > ΑΔ + ΒΓ,*
   iii) *το άθροισμα των διαγωνίων είναι μεγαλύτερο της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου και μικρότερο της περιμέτρου του τετραπλεύρου.*

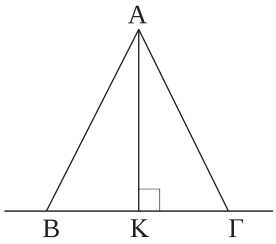
4. *Στο εσωτερικό ορθής γωνίας $x\hat{O}y$ θεωρούμε σημείο Γ και στις πλευρές της Οx, Oy τα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από 2ΟΓ.*

3.13 Κάθετες και πλάγιες



Σχήμα 54

Έστω μια ευθεία ε (σχ.54) και ένα σημείο Α εκτός αυτής. Από το Α φέρουμε προς την ε την κάθετο δ και μια πλάγια ζ. Οι ευθείες δ και ζ τέμνουν την ε στα Κ και Β αντίστοιχα. Το Κ, όπως είναι γνωστό, λέγεται προβολή του Α πάνω στην ε ή ίχνος της καθέτου δ πάνω στην ε. Το Β λέγεται ***ίχνος*** της ευθείας ζ ή του τμήματος ΑΒ πάνω στην ε.



Σχήμα 55

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου, και αντίστροφα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ΑΒ και ΑΓ δύο ίσα πλάγια τμήματα και ΑΚ το κάθετο τμήμα (σχ.55). Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και το ΑΚ ύψος του, επομένως θα είναι και διάμεσος, δηλαδή ΚΒ = ΚΓ.

Αντίστροφα. Έστω ότι ΚΒ = ΚΓ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΑΚ είναι ύψος και διάμεσος, άρα (εφαρμογή §3.12) το τρίγωνο είναι ισοσκελές, δηλαδή ΑΒ = ΑΓ.

ΣΧΟΛΙΟ

Την ιδιότητα (i) του Θεωρήματος ΙΙ, που έχει το κάθετο τμήμα συνήθως εκφράζουμε και ως: η απόσταση ενός σημείου Α από μία ευθεία ε είναι μικρότερη από την απόσταση του Α από τυχόν σημείο της ευθείας.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

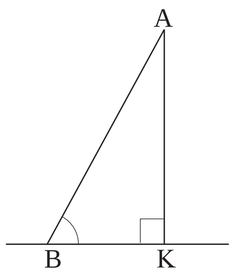
Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια ευθύγραμμα τμήματα τότε:

(i) Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο.

(ii) Αν δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ (σχ.56), η γωνία $\hat{K}$ είναι η μεγαλύτερη ως ορθή. Επομένως η πλευρά ΑΒ είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου και, άρα, ΑΒ > ΑΚ.

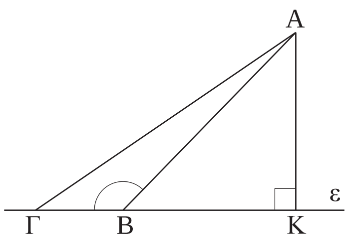


Σχήμα 56

ii) Έστω ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής. Θεωρούμε την κάθετο ΑΚ στην ε και δύο πλάγια τμήματα ΑΒ, ΑΓ, όπου Β, Γ σημεία της ε (σχ.57).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και τα δύο ίχνη Β, Γ των πλάγιων τμημάτων ανήκουν στην ίδια ημιευθεία που ορίζει το σημείο Κ.

Ας υποθέσουμε ότι ΚΓ > ΚΒ (σχ.57). Θα αποδείξουμε ότι ΑΓ > ΑΒ. Αφού το Β είναι μεταξύ των Κ, Γ, η $A\hat{B}\Gamma$ είναι εξωτερική του ορθογώνιου τριγώνου ΚΑΒ, επομένως $A\hat{B}\Gamma > \hat{K} = 1\llcorner$, δηλαδή η $A\hat{B}\Gamma$ είναι αμβλεία. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η πλευρά ΑΓ βρίσκεται απέναντι από την $A\hat{B}\Gamma$, συνεπώς είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή ΑΓ > ΑΒ.



Σχήμα 57

Αντίστροφα. Ας υποθέσουμε ότι ΑΓ > ΑΒ. Αν ήταν ΚΓ = ΚΒ, τότε θα είχαμε ΑΓ = ΑΒ, που είναι άτοπο. Αν ΚΓ < ΚΒ, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο θα είχαμε ότι ΑΓ < ΑΒ, που είναι επίσης άτοπο. Επομένως ΚΓ > ΚΒ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

Αν ΑΒ, ΑΓ πλάγια τμήματα ως προς μια ευθεία ε και ΑΚ το κάθετο τμήμα, τότε:

1. *Συμπληρώστε τις παρακάτω ισοδυναμίες*

i) *ΑΒ = ΑΓ ⇔ ....*

ii) *ΑΒ > ΑΓ ⇔ ....*

2. *Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.*

i) *ΑΒ > ΑΚ* ☐ Σ ☐ Λ

ii) *ΑΒ = ΑΚ* ☐ Σ ☐ Λ

iii) *ΑΒ < ΑΚ* ☐ Σ ☐ Λ

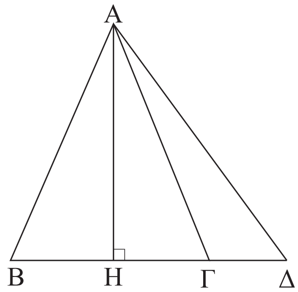
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Στις κάθετες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:*

i) *ΔΕ < ΕΒ,*

ii) *ΔΕ < ΒΓ.*

2. *Στο παρακάτω σχήμα το ΑΗ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ. Να συγκρίνετε τα τμήματα ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ.*



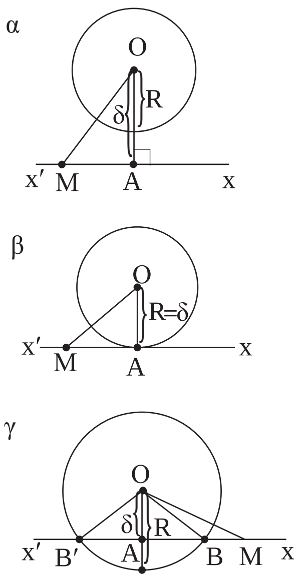
3. *Δίνεται τμήμα ΑΒ, σημείο Ρ της μεσοκαθέτου του και μία ευθεία ε που διέρχεται από το Α.*

i) *Να συγκρίνετε τις αποστάσεις του Ρ από την ευθεία ε και το σημείο Β.*

ii) *Ποια πρέπει να είναι η θέση της ευθείας ε, ώστε οι αποστάσεις αυτές να είναι ίσες;*

Ευθεία και κύκλος

3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου



Σχήμα 58

Θεωρούμε έναν κύκλο (Ο, R) μια ευθεία x′x και την απόσταση δ = ΟΑ του κέντρου Ο από την x′x (σχ.58). Μεταξύ των δ και R ισχύει μία από τις σχέσεις: δ > R, δ = R και δ < R. Θα εξετάσουμε τη γεωμετρική ερμηνεία καθεμίας από τις σχέσεις αυτές.

- Έστω δ > R (σχ.58α). Τότε το Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, οπότε και κάθε άλλο σημείο Μ της ευθείας είναι εξωτερικό, αφού ΟΜ > ΟΑ > R. Επομένως, η x′x δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται ***εξωτερική*** ευθεία του κύκλου.
- Έστω δ = R (σχ.58β). Τότε το Α είναι κοινό σημείο της ευθείας με τον κύκλο, ενώ κάθε άλλο σημείο Μ της x′x είναι εξωτερικό σημείο του (Ο, R), αφού ΟΜ > ΟΑ = R. Επομένως, η x′x έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύ-

κλο και λέγεται ***εφαπτομένη*** του κύκλου στο σημείο Α. Το σημείο Α λέγεται ***σημείο επαφής*** της ευθείας με τον κύκλο. Επίσης, στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία x′x εφάπτεται του κύκλου (Ο, R) στο σημείο Α. Είναι φανερό ότι:

Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

Η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι μοναδική.

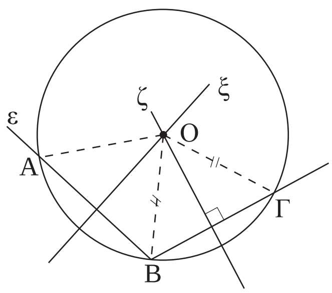
- Έστω $\delta < R$ (σχ.58γ). Τότε το Α είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου. Πάνω στην ημιευθεία Αx θεωρούμε ένα σημείο Μ, ώστε ΑΜ = R. Τότε το Μ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, αφού ΟΜ > ΑΜ = R. Έτσι η ημιευθεία Αx, αφού διέρχεται από ένα εσωτερικό σημείο, το Α, και ένα εξωτερικό, το Μ, είναι φανερό ότι έχει ένα μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο, το Β. Όμοια και η ημιευθεία Αx′ έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, το Β′.

Επομένως, η x′x έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία x′x, λέγεται ***τέμνουσα του κύκλου*** και τα κοινά της σημεία με τον κύκλο λέγονται σημεία ***τομής*** της με τον κύκλο. Επίσης λέμε ότι η ευθεία ***τέμνει*** τον κύκλο.

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε:

- **Αν $\delta > R$, η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.**
- **Αν $\delta = R$, η ευθεία έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο.**
- **Αν $\delta < R$, η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο.**

Με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο αποδεικνύονται και τα αντίστροφα των παραπάνω συμπερασμάτων. Με την ίδια επίσης μέθοδο αποδεικνύεται και το επόμενο θεώρημα.



Σχήμα 59

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

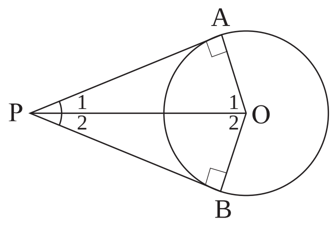
Ας υποθέσουμε ότι μια ευθεία ε και ένας κύκλος (Ο, ρ) έχουν τρία κοινά σημεία, τα Α, Β, Γ (σχ. 59). Επειδή ΟΑ = ΟΒ (= ρ) και ΟΒ = ΟΓ (= ρ), οι μεσοκάθετοι ξ, ζ των ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα, διέρχονται από το Ο. Έτσι από το σημείο Ο έχουμε δύο διαφορετικές κάθετες στην ε, τις ξ, ζ, που είναι άτοπο.

ΣΧΟΛΙΟ

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι τρία οποιαδήποτε σημεία ενός κύκλου δεν είναι συνευθειακά. Στην §4.5 θα δούμε ότι από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένας κύκλος, που είναι και μοναδικός.

3.15 Εφαπτόμενα τμήματα

Έστω ένας κύκλος (O, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο P. Στην §6.7 θα δούμε ότι από το P φέρονται δύο εφαπτόμενες του κύκλου. Αν A, B είναι τα σημεία επαφής αυτών με τον κύκλο (σχ.60), τότε τα τμήματα PA και PB λέγονται ***εφαπτόμενα τμήματα*** του κύκλου από το σημείο P και η ευθεία PO ***διακεντρική ευθεία*** του σημείου P. Ισχύει το εξής θεώρημα:



Σχήμα 60

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Τα τρίγωνα AOP και BOP (σχ.60) έχουν $\hat{A}=\hat{B}=90^\circ$, OP κοινή και OA = OB (= ρ), άρα είναι ίσα, οπότε PA = PB.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν P είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του:

i) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,

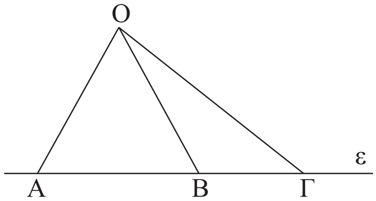
ii) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

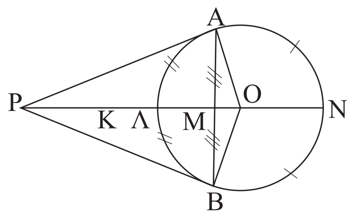
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Πότε μια ευθεία έχει δύο, ένα ή κανένα κοινό σημείο με έναν κύκλο;*

2. *Είναι δυνατόν στο παρακάτω σχήμα να είναι OA = OB = OΓ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.*



3. *Στο παρακάτω σχήμα τα PA, PB είναι εφαπτόμενα τμήματα, η PK διχοτόμος της $A\hat{P}B$, τα Λ, N μέσα των τόξων $\overset{\frown}{A\Lambda B}$, $\overset{\frown}{ANB}$ αντίστοιχα και το M μέσο της χορδής AB. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:*



i) *PA = PB.* ☐ Σ ☐ Λ

ii) *Η PK διέρχεται από το O.* ☐ Σ ☐ Λ

iii) *Η OM διέρχεται από τα P, Λ, N.* ☐ Σ ☐ Λ

iv) *Η προέκταση του ΛM διχοτομεί τις γωνίες $A\hat{P}B$, $A\hat{O}B$ και το τόξο $\overset{\frown}{ANB}$.* ☐ Σ ☐ Λ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Αν έχουμε δύο ομόκεντρους κύκλους, να εξηγήσετε γιατί όλες οι χορδές του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται στο μικρό κύκλο είναι ίσες.*
2. *Δίνεται κύκλος (Ο, ρ), μία διάμετρός του ΑΒ και οι εφαπτόμενες $ε_1$, $ε_2$ του κύκλου στα Α, Β. Αν μια τρίτη εφαπτομένη ε τέμνει τις $ε_1$, $ε_2$ στα Γ, Δ, να αποδείξετε ότι $Γ\hat{O}Δ = 90°$.*
3. *Από εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο,R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Μία τρίτη εφαπτομένη στο σημείο Ε του κύκλου τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ, Δ αντίστοιχα. Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ ως συνάρτηση των τμημάτων ΡΑ και ΓΔ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

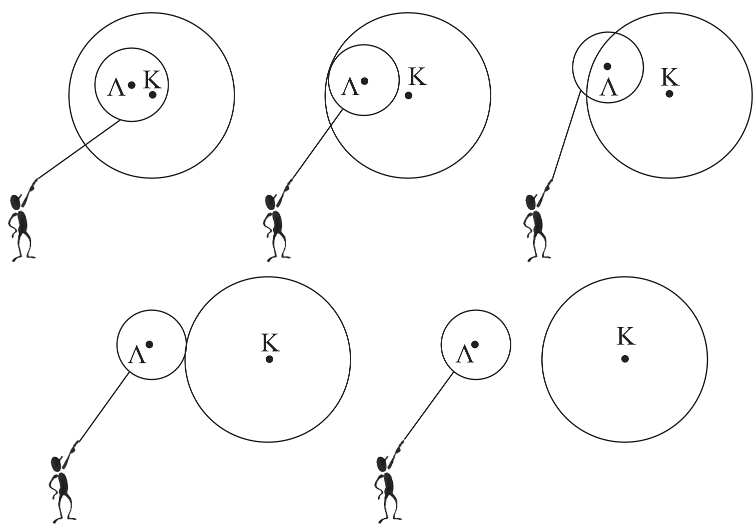
1. *Να αποδείξετε ότι δύο σημεία μίας εφαπτομένης κύκλου, τα οποία ισαπέχουν από το σημείο επαφής, απέχουν ίση απόσταση από τον κύκλο.*
2. *Από σημείο Μ εξωτερικό του κύκλου (Ο, R) φέρουμε τις εφαπτόμενες ΜΑ, ΜΒ του κύκλου. Προεκτείνουμε το ΟΒ κατά ίσο τμήμα ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η γωνία $Α\hat{Μ}Γ$ είναι τριπλάσια της $Β\hat{Μ}Γ$.*
3. *Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου κέντρου Ο, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΟΡ να αποδείξετε ότι $Μ\hat{Α}Ρ = Μ\hat{Β}Ρ$.*

3.16 Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

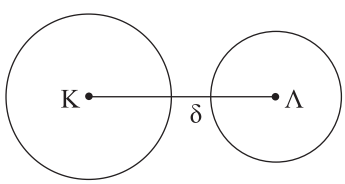
Θεωρούμε δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) με $R \geq ρ$. Οι σχετικές τους θέσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (σχ.61α).

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων λέγεται ***διάκεντρος*** των δύο κύκλων και συμβολίζεται με δ (σχ. 61β).

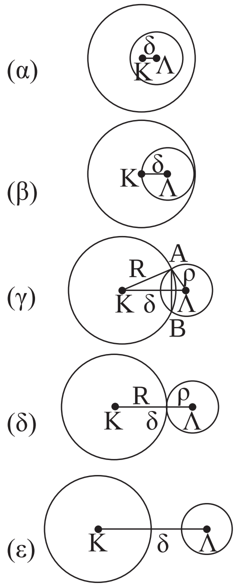
Οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων εξαρτώνται από τη σχέση της διακέντρου με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτίνων τους. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:



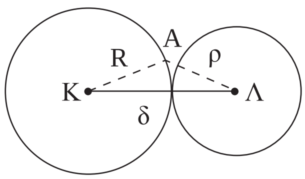
Σχήμα 61α



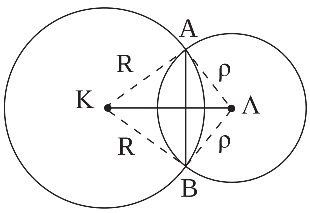
Σχήμα 61β



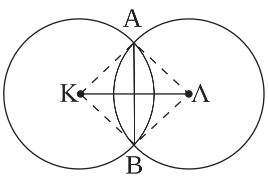
Σχήμα 62



Σχήμα 63



Σχήμα 64



Σχήμα 65

► **Κύκλοι χωρίς κοινά σημεία**

i) Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο **εσωτερικό** του (Κ, R), αν και μόνο αν $\mathbf{\delta < R - \rho}$ (σχ.62α).

ii) Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) βρίσκεται ο ένας στο **εξωτερικό** του άλλου, αν και μόνο αν $\mathbf{\delta > R + \rho}$ (σχ.62ε).

► **Εφαπτόμενοι κύκλοι**

i) Οι κύκλοι **εφάπτονται εσωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (Κ, R), αν και μόνο αν $\mathbf{\delta = R - \rho}$ (σχ.62β).

ii) Οι κύκλοι **εφάπτονται εξωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\mathbf{\delta = R + \rho}$ (σχ.62δ).

Το κοινό σημείο δύο εφαπτόμενων κύκλων λέγεται ***σημείο επαφής*** και είναι σημείο της διακέντρου.

Πράγματι, αν το σημείο επαφής Α (σχ.63) δεν είναι σημείο της διακέντρου, τότε από το τρίγωνο ΑΚΛ έχουμε $ΚΛ < ΚΑ + ΑΛ$, δηλαδή $\delta < R + \rho$, που είναι άτοπο.

► **Τεμνόμενοι κύκλοι**

Οι κύκλοι **τέμνονται**, δηλαδή έχουν **δύο** κοινά σημεία, αν και μόνο αν $\mathbf{R - \rho < \delta < R + \rho}$ (σχ.62γ). Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται ***κοινή χορδή*** των δύο κύκλων. Ισχύει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) του σχ.64 και Α, Β τα σημεία τομής τους. Επειδή $ΚΑ = ΚΒ = R$, το σημείο Κ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ. Όμοια από την $ΛΑ = ΛΒ = \rho$ προκύπτει ότι και το Λ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ. Άρα, η ΚΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής ΑΒ του κύκλου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην περίπτωση που οι τεμνόμενοι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) (σχ.65) είναι ίσοι, δηλαδή έχουν $R = \rho$, τότε και η κοινή χορδή είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.

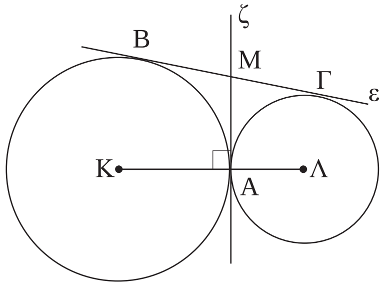
Πράγματι, επειδή $R = \rho$, θα είναι $ΑΚ = ΑΛ$ και $ΒΚ = ΒΛ$. Άρα τα Α και Β είναι σημεία της μεσοκαθέτου του ΚΛ και επομένως η κοινή χορδή ΑΒ είναι μεσοκάθετος της διακέντρου ΚΛ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α (σχ.66). Μία ευθεία ε εφάπτεται και στους δύο κύκλους στα Β, Γ αντίστοιχα, όπως στο σχ.66. Να αποδειχθεί ότι:

i) Η εφαπτομένη ζ του ενός κύκλου στο Α είναι και εφαπτομένη του άλλου.

ii) Η ευθεία ζ διχοτομεί το τμήμα ΒΓ.



Σχήμα 66

Απόδειξη

i) Έστω ότι η ζ εφάπτεται στον κύκλο (Κ) στο Α. Τότε ζ⊥ΚΑ (1).

Επειδή όμως οι κύκλοι εφάπτονται, το Α είναι σημείο της διακέντρου ΚΛ, οπότε από την (1) προκύπτει ότι ζ⊥ΑΛ, επομένως η ευθεία ζ είναι και εφαπτομένη του κύκλου (Λ).

ii) Έστω Μ το σημείο τομής της ζ με την ε. Τότε ΜΑ = ΜΒ, ως εφαπτόμενα τμήματα του (Κ) και ΜΑ = ΜΓ, ως εφαπτόμενα τμήματα του (Λ). Από τις ισότητες αυτές προκύπτει ότι ΜΒ = ΜΓ.

ΣΧΟΛΙΟ

Η ευθεία ε του παραπάνω σχήματος, που εφάπτεται και στους δύο κύκλους και τους αφήνει προς το ίδιο μέρος της λέγεται ***κοινή εξωτερική εφαπτομένη****, ενώ η ευθεία ζ που έχει τους κύκλους στους οποίους εφάπτεται εκατέρωθεν αυτής λέγεται* ***κοινή εσωτερική εφαπτομένη****.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Αν (Κ, R) και (Λ, ρ) είναι δύο κύκλοι που έχουν διαφορετικά κέντρα και R > ρ, ΚΛ = δ, να αντιστοιχίσετε κάθε φράση της πρώτης στήλης με την αντίστοιχη σχέση στη δεύτερη στήλη.*

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. *Ο κύκλος (Λ, ρ) είναι εσωτερικός του (Κ, R).*	1. $\delta > R + \rho$
	2. $\delta = R + \rho$
β. *Ο κύκλος (Λ, ρ) εφάπτεται εσωτερικά του (Κ, R).*	3. $\delta = R - \rho$
γ. *Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) τέμνονται.*	4. $\delta < R - \rho$
	5. $2\delta = R - \rho$
δ. *Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.*	6. $\rho < \delta < R$
ε. *Κάθε κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου.*	7. $2\delta = R\rho$
	8. $R-\rho<\delta<R+\rho$

2. *Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.*

i) *Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής.* ☐ Σ ☐ Λ

ii) *Η κοινή χορδή δύο ίσων τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.* ☐ Σ ☐ Λ

iii) *Το σημείο επαφής δύο εφαπτόμενων κύκλων είναι σημείο της διακέντρου.* ☐ Σ ☐ Λ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να προσδιορισθούν οι σχετικές θέσεις των κύκλων (Κ, ρ) και (Λ, 2ρ) αν*

i) $ΚΛ = \frac{\rho}{2}$, iv) $ΚΛ = 3\rho$,
ii) $ΚΛ = \rho$, v) $ΚΛ = 4\rho$.
iii) $ΚΛ = 2\rho$,

2. *Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και μια ακτίνα του ΟΑ. Γράφουμε κύκλο με διάμετρο ΟΑ. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο κύκλων;*

3. *Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το μέσο του Ο. Γράφουμε τον κύκλο (Α, ΑΟ) και τον κύκλο με διάμετρο ΟΒ. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο κύκλων;*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται κύκλος (Ο, R) και εξωτερικό σημείο του Ρ, ώστε ΟΡ <2R. Γράφουμε τον κύκλο (Ο, 2R). Να αποδείξετε ότι:*
   i) *ο κύκλος (Ο,2R) τέμνει τον κύκλο (Ρ, ΡΟ) σε δύο σημεία Γ και Δ,*
   ii) *τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΓ και ΟΔ τέμνουν τον κύκλο (Ο, R) στα σημεία Α και Β,*
   iii) *τα ΡΑ και ΡΒ εφάπτονται στον (Ο,R).*
2. *Δίνονται δύο κύκλοι* (O_1, R_1) *και* (O_2, R_2) *με* $O_1O_2 > R_1+R_2 > 2R_2$.
   i) *Να αποδείξετε ότι ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου.*
   ii) *Εστω ότι η διάκεντρος τέμνει τον* (O_1) *στα σημεία Μ, Μ′ και τον* (O_2) *στα σημεία Ν, Ν′ αντίστοιχα με τα Μ, Ν μεταξύ των Μ′, Ν′. Να αποδείξετε ότι* $MN \leq AB \leq M'N'$, *όπου Α, Β τυχαία σημεία των κύκλων* (O_1) *και* (O_2) *αντίστοιχα.*
3. *Ένας κύκλος κέντρου Κ είναι εξωτερικός ενός άλλου κύκλου κέντρου Λ. Μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη και μια κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων τέμνονται στο Ρ. Να αποδείξετε ότι* $K\hat{P}\Lambda = 90°$.
4. *Μπορείτε να ζωγραφίσετε 12 κύκλους, ώστε ο καθένας από αυτούς να εφάπτεται σε 5 ακριβώς από τους δοσμένους κύκλους;*

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Οι γεωμετρικές κατασκευές

Τα πρώτα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών απαντώνται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Οι μαθηματικές προτάσεις διαιρούνται σε «θεωρήματα», όπου ζητείται να αποδειχθεί ότι ένα αντικείμενο έχει μια ορισμένη ιδιότητα και σε «προβλήματα», όπου ζητείται να κατασκευασθεί κάποιο αντικείμενο που να έχει ορισμένη ιδιότητα. Στα «Στοιχεία» οι κατασκευές στηρίζονται στα τρία πρώτα αιτήματα του Βιβλίου Ι (βλ. Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας).

Ως τα τέλη του 4ου αι. πρέπει να είχε εδραιωθεί η πεποίθηση ότι ορισμένα προβλήματα, όπως π.χ. το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου δεν είναι επιλύσιμο με τα επιτρεπτά τότε κατασκευαστικά εργαλεία. Έτσι εμφανίζεται η πρώτη ιεράρχηση των προβλημάτων με βάση τα επιτρεπτά κατασκευαστικά εργαλεία επιλυσιμότητάς τους. Ως επίπεδα προβλήματα θεωρούνται αυτά που μπορούν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη, στερεά προβλήματα είναι εκείνα που λύνονται με τη βοήθεια κωνικών τομών, και γραμμικά προβλήματα είναι όλα τα υπόλοιπα. Ο Πάππος μάλιστα θεωρούσε σοβαρό λάθος τη λύση ενός επίπεδου προβλήματος με τη βοήθεια κωνικών τομών.

Γεωμετρικές κατασκευές

Στην §2.7 αναφέραμε την έννοια της γεωμετρικής κατασκευής. Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος κατασκευής ακολουθεί τα εξής στάδια: την **κατασκευή** (ή **σύνθεση**), την **απόδειξη** και τη **διερεύνηση**.

- Η **κατασκευή** είναι όλες εκείνες οι ενέργειες που οδηγούν στη σχεδίαση του σχήματος.
- Η **απόδειξη** είναι η επιβεβαίωση ότι το σχήμα που κατασκευάστηκε έχει ως στοιχεία τα δοσμένα.
- Η **διερεύνηση** είναι η αναγραφή όλων εκείνων των συνθηκών, που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα, ώστε το πρόβλημα να έχει λύση. Στη διερεύνηση εξετάζεται επίσης και το πλήθος των λύσεων του προβλήματος.

ΣΧΟΛΙΟ

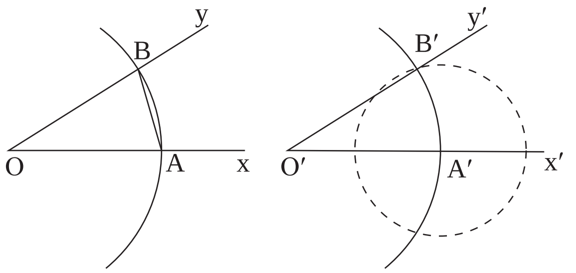
Όταν η κατασκευή του ζητούμενου σχήματος δεν είναι άμεσα φανερή, τότε, πριν από την κατασκευή κάνουμε, ως βοηθητικό βήμα, και τη λεγόμενη ***ανάλυση****. Σε προβλήματα επόμενων κεφαλαίων θα χρησιμοποιήσουμε και την ανάλυση.*

3.17 Απλές γεωμετρικές κατασκευές

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε ορισμένες γεωμετρικές κατασκευές με τις οποίες κατοχυρώνουμε κατασκευαστικά στοιχειώδη γεωμετρικά αντικείμενα και διαδικασίες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και η ημιευθεία $O'x'$. Να κατασκευασθεί γωνία ίση με τη $x\hat{O}y$ η οποία έχει ως μια πλευρά, την $O'x'$ και κορυφή το O'.



Σχήμα 67

Κατασκευή: Καθιστούμε τη γωνία $x\hat{O}y$ (σχ.67) επίκεντρη γράφοντας κύκλο με κέντρο O και τυχαία ακτίνα ρ. Έστω $\overset{\frown}{AB}$ το αντίστοιχο τόξο της. Με κέντρο O′ και ακτίνα την ίδια, γράφουμε άλλον κύκλο που τέμνει την O′x′ στο A′. Ακολούθως γράφουμε τον κύκλο (A′, AB) του οποίου ένα κοινό σημείο με τον (O′, ρ) είναι το B′. Φέρουμε την ημιευθεία O′B′. Η γωνία $x'\hat{O}'B'$, δηλαδή η $x'\hat{O}'y'$ είναι η ζητούμενη.

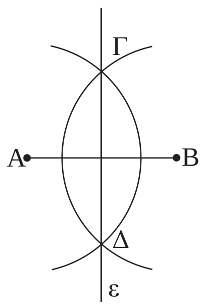
Απόδειξη: Οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}'y'$ είναι ίσες, γιατί είναι επίκεντρες στους ίσους κύκλους (O, ρ), (O′, ρ) και βαίνουν στα ίσα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{A'B'}$ αντίστοιχα. (§2.18)

Διερεύνηση: Για να έχει το πρόβλημα λύση, θα πρέπει οι κύκλοι (O′, ρ) και (A′, AB) να τέμνονται. Αυτό όμως συμβαίνει πάντοτε, επειδή για τη διάκεντρό τους $O'A' = \rho$ ισχύει: $\rho - AB < \rho < \rho + AB$ (λόγω της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο OAB). Μια δεύτερη λύση του προβλήματος αντιστοιχεί στο δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων (O′, ρ) και (A′, AB).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να κατασκευασθεί η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος.

Κατασκευή: Έστω τμήμα AB (σχ.68). Με κέντρα τα άκρα του A, B και ακτίνα $\rho > \frac{AB}{2}$ γράφουμε δύο ίσους κύκλους. Αν Γ, Δ είναι τα κοινά σημεία των κύκλων αυτών, η ευθεία ε που ορίζουν είναι η ζητούμενη.



Σχήμα 68

Απόδειξη: Η ευθεία ε είναι κοινή χορδή ίσων κύκλων, επομένως είναι κάθετη στη διάκεντρο AB (§3.16).

Διερεύνηση: Για να έχει το πρόβλημα λύση θα πρέπει οι κύκλοι (A, ρ) και (B, ρ) να τέμνονται. Αυτό όμως ισχύει, αφού η διάκεντρός τους AB ικανοποιεί την $\rho - \rho < AB < \rho + \rho$.

Παρατήρηση: *Με την παραπάνω κατασκευή βρίσκουμε και το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος.*

Αρκετές φορές τα παραπάνω βήματα: κατασκευή, απόδειξη, διερεύνηση μπορεί να παρουσιάζονται ενοποιημένα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

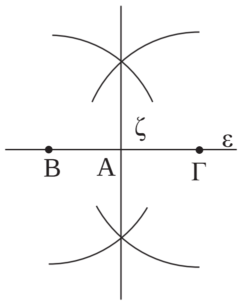
Δίνεται ευθεία ε και σημείο Α. Να κατασκευασθεί ευθεία που να διέρχεται από το Α κάθετη στην ε, όταν:

i) το Α είναι σημείο της ευθείας ε,

ii) το Α δεν είναι σημείο της ε.

Λύση

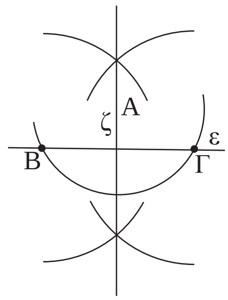
i) Με κέντρο το Α (σχ.69) και τυχαία ακτίνα γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την ε στα σημεία Β και Γ. Έτσι το Α έγινε μέσο του τμήματος ΒΓ και επομένως η ζητούμενη κάθετος είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ (προηγούμενη κατασκευή).



Σχήμα 69

ii) Με κέντρο το Α (σχ.70) και κατάλληλη ακτίνα γράφουμε κύκλο που τέμνει την ευθεία ε στα Β και Γ. Η μεσοκάθετος ζ του τμήματος ΒΓ, που κατασκευάζεται όπως προηγουμένως, είναι η ζητούμενη κάθετος.

Πράγματι, επειδή ΑΒ = ΑΓ, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, η μεσοκάθετος της χορδής ΒΓ διέρχεται από το Α.



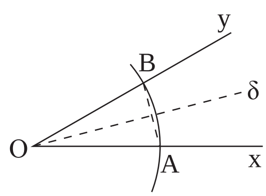
Σχήμα 70

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να κατασκευασθεί η διχοτόμος μιας γωνίας.

Λύση

Έστω γωνία $x\hat{O}y$ (σχ.71). Με κέντρο το Ο και τυχαία ακτίνα, γράφουμε κύκλο, που τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα Α, Β αντίστοιχα. Φέρουμε τη μεσοκάθετο δ (Πρόβλημα 2) της χορδής ΑΒ που είναι και η ζητούμενη διχοτόμος.



Σχήμα 71

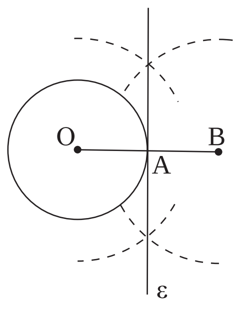
Πράγματι η ευθεία δ, ως μεσοκάθετος χορδής κύκλου, διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και διχοτομεί το αντίστοιχο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ της γωνίας $x\hat{O}y$ (§3.6). Επομένως είναι διχοτόμος της.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να κατασκευασθεί η εφαπτομένη ενός κύκλου (Ο, ρ) σε ένα σημείο του Α.

Λύση

Στην προέκταση της ακτίνας ΟΑ (σχ.72) παίρνουμε το σημείο Β, ώστε να είναι ΑΒ = ΟΑ. Στη συνέχεια φέρουμε τη μεσοκάθετο του ΟΒ που είναι η εφαπτομένη του κύκλου, γιατί είναι κάθετη στην ακτίνα στο άκρο της Α.



Σχήμα 72

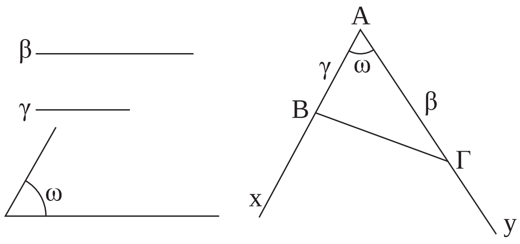
Σημείωση: *Για την κατασκευή των εφαπτομένων από σημείο εκτός κύκλου βλέπε σελ. 142.*

3.18 Βασικές κατασκευές τριγώνων

Σε αντιστοιχία με τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων (§3.2-3.4) έχουμε τις επόμενες γεωμετρικές κατασκευές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου δίνονται οι πλευρές ΑΒ = γ, ΑΓ = β και η περιεχόμενη γωνία Â = ω.



Σχήμα 73

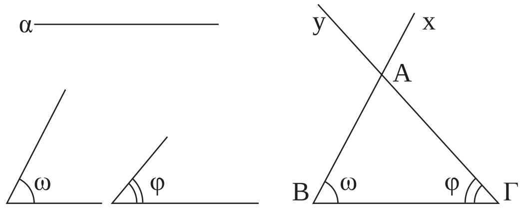
Λύση

Με πλευρά μια ημιευθεία Αx κατασκευάζουμε (§3.17) γωνία xÂy = ω (σχ.73). Στις πλευρές Αx, Αy παίρνουμε, με το διαβήτη, τα σημεία Β, Γ αντίστοιχα, ώστε ΑΒ = γ και ΑΓ = β. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

Πράγματι, από την κατασκευή, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΓ = γ, ΑΓ = β και Â = ω. Με τον περιορισμό 0° < ω < 180° (§3.10 Πορίσματα (ii)) το πρόβλημα έχει πάντα μοναδική λύση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου δίνεται η πλευρά ΒΓ = α και οι προσκείμενες σε αυτή γωνίες B̂ = ω και Γ̂ = φ.



Σχήμα 74

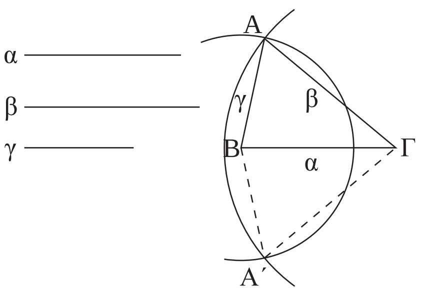
Λύση

Θεωρούμε τμήμα ΒΓ = α και με κορυφές τα Β, Γ (σχ.74) κατασκευάζουμε, προς το ίδιο μέρος της ΒΓ, γωνίες ΓB̂x = ω και ΒΓ̂y = φ. Οι πλευρές Βx, Γy των γωνιών αυτών τέμνονται στο σημείο Α. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

Πράγματι, από την κατασκευή, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΒΓ = α, B̂ = ω και Γ̂ = φ. Με τον περιορισμό 0° < ω + φ < 180° (§3.10 Πορίσματα (ii)) το πρόβλημα έχει πάντα μοναδική λύση. Στο επόμενο κεφάλαιο (§4.2) θα δούμε ότι ο περιορισμός ω + φ < 180° εξασφαλίζει την τομή των ημιευθειών Βx και Γy.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου δίνονται οι πλευρές ΒΓ = α, ΑΓ = β και ΑΒ = γ.



Σχήμα 75

Λύση

Θεωρούμε τμήμα ΒΓ = α (σχ.75) και γράφουμε τους κύκλους (Β, γ) και (Γ, β). Αν οι κύκλοι τέμνονται και Α είναι το ένα από τα σημεία τομής τους, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

Πράγματι το τρίγωνο ΑΒΓ, από την κατασκευή, έχει ΒΓ = α, ΑΒ = γ ως ακτίνα του (Β, γ) και ΑΓ = β ως ακτίνα του (Γ, β).

Για να έχει λύση το πρόβλημα, πρέπει οι κύκλοι (Β, γ) και (Γ, β) να τέμνονται, το οποίο συμβαίνει (§3.16) όταν $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ ($\beta > \gamma$). Αν $Α'$ είναι το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων (Β, γ) και (Γ, β), το τρίγωνο $Α'ΒΓ$ είναι ίσο με το ΑΒΓ, επομένως δεν αποτελεί νέα λύση του προβλήματος, αφού τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από την παραπάνω κατασκευή προκύπτει ότι τρία τμήματα α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου αν και μόνον αν ισχύει $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ ($\beta \geq \gamma$). Αν υποθέσουμε ότι $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$, η τελευταία διπλή ισότητα είναι ισοδύναμη με την $\alpha < \beta + \gamma$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Πώς θα χωρισθεί με κανόνα και διαβήτη ένα ευθύγραμμο τμήμα σε τέσσερα ίσα τμήματα;*

2. *Πώς θα βρεθεί με κανόνα και διαβήτη το μέσο ενός τόξου δοσμένου κύκλου;*

3. *Πώς θα βρεθεί το κέντρο ενός κύκλου που έχει γραφεί με ένα νόμισμα;*

4. *Τα τμήματα α, β, γ με $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$ είναι πλευρές τριγώνου όταν:*

α. $\alpha = \beta + \gamma$ *β.* $\alpha > \beta + \gamma$

γ. $\alpha < \beta + \gamma$ *δ.* $\alpha < 2(\beta + \gamma)$

ε. Τίποτε από τα προηγούμενα.

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να κατασκευάσετε γεωμετρικά γωνία 45°.*

2. *Να χωρίσετε δοσμένη γωνία σε τέσσερις ίσες γωνίες.*

3. *Να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά γνωστό τμήμα α.*

4. *Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο του οποίου δίνονται η βάση α και το αντίστοιχο σε αυτήν ύψος υ.*

5. *Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$, όταν δίνονται:*

i) $ΑΒ = \gamma$ *και* $ΑΓ = \beta$,

ii) $ΑΒ = \gamma$ *και* $ΒΓ = \alpha$,

όπου α, β, γ γνωστά τμήματα.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Έστω τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' τέτοια, ώστε* $ΑΓ = Α'Γ'$, $\hat{Γ} = \hat{Γ}'$ *και* $\hat{B} + \hat{B}' = 2\llcorner$.

i) Να αποδείξετε ότι $ΑΒ = Α'Β'$,

ii) Διατυπώστε λεκτικά την άσκηση αυτή.

2. *Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και με πλευρές τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ κατασκευάζουμε εξωτερικά του ΑΒΓ τρία ισόπλευρα τρίγωνα Α'ΒΓ, ΑΒ'Γ και ΑΒΓ'. Να αποδείξετε ότι* $ΑΑ' = ΒΒ' = ΓΓ'$.

3. *Αν ΟΚ, ΟΛ είναι αντίστοιχα τα αποστήματα των χορδών ΑΒ, ΓΔ κύκλου (Ο, R), να αποδείξετε ότι* $ΑΒ < ΓΔ$, *αν και μόνον αν* $ΟΚ > ΟΛ$.

4. *Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα, ώστε* $ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ$. *Αν Κ, Λ, Μ τα σημεία τομής των ΑΕ, ΓΔ και ΒΖ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.*

5. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με* $\hat{B} < 1\llcorner$ *και* $ΑΓ = 2ΑΒ$. *Να αποδείξετε ότι* $\hat{Γ} < \frac{\hat{A}}{2}$.

6. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με* $ΑΒ = \frac{ΒΓ}{2}$ *και* $\hat{Γ} = \frac{\hat{B}}{2}$. *Να αποδείξετε ότι* $\hat{A} = 1\llcorner$.

7. *Να αποδείξετε ότι δύο τρίγωνα τα οποία έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες διαμέσους που περιέχονται στις πλευρές αυτές ίσες μία προς μία είναι ίσα.*

8. *Δίνεται μια γωνία $x\hat{O}y$ και δύο εσωτερικά της σημεία Α και Β. Έστω Α' το συμμετρικό του Α ως προς την Οx και Β' το συμμετρικό του Β ως προς την Οy. Αν Μ, Ν είναι τυχαία σημεία των Οx, Οy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι*

$ΑΜ + ΜΝ + ΝΒ = Α'Μ + ΜΝ + ΝΒ'$.

Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής να βρείτε τις θέσεις των Μ, Ν, για τις οποίες το άθροισμα $ΑΜ + ΜΝ + ΝΒ$ *είναι το μικρότερο δυνατό.*

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Τα τρίγωνα ταξινομούνται σε
- **σκαληνά, ισοσκελή** και **ισόπλευρα**, ως προς τις πλευρές τους.
- **οξυγώνια, ορθογώνια, αμβλυγώνια**, ως προς τις γωνίες τους.

Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου λέγονται **κύρια** στοιχεία του, ενώ οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη του λέγονται **δευτερεύοντα** στοιχεία.

Δύο **τρίγωνα** είναι **ίσα** όταν έχουν:
- Δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ).
- Μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΓΠΓ).
- Και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΠΠΠ).

Ειδικότερα δύο **ορθογώνια τρίγωνα** είναι **ίσα** όταν έχουν:
- Δύο οποιεσδήποτε ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
- Μια πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία αντίστοιχα, ίσες μία προς μία.

Στο **ισοσκελές** τρίγωνο:
- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.
- Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος και διχοτόμος.
- Το ύψος, που αντιστοιχεί στη βάση, είναι διχοτόμος και διάμεσος.

Στον **κύκλο**:
- Αν δύο τόξα είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες και αντίστροφα.
- Δύο χορδές είναι ίσες, αν και μόνον αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.
- Ο φορέας του αποστήματος μιας χορδής:
  – διέρχεται από το κέντρο του κύκλου,
  – είναι μεσοκάθετος της χορδής,
  – διχοτομεί το αντίστοιχο τόξο της χορδής.

Βασικοί **γεωμετρικοί τόποι** είναι: ο **κύκλος**, η **μεσοκάθετος** ευθύγραμμου τμήματος και η **διχοτόμος** γωνίας.
- Η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, που ισαπέχουν από τα άκρα του.
- Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων της γωνίας, που ισαπέχουν από τις πλευρές της.

Δύο σχήματα Σ, Σ' λέγονται **συμμετρικά** ως προς ένα σημείο Ο ή μια ευθεία ε, όταν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ, ως προς το Ο ή την ε και αντίστροφα.

Ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο:
- Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.
- Απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες.
- Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

Βασική συνέπεια:
- Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, τότε θα είναι και $\beta = \gamma$.
- Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της βάσης ΒΓ. Αν η ΑΔ είναι διχοτόμος και διάμεσος ή διχοτόμος και ύψος ή διάμεσος και ύψος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

ΤΡΙΓΩΝΑ

Είδη - Στοιχεία

Κριτήρια Ισότητας:
- ΠΓΠ
- ΓΠΓ
- ΠΠΠ

Ιδιότητες:
- ισοσκελών τριγώνων
- μεσοκαθέτου
- χορδών - τόξων

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Σχέση χορδών και αποστημάτων

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι:
- κύκλος
- μεσοκάθετος
- διχοτόμος

Συμμετρία ως προς κέντρο και άξονα

Ανισοτικές σχέσεις - Κάθετες και πλάγιες

Σχετικές θέσεις:
- ευθείας και κύκλου
- δύο κύκλων

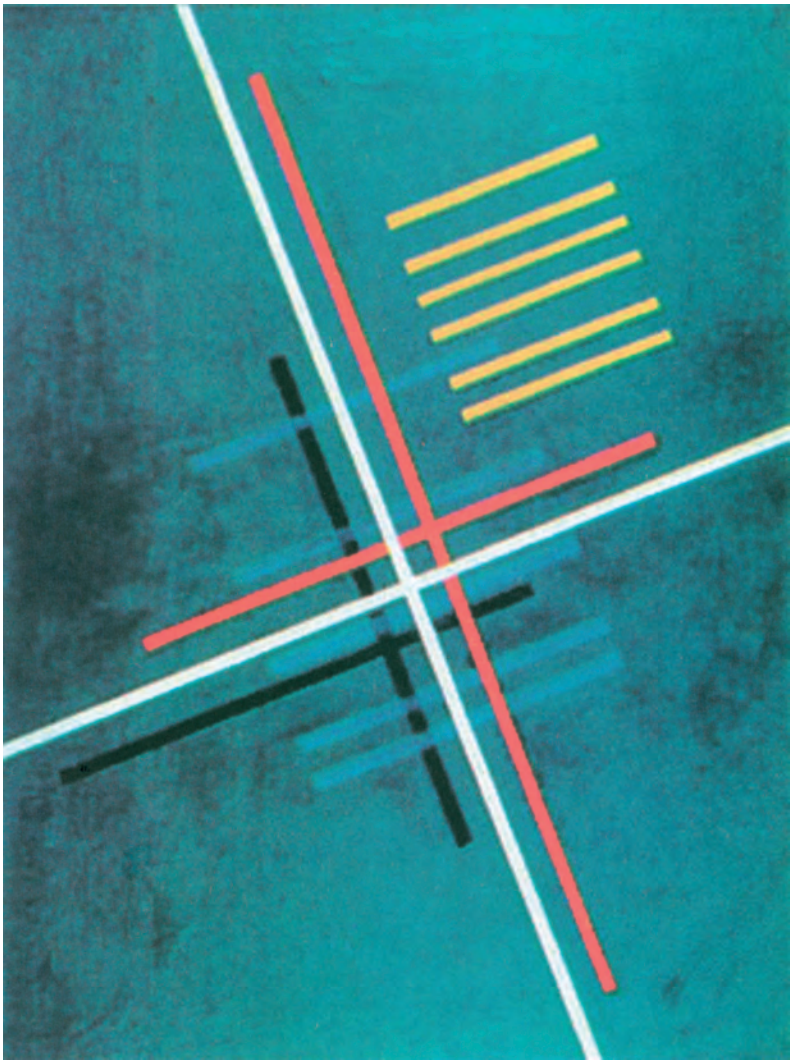
Απλές γεωμετρικές κατασκευές - Βασικές κατασκευές τριγώνων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

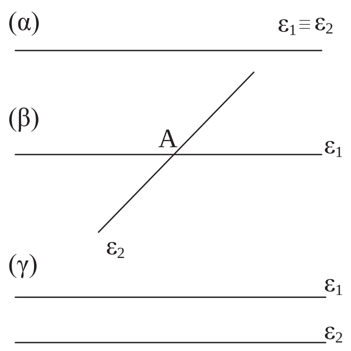
ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις παράλληλες ευθείες. Αρχικά, με βάση τις γωνίες που σχηματίζουν δύο παράλληλες και μία τέμνουσα θα κατασκευάσουμε από σημείο εκτός ευθείας μία παράλληλη προς αυτή.

Στη συνέχεια, θα δεχθούμε ως αξίωμα το αίτημα παραλληλίας, που είναι ισοδύναμο με το Ευκλείδειο αίτημα και θα μελετήσουμε τις συνέπειές του στα τρίγωνα.



Lázló Moholy-Nagy (Ούγγρος, 1895-1946), «Χρώμα -δικτύωμα no.1» 1922.



Σχήμα 1

4.1 Εισαγωγή

Όπως είδαμε στην §2.3, δύο **διαφορετικές** ευθείες μπορεί να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο ή να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.

Επομένως, οι σχετικές θέσεις δυο ευθειών ε_1 και ε_2, οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, είναι οι παρακάτω:

i) ταυτίζονται (σχ.1α),

ii) τέμνονται (σχ.1β),

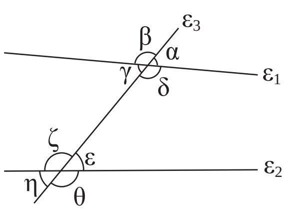
iii) δεν τέμνονται (σχ.1γ).

Στην τρίτη περίπτωση οι ευθείες ε_1 και ε_2 λέγονται ***παράλληλες***, ώστε:

Δυο ευθείες ε_1 και ε_2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται παράλληλες ευθείες.

Για να δηλώσουμε ότι οι ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες, γράφουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

4.2 Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα



Σχήμα 2

Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 του επιπέδου, οι οποίες τέμνονται από τρίτη ευθεία ε_3. Παρατηρούμε ότι σχηματίζονται οκτώ γωνίες.

Οι γωνίες γ, δ, ε, ζ που βρίσκονται μεταξύ των ε_1, ε_2 λέγονται ***“εντός”***, ενώ οι γωνίες α, β, η, θ λέγονται ***“εκτός”***. Δύο γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας ε_3 λέγονται ***“επί τα αυτά μέρη”***, ενώ δύο γωνίες που βρίσκονται εκατέρωθεν της ε_3 λέγονται ***“εναλλάξ”***.

Έτσι, με συνδυασμό και των δύο χαρακτηρισμών, οι γωνίες ε και γ λέγονται ***εντός εναλλάξ***, οι γωνίες ε και α λέγονται ***εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη***, ενώ οι γωνίες ε και δ λέγονται ***εντός και επί τα αυτά μέρη***.

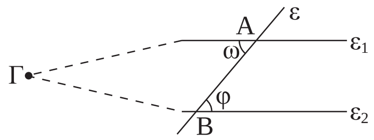
Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γωνίες, θα αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα, που εξασφαλίζει την ύπαρξη παράλληλων ευθειών.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι ω = φ. Αν οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνονται σε σημείο Γ,



Σχήμα 3

η εξωτερική γωνία φ του τριγώνου ΑΒΓ θα είναι ίση με την απέναντι εσωτερική γωνία ω, που είναι άτοπο. (§3.10)

Άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

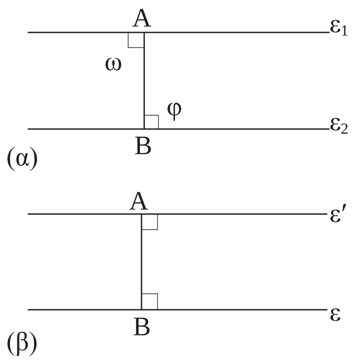
ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή δύο εντός και επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές, τότε είναι παράλληλες.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 4

Πράγματι οι γωνίες ω και φ (σχ.4α) είναι ορθές, οπότε $\omega = \varphi$. Άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Θα εξετάσουμε τώρα αν από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε παράλληλες ευθείες προς αυτή και πόσες. Έστω λοιπόν, ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής (σχ.4β). Φέρουμε την $AB \perp \varepsilon$ και ονομάζουμε ε′ την ευθεία που είναι κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α. Τότε $\varepsilon' // \varepsilon$ (αφού και οι δύο είναι κάθετες στην ΑΒ).

Έτσι λοιπόν **υπάρχει** ευθεία ε′ που διέρχεται από ένα σημείο Α που δεν ανήκει στην ε και είναι παράλληλη προς την ευθεία ε. Δεχόμαστε ως αξίωμα ότι η ευθεία αυτή είναι **μοναδική**, δηλαδή:

Αίτημα παραλληλίας

Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.

ΣΧΟΛΙΟ

Το παραπάνω αξίωμα είναι ισοδύναμο με το $5^{ο}$ αίτημα των "Στοιχείων" του Ευκλείδη (Ευκλείδειο αίτημα).

Το Ευκλείδειο αίτημα ή κάποιο ισοδύναμό του καθορίζει τη φύση ολόκληρης της Γεωμετρίας και αποτελεί βάση για τα περισσότερα θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

(βλ. Ιστορικό σημείωμα, σελ. 96)

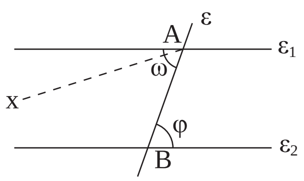
Ιδιότητες παράλληλων ευθειών

Άμεσες συνέπειες του αιτήματος παραλληλίας είναι οι παρακάτω προτάσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ Ι

Αν δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 5

Έστω ότι $ε_1//ε_2$ και ε μια τέμνουσα (σχ.5). Θα αποδείξουμε π.χ. ότι ω = φ. Αν οι γωνίες ω και φ δεν είναι ίσες, φέρουμε την Αx ώστε οι γωνίες $x\hat{A}B$ και φ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ε και να είναι ίσες. Τότε $Ax//ε_2$ γιατί τεμνόμενες από την ΑΒ σχηματίζουν δύο εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες. Κατά συνέπεια υπάρχουν δύο παράλληλες από το Α προς την $ε_2$, που είναι άτοπο. Άρα ω = φ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν

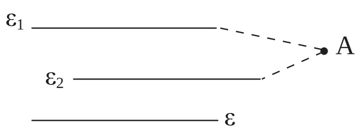
i) τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες,

ii) τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

ΠΡΟΤΑΣΗ ΙΙ

Αν δύο διαφορετικές ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή αν $ε_1//ε$ και $ε_2//ε$, τότε $ε_1//ε_2$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



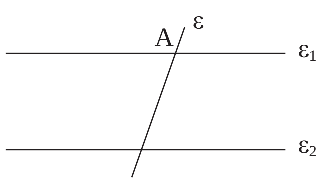
Σχήμα 6

Αν οι $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονταν σε σημείο Α, θα είχαμε από το Α δύο παράλληλες προς την ε, που είναι άτοπο. Άρα $ε_1//ε_2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ ΙΙΙ

Αν δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ε θα τέμνει και την άλλη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 7

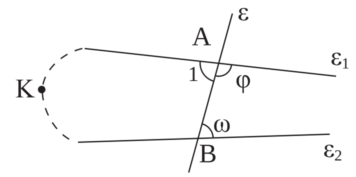
Υποθέτουμε ότι η ε τέμνει την $ε_1$ στο Α. Αν η ε δεν έτεμνε την $ε_2$, θα ήταν $ε//ε_2$ και έτσι θα είχαμε από το Α δύο παράλληλες προς την $ε_2$, πράγμα αδύνατο. Άρα η ε τέμνει την $ε_2$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.

ΠΡΟΤΑΣΗ IV

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.



Σχήμα 8

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι η ε τέμνει τις $ε_1$, $ε_2$ στα Α και Β (σχ.8) αντίστοιχα και ότι $φ + ω \neq 2L$. Τότε οι $ε_1$ και $ε_2$ δεν είναι παράλληλες, αφού $φ + ω \neq 2L$ (Πόρισμα σελ. 82). Έστω ότι οι $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται σε σημείο Κ, προς το μέρος της τέμνουσας, που δεν περιέχει τις γωνίες ω και φ. Τότε, όμως, η εξωτερική γωνία ω του τριγώνου ΑΚΒ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{A}_1$, δηλαδή $ω > \hat{A}_1 = 2L - φ$ ή $ω + φ > 2L$, που είναι άτοπο. Άρα οι $ε_1$, $ε_2$ τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες ω και φ.

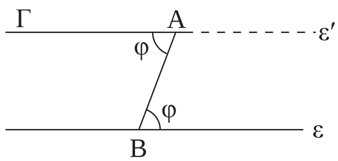
ΣΧΟΛΙΟ

*Η πρόταση IV αποτελεί **βασικό κριτήριο** με το οποίο εξετάζουμε αν δύο ευθείες τέμνονται.*

ΠΟΡΙΣΜΑ

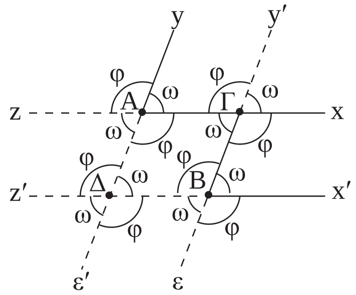
Η κατασκευή τριγώνου με δοσμένη μία πλευρά και τις δύο προσκείμενες σε αυτή γωνίες έχει λύση, αν και μόνο αν το άθροισμα των δύο γωνιών είναι μικρότερο των δύο ορθών. (βλέπε §3.18 - Πρόβλημα 2)

4.3 Κατασκευή παράλληλης ευθείας

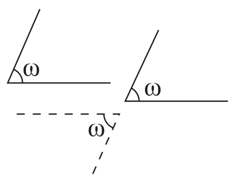


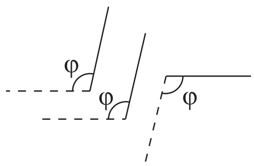
Σχήμα 9

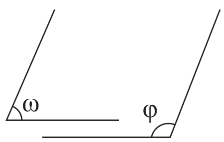
Είδαμε παραπάνω ότι υπάρχει ευθεία ε′, η οποία διέρχεται από ένα σημείο Α και είναι παράλληλη προς γνωστή ευθεία ε. Για την κατασκευή της ε′ φέρουμε από το Α ένα πλάγιο τμήμα ΑΒ προς την ε και ονομάζουμε φ την οξεία γωνία που σχηματίζει το ΑΒ με την ε. Μεταφέρουμε τη γωνία φ (§2.6) ώστε να έχει κορυφή το Α, η μια πλευρά της να είναι η ΑΒ και η άλλη πλευρά της ΑΓ να βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει η γωνία φ. Επειδή $Γ\hat{A}B = φ$ έχουμε ΑΓ//ε, αφού τεμνόμενες από την ΑΒ, σχηματίζουν δύο εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες. Έτσι η ευθεία ΑΓ είναι η ζητούμενη ευθεία ε′.



Σχήμα 10


Σχήμα 11


Σχήμα 12


Σχήμα 13

4.4 Γωνίες με πλευρές παράλληλες

Ας θεωρήσουμε δύο γωνίες $x\hat{A}y$ και $x'\hat{B}y'$ με $Ax//Bx'$ και $Ay//By'$, δηλαδή δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους, μία προς μία παράλληλες. Αν προεκτείνουμε τις Bx' και By' θα τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Έτσι όλες οι γωνίες του σχήματος 10 λόγω των παραλλήλων θα είναι ίσες με ω ή φ.

Παρατηρούμε ότι:

- Αν και οι **δύο γωνίες** είναι **οξείες** (σχ.11), είναι ίσες.
- Αν και οι **δύο γωνίες** είναι **αμβλείες** (σχ.12), είναι ίσες.
- Αν η μία γωνία είναι **οξεία** και η άλλη **αμβλεία** (σχ.13), είναι παραπληρωματικές.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία, είναι ίσες αν είναι και οι δύο οξείες ή αμβλείες, ενώ είναι παραπληρωματικές αν η μία γωνία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

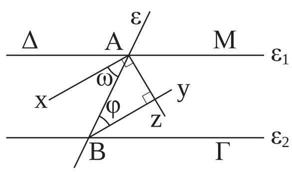
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω ε_1 και ε_2 δύο παράλληλες που τέμνονται από ευθεία ε.

Να αποδειχθεί ότι

i) Οι διχοτόμοι δύο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες.

ii) Οι διχοτόμοι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι κάθετες.



Σχήμα 14

Απόδειξη

i) Έστω Ax, By οι διχοτόμοι των γωνιών $\Delta\hat{A}B$ και $A\hat{B}\Gamma$ αντίστοιχα.

Τότε $\omega = \dfrac{\Delta\hat{A}B}{2}$ και $\varphi = \dfrac{A\hat{B}\Gamma}{2}$. Αλλά $\Delta\hat{A}B = A\hat{B}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ω = φ. Οι ω και φ όμως είναι εντός εναλλάξ γωνίες των ευθειών Ax και By με τέμνουσα την ΑΒ. Άρα $Ax//By$.

ii) Αν Az διχοτόμος της $M\hat{A}B$, τότε $Az \perp Ax$ (ως διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών). Αφού $Ax//By$, θα είναι και $Az \perp By$.

4.5 Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

Στην παράγραφο αυτή χρησιμοποιούμε το Ευκλείδειο αίτημα για να μελετήσουμε τους κύκλους που σχετίζονται με ένα τρίγωνο.

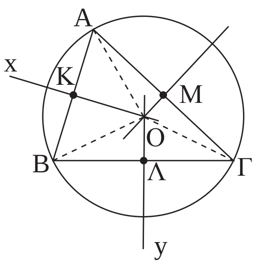
► Ο περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε τρίγωνο υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του. Ο κύκλος αυτός λέγεται ***περιγεγραμμένος*** κύκλος του τριγώνου και επιπλέον αποδεικνύεται ότι το κέντρο του είναι ένα σημείο στο οποίο συντρέχουν και οι τρεις μεσοκάθετοι του τριγώνου και λέγεται ***περίκεντρο***.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 15

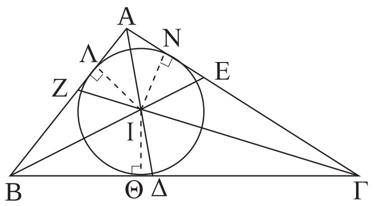
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Κ, Λ, Μ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Οι μεσοκάθετοι Κx και Λy των ΑΒ, ΒΓ θα τέμνονται σε σημείο Ο, αφού τέμνονται οι κάθετες ευθείες τους ΑΒ και ΒΓ. Το Ο ισαπέχει από τις κορυφές Α και Β αφού ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς ΑΒ, δηλαδή ΟΑ = ΟΒ. Επίσης ΟΒ = ΟΓ, αφού το Ο ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς ΒΓ. Επομένως ισχύει ότι ΟΑ = ΟΓ, οπότε το Ο θα ανήκει και στη μεσοκάθετο της ΑΓ. Άρα, ο κύκλος (Ο, ΟΑ) θα διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ και είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου.

► Ο εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

Ένας άλλος σημαντικός κύκλος βρίσκεται στο εσωτερικό τριγώνου και εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε τρίγωνο υπάρχει κύκλος με την ιδιότητα αυτή. Ο κύκλος αυτός λέγεται ***εγγεγραμμένος*** κύκλος του τριγώνου και το κέντρο του, το οποίο λέγεται ***έγκεντρο***, θα είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του τριγώνου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.



Σχήμα 16

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και οι διχοτόμοι ΒΕ και ΓΖ των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Οι ΒΕ και ΓΖ τέμνονται σε σημείο Ι αφού $E\hat{B}\Gamma + Z\hat{\Gamma}B = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} < \hat{B} + \hat{\Gamma} < 2\llcorner$. (§4.2 - Πρόταση IV)

Το Ι ως σημείο της διχοτόμου της $\hat{B}$ θα ισαπέχει από τις πλευρές της ΒΑ και ΒΓ, δηλαδή ΙΛ = ΙΘ. Ανάλογα το Ι θα ισαπέχει από τις πλευρές της $\hat{\Gamma}$, δηλαδή ΙΘ = ΙΝ. Επομένως το Ι ισαπέχει από τις ΑΒ και ΑΓ και θα ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$.

Τελικά, το Ι είναι το σημείο τομής και των τριών διχοτόμων του τριγώνου. Με κέντρο το Ι και ακτίνα την κοινή απόσταση του Ι από τις πλευρές του ΑΒΓ, γράφεται κύκλος που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

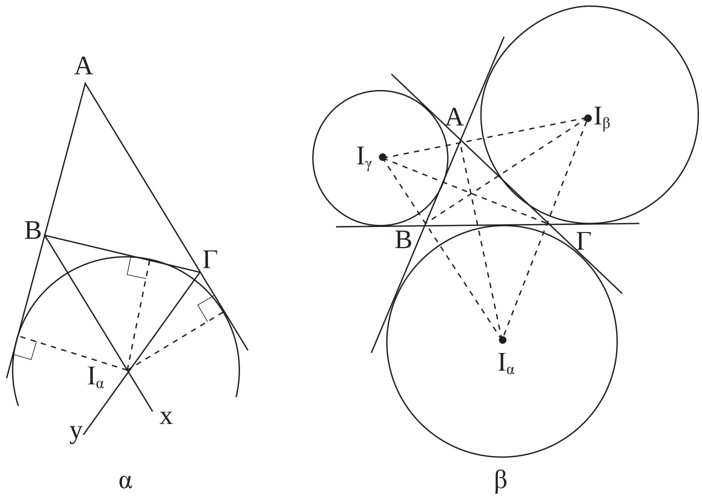
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Οι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι τριγώνου

Η ιδιότητα των εσωτερικών διχοτόμων ενός τριγώνου να διέρχονται από το ίδιο σημείο ισχύει και όταν θεωρήσουμε δύο εξωτερικές και μία εσωτερική διχοτόμο του τριγώνου. Οι τρεις αυτές διχοτόμοι τέμνονται σε σημείο το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται στη μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων. Ο κύκλος αυτός λέγεται ***παρεγγεγραμμένος*** και το κέντρο του ***παράκεντρο*** του τριγώνου. Σε κάθε τρίγωνο υπάρχουν τρία παράκεντρα, τα οποία συμβολίζουμε I_α, I_β, I_γ, και κατά συνέπεια τρεις παρεγγεγραμμένοι κύκλοι (σχ.17α,β).

Οι διχοτόμοι δύο εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου και η ημιευθεία που διχοτομεί την τρίτη γωνία του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται στη μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων.

Απόδειξη



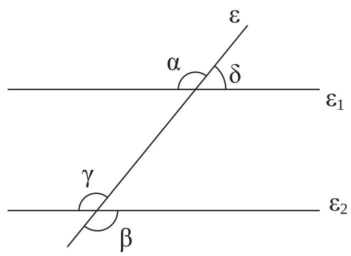
Σχήμα 17

Ας θεωρήσουμε τις διχοτόμους Βx και Γy των δύο εξωτερικών γωνιών $\hat{B}_{εξ}$ και $\hat{Γ}_{εξ}$ αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ. Οι Βx και Γy τέμνονται σε σημείο $I_α$, αφού ισχύει ότι:
$x\hat{B}Γ + y\hat{Γ}B = \frac{\hat{B}_{εξ} + \hat{Γ}_{εξ}}{2} = 2L - \frac{\hat{B} + \hat{Γ}}{2} < 2L.$
Το $I_α$ ισαπέχει από τη ΒΓ και την προέκταση της ΑΒ, καθώς και από την προέκταση της ΑΓ. Επομένως ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, αφού ισαπέχει από τις πλευρές της.

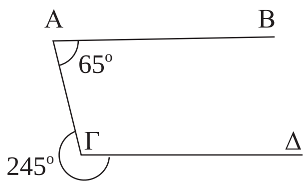
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

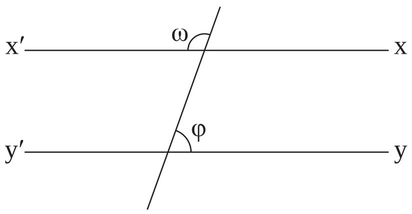
1. *i) Πώς ονομάζονται οι γωνίες α και β του παρακάτω σχήματος; Τι σχέση έχουν μεταξύ τους;*
ii) Τι ισχύει για τις γωνίες $\hat{γ}$ και $\hat{δ}$;



2. *Να εξηγήσετε γιατί η ΑΒ είναι παράλληλη της ΓΔ.*



3. *Αν ω= 120° – θ και φ = 60° + θ να εξηγήσετε γιατί xx′//yy′.*



4. *Να αναφέρετε πέντε (5) τρόπους για να αποδείξουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες.*

5. *Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι:*
i) συμπληρωματικές,
ii) ίσες,
iii) παραπληρωματικές,
iv) κανένα από τα παραπάνω.
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε παράλληλη προς τη βάση του ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.*

2. *Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Α της διχοτόμου της. Αν η παράλληλη από το Α προς την Οx τέμνει την Οy στο Β, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές.*

3. *Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και η διχοτόμος της ΟΔ. Από σημείο Α της Οy φέρουμε παράλληλη προς την ΟΔ που τέμνει την προέκταση της Οx στο Β. Να αποδείξετε ότι ΟΑ = ΟΒ.*

4. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Αν ο κύκλος (Δ, ΔΒ) τέμνει τη ΒΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΑΓ.*

5. *Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα: ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΓ.*

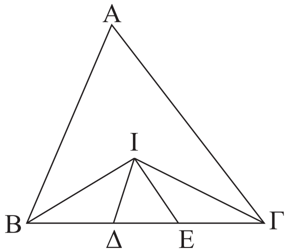
6. *Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και Μ το μέσο χορδής του ΑΒ. Φέρουμε Οx⊥ΟΜ. Να αποδείξετε ότι Οx//ΑΒ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και η διάμεσος του ΑΜ. Φέρουμε Γx⊥ΒΓ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτή τμήμα ΓΔ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}Γ$.*

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από την κορυφή Β φέρουμε ΒΕ//ΑΔ που τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΕΓ = ΑΒ + ΑΓ.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και η εξωτερική διχοτόμος του Αx. Από την κορυφή Β φέρουμε ΒΔ//Αx που τέμνει την ΑΓ στο Δ. Να αποδείξετε ότι ΔΓ = ΑΓ – ΑΒ.*
4. *Από το έγκεντρο Ι, τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη της ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΒΔ+ΓΕ.*
5. *Από το έγκεντρο Ι τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ΙΔ//ΑΒ και ΙΕ//ΑΓ. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΔΙΕ ισούται με τη ΒΓ.*



Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΒΔ και η εξωτερική διχοτόμος του Βx. Θεωρούμε δύο σημεία Ε και Κ της πλευράς ΑΒ. Αν ο κύκλος (Ε, ΕΒ) τέμνει τη ΒΔ στο Ζ, ενώ ο κύκλος (Κ, ΚΒ) τέμνει τη Βx στο Μ, να αποδείξετε ότι ΕΖ//ΜΚ.*
2. *Από τα άκρα ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ φέρουμε προς το ίδιο ημιεπίπεδο δύο παράλληλες ημιευθείες Αx και Βy. Παίρνουμε Γ τυχαίο σημείο του ΑΒ, και στις Αx, Βy τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΑΔ = ΑΓ και ΒΕ = ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\hat{\Gamma}E$ είναι ορθή.*
3. *Από το παράκεντρο I_α τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ φέρουμε παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΑΕ – ΒΔ.*
4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και Μ σημείο της πλευράς ΒΓ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:*
   i) Το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές.
   ii) ΒΕ + ΓΖ = σταθερό.
   iii) Αν Μ μέσο της ΒΓ τότε:
   α) $BE = \Gamma Z = \dfrac{A\Gamma + AB}{2}$,
   β) $AE = AZ = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$.

4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Η παραλληλία επιτρέπει να μεταφέρουμε τις γωνίες ενός τριγώνου, ώστε να έχουν κοινή κορυφή μια οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου και να σχηματίζουν ευθεία γωνία (σχ.18). Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου.

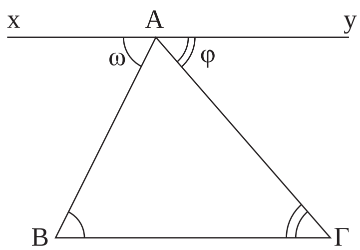
ΘΕΩΡΗΜΑ

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από μια κορυφή, π.χ. την Α, φέρουμε ευθεία xy//ΒΓ. Τότε $\omega = \hat{B}$ (1) και $\varphi = \hat{\Gamma}$ (2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και ΒΓ με τέμνουσες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Αλλά $\omega + \hat{A} + \varphi = 2\llcorner$ (3).
Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner.$$



Σχήμα 18

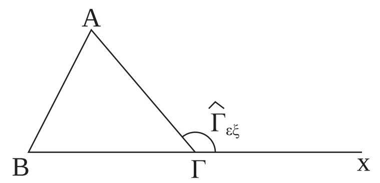
ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

i) Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

ii) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.

iii) Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.

iv) Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60^{o}.



Σχήμα 19

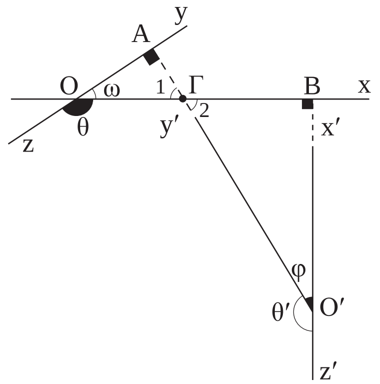
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Έχουμε $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=2\llcorner$ και $\hat{\Gamma}_{εξ}+\hat{\Gamma}=2\llcorner$, οπότε

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}_{εξ}+\hat{\Gamma} \quad ή \quad \boldsymbol{\hat{\Gamma}_{εξ}=\hat{A}+\hat{B}}.$$

ii) – iv) Προφανή.

4.7 Γωνίες με πλευρές κάθετες



Σχήμα 20

ΘΕΩΡΗΜΑ

Δυο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω οι γωνίες $x\hat{O}y=ω$ και $x'\hat{O}'y'=φ$ με $Ox\perp O'x'$ και $Oy\perp O'y'$.
Τα τρίγωνα ΟΑΓ και Ο′ΒΓ έχουν $\hat{A}=\hat{B}=1\llcorner$ και $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$ (κατακορυφήν).
Άρα θα έχουν και τις άλλες γωνίες ίσες, οπότε $ω=φ$.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

i) Δύο αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

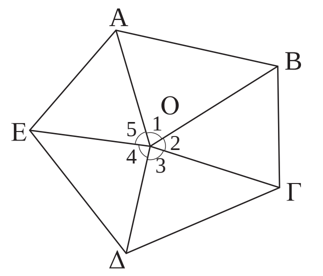
ii) Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες αλλά η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι παραπληρωματικές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Πράγματι, (σχ.20) είναι $θ+ω=2\llcorner$, $θ'+φ=2\llcorner$, οπότε $θ=θ'$, αφού $ω=φ$.

ii) Πράγματι, (σχ.20) είναι $θ+ω=2\llcorner$, οπότε $θ+φ=2\llcorner$, αφού $ω=φ$.

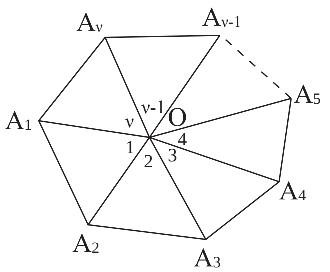
4.8 Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου



Σχήμα 21

Ας θεωρήσουμε κυρτό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και Ο τυχαίο εσωτερικό σημείο του. Αν ενώσουμε το Ο με τις κορυφές του πενταγώνου, σχηματίζονται πέντε τρίγωνα. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές. Έτσι το άθροισμα των γωνιών και των πέντε τριγώνων είναι (2·5) ορθές. Αν αφαιρέσουμε το άθροισμα των γωνιών $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 + \hat{O}_5 = 4$ ορθές, θα μείνει το άθροισμα των γωνιών του πενταγώνου, δηλαδή:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} = (2 \cdot 5 - 4) \text{ ορθές}.$$



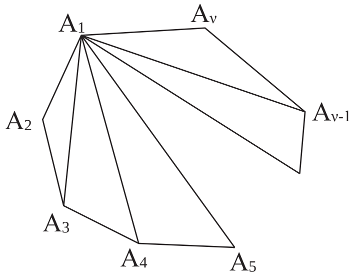
Σχήμα 22

Όμοια, αν το κυρτό πολύγωνο έχει ν πλευρές και ενώσουμε το Ο με τις κορυφές του σχηματίζονται ν τρίγωνα. Το άθροισμα των γωνιών των ν τριγώνων είναι 2ν ορθές. Αν αφαιρέσουμε το άθροισμα των γωνιών $\hat{O}_1+\hat{O}_2+\hat{O}_3+ \ldots +\hat{O}_\nu = 4$ ορθές έχουμε:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \ldots + \hat{A}_\nu = (2\nu - 4) \text{ ορθές}.$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι πρέπει:

Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου να είναι 2ν – 4 ορθές.



Σχήμα 23

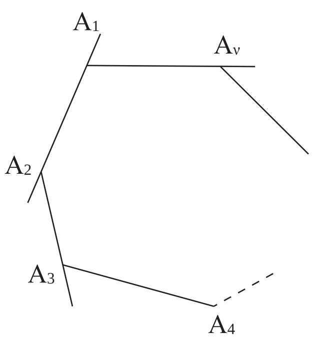
Άλλη απόδειξη. Ας θεωρήσουμε κυρτό πολύγωνο $A_1A_2 \ldots A_\nu$ με ν πλευρές και ας φέρουμε από μια κορυφή του, π.χ. την A_1, όλες τις διαγωνίους που διέρχονται από αυτή. Έτσι το πολύγωνο διαιρείται σε ν – 2 τρίγωνα, γιατί σε καθεμιά από τις πλευρές του, εκτός των A_1A_2 και A_1A_ν που διέρχονται από την κορυφή A_1, αντιστοιχεί ένα τρίγωνο. Επειδή το άθροισμα των γωνιών των ν – 2 τριγώνων είναι 2(ν – 2) = (2ν – 4) ορθές και ισούται με το άθροισμα των γωνιών του πολυγώνου, προκύπτει ότι:

Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 2ν – 4 ορθές.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 4 ορθές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 24

Έχουμε $\left\{\begin{array}{l} \hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_1 = 2\llcorner \\ \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \hat{A}_2 = 2\llcorner \\ \ldots + \ldots = \ldots \\ \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi} + \hat{A}_\nu = 2\llcorner \end{array}\right.$ προσθέτουμε κατά μέλη οπότε:

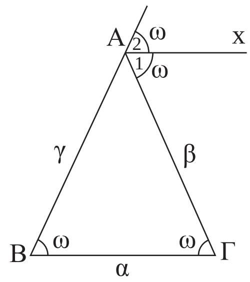
$(\hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \ldots + \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi}) + (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \ldots + \hat{A}_\nu) = 2\nu\llcorner$ ή

$(\hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \ldots + \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi}) + (2\nu - 4)\llcorner = 2\nu\llcorner$ ή

$\hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \ldots + \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi} = 4\llcorner.$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διχοτόμο Αx της εξωτερικής γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές, αν και μόνο αν Αx//ΒΓ.



Απόδειξη

i) Αν $\beta = \gamma$ τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \omega$.

Όμως $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\omega$, οπότε $\frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2} = \omega$ ή $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma} = \omega$. Άρα Αx//ΒΓ, αφού σχηματίζουν δύο εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες.

ii) Αν Αx//ΒΓ τότε $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (ως εντός εναλλάξ) και $\hat{A}_2 = \hat{B}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη). Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$), οπότε $\beta = \gamma$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

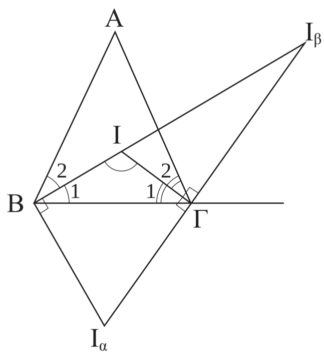
Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις εσωτερικές και εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδειχθεί ότι

i) Η γωνία των δύο εσωτερικών διχοτόμων είναι ίση με $90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$.

ii) Η γωνία μίας εσωτερικής και μίας εξωτερικής διχοτόμου είναι ίση με $\frac{\hat{A}}{2}$.

iii) Η γωνία των δύο εξωτερικών διχοτόμων είναι ίση με $90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$.

Απόδειξη



Οι εσωτερικές διχοτόμοι τέμνονται στο έγκεντρο Ι. Οι εξωτερικές διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο παράκεντρο I_α και η εσωτερική διχοτόμος της $\hat{B}$ με την εξωτερική διχοτόμο της $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο παράκεντρο I_β.

i) Από το τρίγωνο ΒΙΓ παίρνουμε:

$B\hat{I}\Gamma + \hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ$ ή $B\hat{I}\Gamma = 180^\circ - \hat{B}_1 - \hat{\Gamma}_1$ ή

$B\hat{I}\Gamma = 180^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ ή $B\hat{I}\Gamma = 90^\circ + 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ ή

$\mathbf{B\hat{I}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}}$ (επειδή $\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ$). (1)

ii) Η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος μιας γωνίας τέμνονται **κάθετα**. Έτσι στο τρίγωνο $I\Gamma I_\beta$ είναι: $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ και $B\hat{I}\Gamma = 90^\circ + \hat{I}_\beta$ (2) (ως εξωτερική γωνία).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\mathbf{\hat{I}_\beta = \frac{\hat{A}}{2}}$. (3)

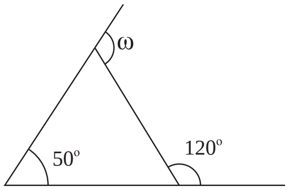
iii) Όμοια στο τρίγωνο $I_\alpha B I_\beta$ είναι $\hat{B} = 90^\circ$, οπότε $\hat{I}_\alpha + \hat{I}_\beta = 90^\circ$ ή $\hat{I}_\alpha = 90^\circ - \hat{I}_\beta$. (4)

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι $\mathbf{\hat{I}_\alpha = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}}$.

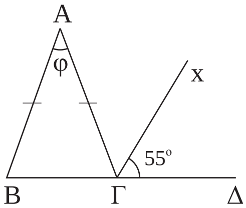
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να υπολογίσετε τη γωνία ω στο παρακάτω σχήμα.*



2. *Αν $ΑΒ = ΑΓ$ και $Γx$ διχοτόμος της $Α\hat{Γ}Δ$, να υπολογίσετε τη γωνία φ (βλ. σχήμα).*



3. *Υπάρχει κυρτό ν-γωνο τέτοιο, ώστε το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του να ισούται με το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του;*

4. *Να εξηγήσετε γιατί αν ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει μια γωνία 60° είναι ισόπλευρο.*

5. *Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι:*

α) 180° β) 270° γ) 360°
δ) 540° ε) κανένα από τα παραπάνω

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

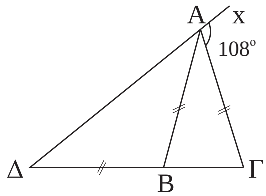
1. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του είναι ίση με τα $\frac{2}{3}$ μιας άλλης γωνίας του. Να υπολογισθούν όλες οι γωνίες του (δύο περιπτώσεις).*

2. *Σε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) είναι $\hat{Α} = \frac{\hat{Β}}{2}$. Αν $Ι$ το έγκεντρο του τριγώνου να υπολογισθεί η γωνία $Β\hat{Ι}Γ$. (Εφαρμογή 2 - §4.8)*

3. *Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ η γωνία $\hat{Α}$ είναι τριπλάσια της γωνίας $\hat{Β}$. Αν $\hat{Γ}_{εξ} = 144°$ να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του.*

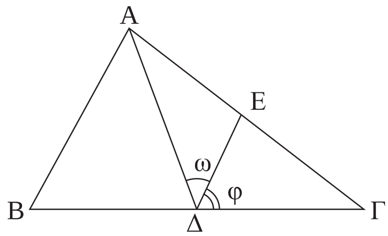
4. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{Α} = 90°$) και το ύψος του $ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι $\hat{Β} = Δ\hat{Α}Γ$ και $\hat{Γ} = Δ\hat{Α}Β$.*

5. *Στο παρακάτω σχήμα είναι:*



$ΑΒ = ΑΓ = ΔΒ$ και $x\hat{Α}Γ = 108°$.
Να υπολογισθεί η γωνία $\hat{Δ}$.

6. *Στο παρακάτω σχήμα είναι: $\hat{Α} = 90°$, $ΑΔ$ διχοτόμος, $ΔΕ//ΑΒ$. Αν η γωνία $\hat{Β}$ είναι 20° μεγαλύτερη από τη $\hat{Γ}$ να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ.*



7. *Το άθροισμα των γωνιών κυρτού πολυγώνου είναι 900°. Να βρεθεί το πλήθος των πλευρών του.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $\hat{Β}_{εξ} = 90° + \frac{\hat{Α}}{2}$. Να αποδείξετε ότι $ΑΒ = ΑΓ$.*

2. *Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{Β} > \hat{Γ}$ και η διχοτόμος του $ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι*

i) $Α\hat{Δ}Γ - Α\hat{Δ}Β = \hat{Β} - \hat{Γ}$,

ii) $Α\hat{Δ}Β = 90° - \frac{\hat{Β} - \hat{Γ}}{2}$,

$Α\hat{Δ}Γ = 90° + \frac{\hat{Β} - \hat{Γ}}{2}$.

3. *Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{Β} > \hat{Γ}$ φέρουμε το ύψος $ΑΔ$ και τη διχοτόμο $ΑΕ$. Να αποδείξετε ότι $Δ\hat{Α}Ε = \frac{\hat{Β} - \hat{Γ}}{2}$.*

4. *Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Α}$, $\hat{Β}$ κυρτού τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$ τέμνονται σε σημείο $Ε$, να αποδείξετε ότι $Α\hat{Ε}Β = \frac{\hat{Γ} + \hat{Δ}}{2}$.*

5. *Από τυχαίο σημείο $Δ$ της βάσης $ΒΓ$ ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$ φέρουμε τη $ΔΕ \perp ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι $\hat{Α} = 2Ε\hat{Δ}Γ$.*

6. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90°) το ύψος του ΑΔ και η διχοτόμος του ΒΖ τέμνονται σε σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.*

7. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90°). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και την κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Γ, στο Η. Να αποδείξετε ότι ΖΓ = ΓΗ.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Στην προέκταση της ΓΑ προς το Α, παίρνουμε τμήμα ΑΕ = ΑΔ. Να αποδείξετε ότι ΔΕ⊥ΒΓ.*

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από την κορυφή Β φέρουμε ευθεία κάθετη στην ΑΔ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι* $E\hat{B}\Gamma = \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.

3. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε την υποτείνουσα ΓΒ κατά τμήμα ΒΔ = ΑΒ. Φέρουμε κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Γ και παίρνουμε σε αυτή –προς το μέρος του Α– τμήμα ΓΕ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά.*

4. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και το ύψος του ΒΔ. Φέρουμε ΔΗ⊥ΑΒ, που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:*

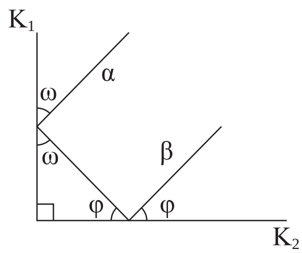
i) ΒΔ = ΔΕ,   ii) ΒΓ > ΓΕ.

5. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ, προεκτείνουμε τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ, προς το μέρος των κορυφών και επί των προεκτάσεων παίρνουμε τμήματα ΒΖ = ΑΓ και ΓΗ = ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι*

i) ΑΖ = ΑΗ,   ii) ΑΖ⊥ΑΗ.

6. *Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{A} > \hat{\Gamma}$ και ονομάζουμε φ την οξεία γωνία των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$. Να αποδείξετε ότι* $\varphi = \dfrac{\hat{A} - \hat{\Gamma}}{2}$.

7. *Δύο επίπεδα κάτοπτρα K_1, K_2 είναι κάθετα. Φωτεινή ακτίνα α προσπίπτει αρχικά στο K_1 και μετά την ανάκλαση στο K_2, εξέρχεται κατά την ακτίνα β. Τι πορεία θα ακολουθήσει, σε σχέση με την αρχική ακτίνα α;*



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Δίνεται τρίγωνο* $ΑΒΓ$ *με* $\hat{Α} = 60°$ *και οι διχοτόμοι του* $ΒΔ$ *και* $ΓΕ$. *Να αποδείξετε ότι* $Β\hat{Δ}Γ = Γ\hat{Ε}Α$.

2. *Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο* $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ = α)$ *και τα σημεία* $Δ$ *και* $Ε$ *των πλευρών του* $ΑΒ$ *και* $ΒΓ$ *αντίστοιχα, ώστε* $ΑΔ = ΒΕ = \frac{1}{3}α$. *Να αποδείξετε ότι* $ΔΕ \perp ΒΓ$.

3. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο* $ΑΒΓ$ $(\hat{Α} = 90°)$ *και η διχοτόμος του* $ΑΔ$. *Φέρουμε* $Δx \perp ΒΓ$, *που τέμνει την* $ΑΒ$ *στο* $Ε$ *και την προέκτασή της* $ΑΓ$ *στο* $Ζ$. *Να αποδείξετε ότι* $ΒΕ = ΖΓ$.

4. *Θεωρούμε τετράπλευρο* $ΑΒΓΔ$ *με* $\hat{Α} = \hat{Γ} = 90°$ *και* $ΒΓ = ΓΔ$. *Στην προέκταση της* $ΑΔ$ *παίρνουμε τμήμα* $ΔΕ = ΑΒ$. *Να αποδείξετε ότι* $ΑΓ \perp ΓΕ$.

5. *Δίνεται τρίγωνο* $ΑΒΓ$ *με* $ΑΒ < ΑΓ$. *Να αποδείξετε ότι:*

i) *Το ύψος* $ΑΔ = υ_α$ *σχηματίζει με τη μικρότερη πλευρά μικρότερη γωνία.*

ii) *Η διάμεσος* $ΑΜ = μ_α$ *σχηματίζει με τη μικρότερη πλευρά μεγαλύτερη γωνία.*

iii) *Το ύψος* $υ_α$ *και η διάμεσος* $μ_α$ *βρίσκονται εκατέρωθεν της διχοτόμου* $ΑΕ = δ_α$.

6. *Τρεις κύκλοι με κέντρα* K_1, K_2, K_3 *εφάπτονται εξωτερικά στα* $Α$, $Β$, $Γ$. *Να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου* $ΑΒΓ$ *είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο* $K_1K_2K_3$.

7. *Θεωρούμε τρίγωνο* $ΑΒΓ$, *τον εγγεγραμμένο κύκλο του* $(Ι, ρ)$ *και τον παρεγγεγραμμένο κύκλο του* $(Ι_α, ρ_α)$. *Ονομάζουμε* $Δ$, $Ε$, $Ζ$ *και* $Δ'$, $Ε'$, $Ζ'$ *τα σημεία επαφής των* $(Ι, ρ)$ *και* $(Ι_α, ρ_α)$ *με τις ευθείες* $ΒΓ$, $ΓΑ$, $ΑΒ$ *αντίστοιχα.*

Να αποδείξετε ότι:

i) $ΑΖ = ΑΕ = τ - α$,
$ΒΔ = ΒΖ = τ - β$,
$ΓΔ = ΓΕ = τ - γ$,

ii) $ΑΖ' = ΑΕ' = τ$,

iii) $ΖΖ' = ΕΕ' = α$, $ΔΔ' = β - γ$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1. *Να συμπληρώσετε τον πίνακα για κυρτά ν-γωνα.*

αριθμός πλευρών	άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου	άθροισμα εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου
4		
5		
6		
7		
.		
.		
.		
ν	2ν – 4 ορθές	4 ορθές

i) Τι παρατηρείτε για το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου; Εξαρτάται από τον αριθμό των πλευρών ν; Τι ισχύει όταν αυξάνεται το ν;

ii) Τι παρατηρείτε για το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου. Να σχολιάσετε τη σχέση του με τον αριθμό των πλευρών ν.

2. *Να κατασκευάσετε δύο γωνίες με πλευρές παράλληλες (3 περιπτώσεις). Να εξετάσετε τι ισχύει για τις διχοτόμους τους (παράλληλες, κάθετες κτλ.)*

Να κάνετε το ίδιο για δύο γωνίες με πλευρές κάθετες.

Εργασία

Να υπολογίσετε τις γωνίες ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), το οποίο είναι δυνατόν να χωρισθεί σε δύο άλλα ισοσκελή τρίγωνα.

Υπόδειξη: *Η ευθεία που χωρίζει το ΑΒΓ σε δυο ισοσκελή τρίγωνα πρέπει να διέρχεται από μια κορυφή του τριγώνου. Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις:*

i) με ευθεία ΑΔ από την κορυφή Α.

ii) με ευθεία ΒΕ από την κορυφή Β.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η θεωρία των παραλλήλων

Το αίτημα του Ευκλείδη. Στο Βιβλίο Ι των «Στοιχείων» του ο Ευκλείδης ορίζει ως παράλληλες «τις ευθείες εκείνες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες επ' άπειρον και από τα δύο μέρη δε συναντώνται σε κανένα απ' αυτά» (Ορισμός 23). Αμέσως μετά διατυπώνει πέντε αιτήματα, τα τέσσερα πρώτα από τα οποία εκφράζουν τις βασικές ιδιότητες των γεωμετρικών κατασκευών με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη, ενώ το πέμπτο αποφαίνεται ότι:

«Εάν μια ευθεία που τέμνει δύο ευθείες σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες μικρότερες από δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες προεκτεινόμενες επ' άπειρον συναντώνται στο μέρος που οι σχηματιζόμενες γωνίες είναι μικρότερες από δύο ορθές» (Αίτημα V).

Το αίτημα αυτό αποδεικνύεται ισοδύναμο με τις εξής προτάσεις:

(Ε1) Υπάρχει ευθεία α και σημείο Α εκτός αυτής τέτοιο, ώστε από το Α διέρχεται μία μοναδική ευθεία που δεν τέμνει την α.

(Ε2) Υπάρχει τετράπλευρο με τέσσερις ορθές γωνίες.

(Ε3) Το άθροισμα των γωνιών τυχόντος τριγώνου ισούται με δύο ορθές.

(Ε4) Υπάρχει τρίγωνο, το άθροισμα των γωνιών του οποίου να ισούται με δύο ορθές.

(Ε5) Αν μια ευθεία τέμνει δύο παράλληλες ευθείες, οι αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες.

(Ε6) Τα σημεία που κείνται προς το ίδιο μέρος από δεδομένη ευθεία και σε μία και την αυτή απόσταση, σχηματίζουν ευθεία.

(Ε7) Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες και αυτές αποκλίνουν η μία από την άλλη από το ένα μέρος, τότε από το άλλο μέρος συγκλίνουν.

(Ε8) Υπάρχουν όμοια τρίγωνα.

(Ε9) Υπάρχουν τρίγωνα με οσοδήποτε μεγάλο μέγεθος.

(Ε10) Έστω α τυχούσα ευθεία και Α σημείο εκτός αυτής. Τότε στο επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία α και το σημείο Α υπάρχει όχι περισσότερες από μία ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α και δεν τέμνει την ευθεία α (Αξίωμα παραλληλίας).

Το αίτημα του Ευκλείδη ή κάποιο ισοδύναμό του καθορίζει τη φύση ολόκληρης της γεωμετρίας και αποτελεί βάση για τα περισσότερα θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

Η θεωρία των παραλλήλων στην αρχαιότητα και το Βυζάντιο. Είναι πιθανό πριν τη διατύπωση του πέμπτου αιτήματος των «Στοιχείων» του Ευκλείδη να υπήρξαν προσπάθειες να αποδειχθεί. Όμως οι διαθέσιμες μαρτυρίες είναι πενιχρότατες και αποσπασματικές. Ενδείξεις υπάρχουν στα «Αναλυτικά Ύστερα» του Αριστοτέλη, όπου συνδέεται το πρόβλημα των παραλλήλων με την πρόταση (Ε3). Ο Αριστοτέλης ασκεί κριτική στις προσπάθειες μαθηματικών (που δεν κατονομάζονται) να αποδείξουν το Ευκλείδειο αίτημα ότι υποπίπτουν στο λογικό σφάλμα της «λήψης του ζητουμένου» (petitio principi), δηλαδή ότι κατά την απόδειξη χρησιμοποιούν πρόταση ισοδύναμη προς την αποδεικτέα. Άλλη πηγή είναι τα «Σχόλια για τις δυσκολίες στην εισαγωγή του βιβλίου του Ευκλείδη» του Ομάρ Χαγιάμ όπου αναφέρει ότι «η αιτία του λάθους των ύστερων επιστημόνων στην απόδειξη αυτής της υπόθεσης είναι ότι δε λάμβαναν υπόψη τους τις αρχές του φιλοσόφου [δηλαδή, του Αριστοτέλη]» και παραθέτει πέντε αρχές, τέσσερις από τις οποίες απαντώνται με λίγο διαφορετική διατύπωση στα «Φυσικά» και το «Περί Ουρανού».

Το πρώτο γνωστό έργο της αρχαιότητας, που λίγες μόλις δεκαετίες μετά τα «Στοιχεία» αναφέρεται στη θεωρία των παραλλήλων, είναι η χαμένη πραγματεία του Αρχιμήδη «Περί παραλλήλων», που μνημονεύει ο βιβλιογράφος Ιμπν αλ-Ναντίμ (πέθανε το 993) στο «Βιβλίο της βιβλιογραφίας των επιστημών», μαζί με άλλα έργα του Αρχιμήδη που διασώθηκαν μόνο στα Αραβικά. Το βιβλίο αυτό ήταν πιθανότατα γνωστό στον Θαμπίτ ιμπν Κούρρα (836-901), συγγραφέα δύο πραγματειών σχετικών με τη θεωρία των παραλλήλων. Σύμφωνα με μαρτυρία του Πρόκλου, ο οποίος θεωρεί ότι το αίτημα του Ευκλείδη είναι θεώρημα και επιχειρεί να δώσει μια δική του απόδειξη, ο Ποσειδώνιος είχε προτείνει έναν ορισμό των παραλλήλων, διαφορετικό από αυτόν του Ευκλείδη. Παράλληλες ονομάζει τις ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, δε συγκλίνουν ούτε αποκλίνουν και όλες οι κάθετες από τα σημεία της μιας προς την άλλη είναι ίσες μεταξύ τους. Ο ορισμός αυτός όμως βασίζεται στο ισοδύναμο αξίωμα (Ε6). Ο Πρόκλος αναφέρεται επίσης εκτεταμένα στις προσπάθειες του Κλαύδιου Πτολεμαίου και άλλων μαθηματικών, τους οποίους δεν κατονομάζει, να αποδείξουν το Ευκλείδειο αίτημα.

Με την απόδειξη του Ευκλείδειου αιτήματος ασχολήθηκε ο Διόδωρος (1ος αι. π.Χ.). Στα Αραβικά διατηρήθηκαν και οι προσπάθειες κάποιου Αγάνη και του Σιμπλίκιου που στηρίζονται στον ορισμό του Ποσειδωνίου και, επομένως, στο αξίωμα (Ε6).

Η θεωρία των παραλλήλων στα Αραβικά μαθηματικά. Η πρώτη γνωστή προσπάθεια απόδειξης του Ευκλείδειου αιτήματος στα Αραβικά μαθηματικά έγινε από τον αλ-Τζαουχαρί στο έργο του «Τελειοποίηση του βιβλίου των *"Στοιχείων"*», το περιεχόμενο του οποίου μεταφέρει ο Νασίρ αντ-Ντιν αλ-Τουσί. Όμως στην απόδειξή του χρησιμοποιεί την ισοδύναμη προς το αποδεικτέο πρόταση ότι «αν μία ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε οι εντός εναλλάξ γωνίες να είναι ίσες, τότε το ίδιο ισχύει όταν οι δύο ευθείες τέμνονται από οποιαδήποτε άλλη ευθεία». Οι πρώτες προσπάθειες αντικατάστασης του Ευκλείδειου αιτήματος με το αξίωμα της ύπαρξης «ισαπεχουσών» ευθειών ανάγονται στον αλ-Ναϊριζί και τον Ιμπν Σίνα (Αβικέννα).

Οι άραβες μαθηματικοί ανέπτυξαν δύο κυρίως προσεγγίσεις στην απόδειξη του Ευκλείδειου αιτήματος, που εγκαινιάζονται στο έργο του Θαμπίτ ιμπν Κούρρα (908-946): τη γεωμετρική και την κινηματική προσέγγιση. Η κινηματική προσέγγιση ακολουθεί το πνεύμα του Αρχιμήδη και αναπτύχθηκε από τον Ιμπν αλ-Χαϊθάμ. Η πρωτοτυπία της μεθόδου του αλ-Χαϊθάμ, την οποία ακολούθησαν συχνά οι γεωμέτρες στη συνέχεια, είναι ότι υποθέτει την ύπαρξη ενός τετραπλεύρου με τρεις ορθές γωνίες και εξετάζει τις περιπτώσεις η τέταρτη γωνία να είναι οξεία ή αμβλεία, προσπαθώντας να καταλήξει σε αντίφαση με τον ορισμό των παραλλήλων ως «ισαπεχουσών» ευθειών. Η γεωμετρική προσέγγιση αναπτύχθηκε κυρίως από τον Ομαρ Χαγιάμ. Ξεκινώντας από την απόδειξη της πρότασης (Ε2) και με συλλογισμούς συγγενείς με αυτούς του Πρόκλου, αποδεικνύει το Ευκλείδειο αίτημα χωρίς να υποπέσει στο λογικό σφάλμα της «λήψης του ζητουμένου». Ο εγκυκλοπαιδιστής φιλόσοφος, μαθηματικός και αστρονόμος Νασίρ αντ-Ντιν αλ-Τουσί (1201-1274) στη δική του πρωτότυπη απόδειξη του αξιώματος των παραλλήλων ακολουθεί το ύφος του Ιμπν Κούρρα και του Ιμπν αλ-Χαϊθάμ, αλλά στηρίζεται σε αξίωμα που αποτελεί ισχυρότερη μορφή του αιτήματος παραλληλίας.

Στη διάρκεια του 13ου αι. συνεχίζονται οι αναζητήσεις απόδειξης του Ευκλείδειου αιτήματος. Ο αλ-Χαναφί, ακολουθώντας παλαιότερες τάσεις που εκδηλώνονται στο έργο του αλ-Κιντί, του αλ-Μπιρουνί (973-περ. 1050) και του Ομάρ Χαγιάμ, συνδέουν το πρόβλημα του Ευκλείδειου αιτήματος με την έννοια της επ' άπειρον διαιρετότητας των γεωμετρικών μεγεθών. Ιδιαίτερα διαδεδομένη ήταν η θεωρία των παραλλήλων του αλ-Αμπχαρί (ή αλ-Αμπαχρί, πέθανε το 1263). Συγγενής προς αυτήν ήταν η θεωρία του αλ-Μαγκριμπί. Στις δύο τελευταίες θεωρίες βρίσκει κανείς ίχνη του ύφους των συλλογισμών του Σιμπλίκιου. Στα τέλη του 13ου-αρχές 14ου αι. μια ακόμα αξιοσημείωτη προσπάθεια γίνεται από τον αντ-Ντιν ασ-Σιραζί (1236-1311), μαθητή του αλ-Τουσί.

Παρ' όλες τις προσπάθειες που σκιαγραφήσαμε οι Άραβες μαθηματικοί ήταν πολύ μακριά από την ιδέα ότι είναι δυνατή μια άλλη γεωμετρία. Απλώς προσπαθούσαν να αποδείξουν το Ευκλείδειο αίτημα από υποθέσεις που θεωρούσαν πιο προφανείς. Στην πορεία των προσπαθειών τους απέδειξαν την ισοδυναμία του Ευκλείδειου αιτήματος με διάφορες προτάσεις που μπορούν να θεωρηθούν ισοδύναμες με το πέμπτο αίτημα, καθώς και πολλά θεωρήματα που σήμερα εμπίπτουν στο πεδίο της Υπερβολικής και της Ελλειπτικής Γεωμετρίας.

Η θεωρία των παραλλήλων στην Ευρώπη από τον 13ο ως το 18ο αι. Η πρώτη γνωστή απόπειρα απόδειξης του Ευκλείδειου αιτήματος στη μεσαιωνική Ευρώπη απαντάται το 13ο αι. στο σύγγραμμα του Βιτέλο (Vitelo, περίπου 1225-1280) «Οπτική» ή «Προοπτική» (1572). Βασική πηγή του Βιτέλο είναι το έργο του Ιμπν αλ-Χαϊθάμ. Ωστόσο, η απόδειξή του υστερεί ως προς το επίπεδο αυστηρότητας που είχαν φτάσει οι Άραβες μαθηματικοί.

Δύο άλλες απόπειρες απαντώνται το 14ο αι. στα «Σχόλια» του Γερσωνίδη (Levi ben Gerson ή Gersonides, 1288-1344) και στο έργο κάποιου Αλφόνσο, ο οποίος εικάζεται ότι είναι ο Ισπανός ιατρός και συγγραφέας πολεμικών θρησκευτικών έργων Αλφόνσο του Βαλλαντολίντ (1270-1346).

Στις αρχές του 16ου αι. η θεωρία παραλλήλων εξετάζεται στο «Κάτοπτρο αστρονομικό που περικλείει την ανθρώπινη σοφία σε κάθε επιστήμη» του Φ. Μπ. Γκρισογκόνο (1472-1538), που εκδίδεται στη Βενετία το 1507. Το 1574 εμφανίζεται μία πρωτότυπη απόδειξη του πέμπτου αιτήματος από τον Κλάβιο (Clavius (Schlussel), 1537-1612) που εργαζόταν στη Ρώμη και συμμετείχε στην επεξεργασία του Γρηγοριανού ημερολογίου. Η απόδειξη του Κλάβιου στηρίζεται στην πρόταση (Ε6). Η απόδειξή του παρουσιάζει ομοιότητες με αυτές του Ιμπν Κούρρα και του Ιμπν αλ-Χαϊθάμ, τις οποίες ίσως γνώριζε από δεύτερο χέρι.

Τον 17ο αι. παρατηρείται κάποια ένταση των προσπαθειών στη θεωρία των παραλλήλων, η οποία όμως δεν απέφερε ιδιαίτερα αξιόλογους καρπούς. Δημοσιεύονται το 1603 στην Μπολόνια δύο τομίδια του Πιέτρο Α. Κατάλντι (1548-1626), το 1658 στην Πίζα η επεξεργασμένη από τον Τζ.Α. Μπορέλλι (1608-1679) έκδοση των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, και το 1680 ανάλογη έκδοση των «Στοιχείων» από τον Βιτάλε Τζορντάνο (1633-1711). Το 1693 δημοσιεύεται η πραγματεία του Τζ. Ουώλλις (J. Wallis, 1616-1703) «Το πέμπτο αίτημα και ο πέμπτος ορισμός του Βιβλίου VI του Ευκλείδη», το δεύτερο μέρος της οποίας περιέχει μετάφραση μιας απόδειξης που αποδίδεται στον αλ-Τουσί, και στο τρίτο εκτίθεται απόδειξη του Ουώλλις, που βασίζεται στην πρόταση (Ε9), την οποία θεωρεί φυσική «Κοινή Έννοια».

Από την πραγματεία του Ουώλλις γνωρίστηκε με την αποδιδόμενη στον αλ-Τουσί απόδειξη του πέμπτου αιτήματος ο Τζιρόλαμο Σακκέρι (G.G. Saccheri, 1667-1733). Ο Σακκέρι ξεκινώντας από το ισόπλευρο τετράπλευρο με τις δύο ορθές του Ομάρ Χαγιάμ και του αλ-Τουσί αναλύει τις ίδιες τρεις υποθέσεις για τις άλλες δύο γωνίες. Αποκλείει την υπόθεση της οξείας γωνίας επειδή θεωρεί ότι στην περίπτωση αυτή, όπως και στην περίπτωση της ορθής γωνίας ισχύει το πέμπτο αίτημα, δηλαδή επειδή αντιφάσκει στα αξιώματα της συνήθους γεωμετρίας του Ευκλείδη. Στην περίπτωση της αμβλείας γωνίας ο Σακκέρι προχωρεί όσο κανείς άλλος πριν από αυτόν στην απόδειξη θεωρημάτων της σημερινής Υπερβολικής Γεωμετρίας. Όμως διολισθαίνοντας σε λάθος συλλογισμό κατέληξε σε αντίφαση, οπότε συμπέρανε ότι η περίπτωση της ορθής γωνίας (δηλαδή της Ευκλείδειας γεωμετρίας) είναι η μόνη δυνατή.

Πιο σημαντική είναι η προσπάθεια του Γερμανού μαθηματικού Λάμπερτ (J.H. Lambert, 1728-1777). Ξεκινώντας από το ίδιο τετράπλευρο του Ομάρ Χαγιάμ και του Σακκέρι αποκλείει χωρίς δυσκολία την υπόθεση της οξείας γωνίας, στη βάση ότι στην περίπτωση αυτή δύο κάθετες στην ίδια ευθεία τέμνονται, πράγμα που, κατά τη γνώμη του, δεν αντιφάσκει στο πέμπτο αίτημα, αλλά στα υπόλοιπα αξιώματα της Γεωμετρίας του Ευκλείδη. Επίσης παρατηρεί ότι η υπόθεδη της οξείας γωνίας ισχύει στην επιφάνεια της σφαίρας αν ως ευθείες ληφθούν οι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας. Εξετάζοντας την υπόθεση της αμβλείας γωνίας ο Λάμπερτ αποδεικνύει ακόμα περισσότερα και από τον Σακκέρι θεωρήματα της σημερινής Υπερβολικής Γεωμετρίας. Προσπαθώντας να λάβει κάποια παράδοξα αποτελέσματα παραδέχεται ότι δεν είναι εύκολο να αποκλεισθεί η υπόθεση της αμβλείας γωνίας. Αντίθετα με τον Σακκέρι, ούτε υποπίπτει σε σφάλμα, ούτε συμπεραίνει ότι η υπόθεση της αμβλείας γωνίας οδηγεί σε αντίφαση. Αντίθετα, εκφράζοντας κάποια έκπληξη για τις «περίεργες» ιδιότητες των σχημάτων στην περίπτωση αυτή (π.χ. ότι χάνεται η έννοια της ομοιότητας και της αναλογίας των σχημάτων, ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου αυξάνει όσο μειώνεται η επιφάνεια του τριγώνου, κ.α.) διατυπώνει την ιδιαίτερα βαθιά και διορατική σκέψη ότι «η τρίτη υπόθεση ισχύει σε κάποια φανταστική σφαίρα».

Από τις προσπάθειες μετά τον Λάμπερτ, αξίζει να αναφερθεί η «απόδειξη» του Λ. Μπερτράν (L. Bertrand, 1731-1812), μαθητή του Όυλερ, το 1778, του Α.Μ. Λεζάντρ (1752-1833), που αφιέρωσε σαράντα χρόνια στις έρευνες στη θεωρία των παραλλήλων, του Σ.Ε. Γκούριεφ (1764-1813), και του Φαρκάς Μπόλυαϊ (Farkas Bolyai, 1775-1856), του πατέρα του Γιάνος Μπόλυαϊ, του μετέπειτα δημιουργού της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

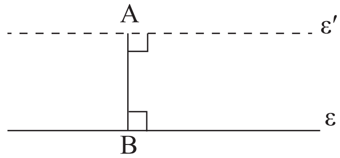
ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Δύο ευθείες ενός επιπέδου

- ταυτίζονται όταν έχουν 2 κοινά σημεία.
- τέμνονται όταν έχουν 1 κοινό σημείο.
- είναι **παράλληλες** όταν δεν έχουν κοινό σημείο.

Από σημείο Α εκτός ευθείας ε

- **υπάρχει** ευθεία $\varepsilon' // \varepsilon$.



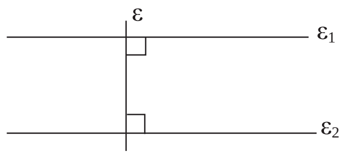
- δεχόμαστε αξιωματικά ότι η ε′ είναι **μοναδική**. (Αίτημα παραλληλίας)

Δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες αν:

- είναι **κάθετες** στην ίδια ευθεία ε.
- είναι **παράλληλες** προς τρίτη ευθεία ε.
- τέμνονται από μια τρίτη ευθεία και σχηματίζουν:
  - τις εντός εναλλάξ γωνίες τους **ίσες**.
  - τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους **ίσες**.
  - τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους **παραπληρωματικές**.

Έστω $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και ε μια τρίτη ευθεία.

- Αν $\varepsilon \perp \varepsilon_1$ τότε $\varepsilon \perp \varepsilon_2$.



- Αν η ε τέμνει την ε_1 τότε θα τέμνει και την ε_2 και θα σχηματίζει:
  - τις εντός εναλλάξ γωνίες **ίσες**.
  - τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες **ίσες**.
  - τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες **παραπληρωματικές**.

Δύο γωνίες που έχουν *παράλληλες* ή *κάθετες* πλευρές είναι:

- **ίσες**, αν είναι
  - και οι δύο οξείες.
  - και οι δύο αμβλείες.
- **παραπληρωματικές**, αν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου και κέντρα τους

- Περίκεντρο (σημείο τομής μεσοκαθέτων)
- Έγκεντρο (σημείο τομής εσωτερικών διχοτόμων)
- Παράκεντρα (σημεία τομής δύο εξωτερικών και μιας εσωτερικής διχοτόμου)

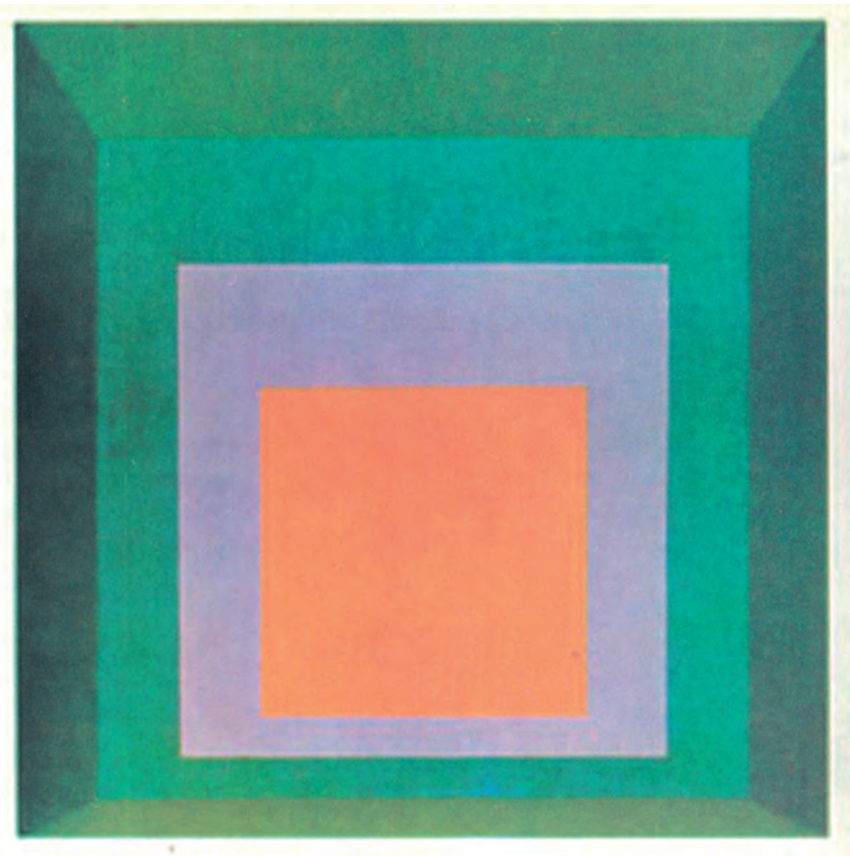
Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών

- τριγώνου είναι **2 ορθές**, οπότε:
  - Κάθε εξωτερική γωνία ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών.
  - Αν δύο τρίγωνα έχουν 2 γωνίες ίσες, έχουν και τις τρίτες γωνίες ίσες.
  - Οι οξείες γωνίες ορθογώνιου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.
  - Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60°.
- κυρτού ν-γώνου είναι **2ν – 4 ορθές**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ - ΤΡΑΠΕΖΙΑ

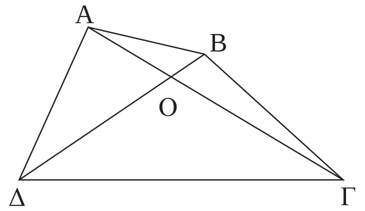
Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τα τετράπλευρα που έχουν παράλληλες πλευρές, θα τα ταξινομήσουμε και θα εξετάσουμε τις χαρακτηριστικές ιδιότητές τους. Ως εφαρμογές θα αποδειχθούν κάποιες βασικές προτάσεις για τα τρίγωνα, τα τετράπλευρα και τις παράλληλες ευθείες.



Josef Alberts
(Γερμανός, 1888-1976).
«Αφιέρωμα στο τετράγωνο: οπτασία»,
λάδι σε σανίδα, 1959.
Συλλογή Μουσείου Solomon R. Guggenheim, Νέα Υόρκη.

5.1 Εισαγωγή

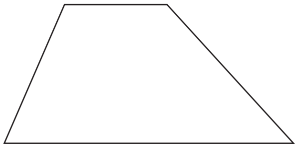
Όπως είδαμε στην §2.20, το ευθύγραμμο σχήμα που έχει τέσσερις πλευρές λέγεται τετράπλευρο. Κάθε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ.1) έχει δύο διαγωνίους ΑΓ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται σε εσωτερικό σημείο τους.



Σχήμα 1

Στα επόμενα, όταν λέμε τετράπλευρο, θα εννοούμε **κυρτό** τετράπλευρο.

Το τετράπλευρο που έχει δύο μόνον πλευρές παράλληλες λέγεται ***τραπέζιο*** (σχ.2), ενώ το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες λέγεται ***παραλληλόγραμμο*** (σχ.3).

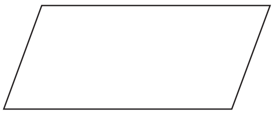

Σχήμα 2

5.2 Παραλληλόγραμμα

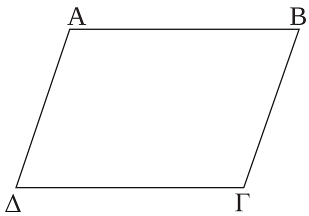
Παραλληλόγραμμο

Ορισμός

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.


Σχήμα 3

Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, όταν ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ.



Σχήμα 4

► **Ιδιότητες παραλληλογράμμων**

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
iii) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ των i), ii)

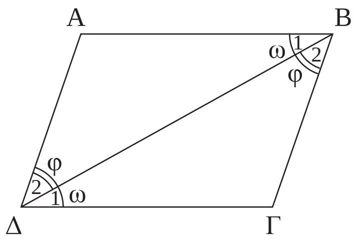
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ (σχ.5). Έχουμε:

$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ (εντός εναλλάξ).

ΒΔ κοινή πλευρά.

$\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi$ (εντός εναλλάξ).

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ είναι ίσα, οπότε ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ. Επίσης έχουμε $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi + \omega$.



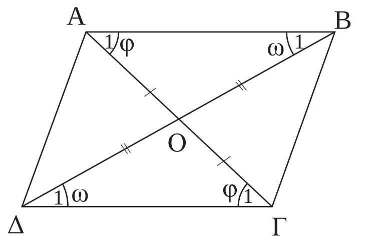
Σχήμα 5

ΑΠΟΔΕΙΞΗ της ιδιότητας iii)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ. Έχουμε:

ΑΒ = ΓΔ

$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ (εντός εναλλάξ).



Σχήμα 6

$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \varphi$ (εντός εναλλάξ).
Άρα, τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ είναι ίσα, οπότε ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ.

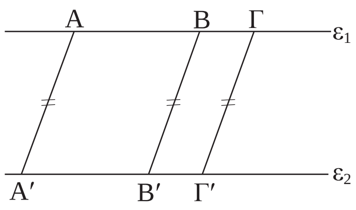
ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του.

Για το λόγο αυτό λέγεται ***κέντρο*** του παραλληλογράμμου.

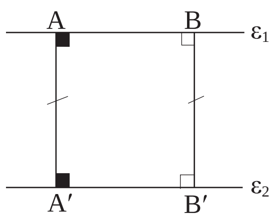
ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα (σχ.7).



Σχήμα 7

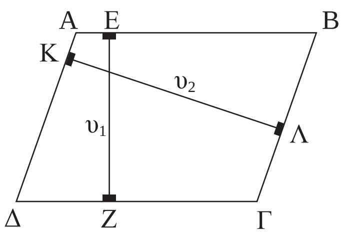
Αν τα τμήματα (σχ.8) είναι **κάθετα** στις παράλληλες, το κοινό μήκος τους λέγεται ***απόσταση*** των παραλλήλων. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες των απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σε αυτές λέγεται ***ύψος*** του παραλληλογράμμου, ενώ οι απέναντι πλευρές του λέγονται ***βάσεις*** ως προς αυτό το ύψος (σχ.9).



Σχήμα 8

► Κριτήρια για παραλληλόγραμμα

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε προτάσεις (κριτήρια) οι οποίες εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο: Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

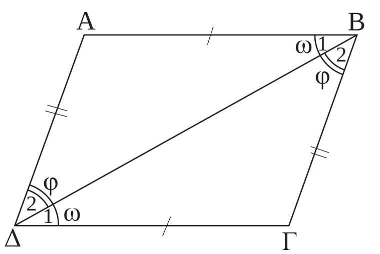


Σχήμα 9

- **i) Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.**
- **ii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.**
- **iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.**
- **iv) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.**

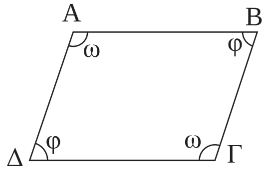
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Για να αποδείξουμε τα κριτήρια, θα πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό να αποδείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση, οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου είναι παράλληλες.

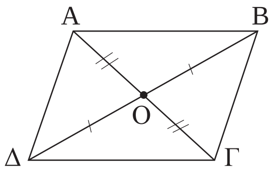


Σχήμα 10

i) Έστω ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ (σχ.10). Αν φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ, τότε σχηματίζονται τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ που είναι ίσα, γιατί ΑΒ = ΓΔ, ΑΔ = ΒΓ και ΒΔ κοινή πλευρά. Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi$, οπότε ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 11



Σχήμα 12

ii) Έστω ΑΒ// = ΓΔ (σχ.10). Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα, γιατί ΑΒ = ΓΔ, $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και η ΒΔ είναι κοινή πλευρά. Επομένως, όμοια με το i), το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

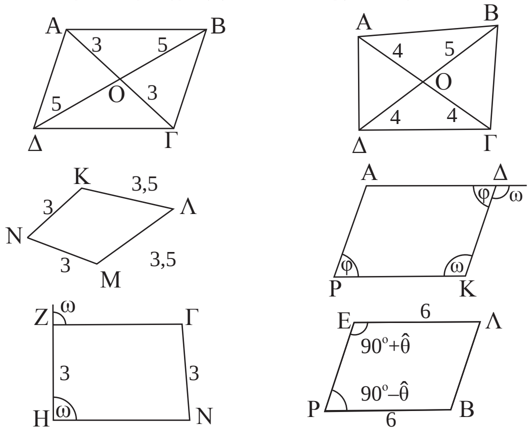
iii) Αν $\hat{A} = \hat{\Gamma} = \omega$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi$ (σχ.11) η σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 4L$ γράφεται $2\omega + 2\varphi = 4L$ ή $\varphi + \omega = 2L$. Επομένως, έχουμε ότι $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2L$, οπότε ΑΒ // ΓΔ και $\hat{A} + \hat{B} = 2L$, οπότε ΑΔ // ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

iv) Έστω ΑΟ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ (σχ.12). Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ, καθώς και τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΒΟΓ είναι ίσα. Επομένως, όμοια με το i), θα είναι ΑΒ // ΓΔ και ΑΔ // ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

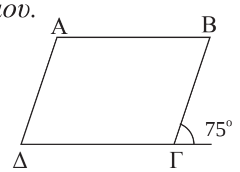
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα, ποια όχι και γιατί;*

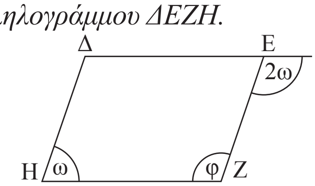


2. *Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο;*

3. *Να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου.*



4. *Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ.*



5. *Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν:*

i) Δύο απέναντι γωνίες είναι ίσες. ☐

ii) Οι διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές. ☐

iii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες. ☐

iv) Δύο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες. ☐

(Σημειώστε x σε κάθε σωστή πρόταση).

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει τη ΔΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΒΓ.*

2. *Έστω Ο το κέντρο παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Αν Ε και Ζ σημεία των ΟΑ και ΟΓ αντίστοιχα, ώστε ΟΕ = ΟΖ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο.*

3. *Έστω Ε και Ζ, τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:*

i) το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

ii) οι ΑΓ, ΒΔ και ΕΖ συντρέχουν.

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Αν η παράλληλη από το Ε προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Ζ, να αποδείξετε ότι ΑΕ = ΒΖ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε ΜΕ // ΑΒ (Ε σημείο του ΑΓ) και ΜΔ// ΑΓ (Δ σημείο του ΑΒ). Να αποδείξετε ότι ΜΔ + ΜΕ = ΑΒ.*
2. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε σημείο της ΑΓ. Φέρουμε ΔΖ//ΒΕ (Ζ σημείο του ΑΓ). Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΖ.*
3. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΓ κατά τμήμα ΓΕ = ΔΓ και τη ΔΑ κατά τμήμα ΑΖ = ΔΑ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ, Β και Ε είναι συνευθειακά.*
4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των διαμέσων ΒΔ και ΓΕ παίρνουμε σημεία Η και Ζ αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΔΗ = ΒΔ και ΖΕ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι*
   i) ΑΗ = ΑΖ,
   ii) τα σημεία Ζ, Α και Η είναι συνευθειακά.
5. *Από σημείο Α να φέρετε τέμνουσα δύο παράλληλων ευθειών με τρόπο, ώστε το μεταξύ των παραλλήλων τμήμα της να είναι ίσο με δοσμένο τμήμα λ.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ, Η και Κ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΓΗ και ΒΖ = ΔΚ. Να αποδείξετε ότι*
   i) το τετράπλευρο ΕΖΗΚ είναι παραλληλόγραμμο,
   ii) οι ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΚΖ συντρέχουν.
2. *Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΓ και επί της ημιευθείας ΔΑ θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε ΔΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι $Z\hat{\Gamma}E = 90°$.*
3. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΓ και την ΑΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ, Γ και Ε είναι συνευθειακά.*
4. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Δ της ΑΓ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΓΔ. Να αποδείξετε ότι η ΒΓ διχοτομεί τη ΔΕ.*
5. *Ένα ποταμός, του οποίου οι όχθες είναι ευθύγραμμες, διέρχεται μεταξύ δύο χωριών που απέχουν άνισες αποστάσεις από τις όχθες του. Σε ποια θέση πρέπει να κατασκευασθεί μια γέφυρα κάθετη προς τον ποταμό, ώστε τα δύο χωριά να βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις από τις αντίστοιχες εισόδους της γέφυρας;*

Είδη παραλληλογράμμων

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τα είδη των παραλληλογράμμων, δηλαδή τα παραλληλόγραμμα που έχουν και κάποιες επιπλέον ιδιότητες. Διακρίνουμε τρία είδη παραλληλογράμμων: το ***ορθογώνιο***, το ***ρόμβο*** και το ***τετράγωνο***.

5.3 Ορθογώνιο

Ορισμός

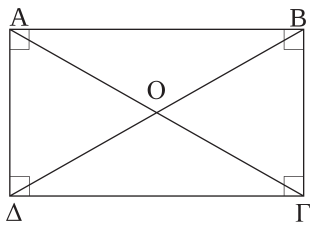
Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.

Σχήμα 13

Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, ενώ δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), προκύπτει ότι **όλες οι γωνίες του ορθογωνίου είναι ορθές.**

► Ιδιότητες ορθογωνίου

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.



Σχήμα 14

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

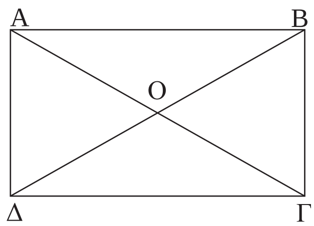
Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο. Θα αποδείξουμε ότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες (σχ.14).

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90°$, ΑΔ κοινή, ΑΒ = ΔΓ), οπότε ΑΓ = ΒΔ.

► Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο

Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

i) Είναι **παραλληλόγραμμο** και έχει **μία ορθή** γωνία.
ii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι **διαγώνιοί** του είναι **ίσες**.
iii) Έχει **τρεις** γωνίες **ορθές**.
iv) **Όλες** οι γωνίες του είναι **ίσες**.



Σχήμα 15

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του παραλληλογράμμου.

ii) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΓ = ΒΔ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα (ΑΒ = ΔΓ, ΑΓ = ΒΔ, ΑΔ κοινή), οπότε $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2\llcorner$, οπότε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 1\llcorner$. Επομένως, το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

iii) Αν έχει τρεις ορθές γωνίες θα είναι και η άλλη ορθή, αφού το άθροισμα των γωνιών κάθε τετραπλεύρου είναι $4\llcorner$.

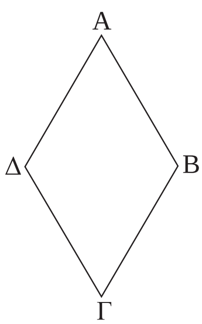
(iv) Αν όλες οι γωνίες είναι ίσες, προφανώς όλες είναι ορθές.

5.4 Ρόμβος

Ορισμός

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

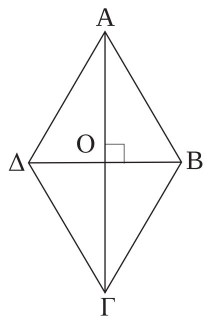
Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες προκύπτει ότι **όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες.**



Σχήμα 16

► Ιδιότητες του ρόμβου

i) **Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.**
ii) **Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.**



Σχήμα 17

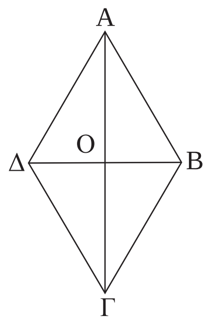
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, η διάμεσος του ΑΟ είναι ύψος του και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επομένως ΑΓ⊥ΒΔ και η ΑΓ διχοτομεί την $\hat{A}$. Όμοια η ΑΓ διχοτομεί τη $\hat{\Gamma}$ και η ΒΔ τις $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$.

► Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος

Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

i) Έχει **όλες** τις πλευρές του **ίσες**.
ii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και **δύο διαδοχικές** πλευρές του είναι **ίσες**.
iii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι διαγώνιοί του τέμνονται **κάθετα**.
iv) Είναι **παραλληλόγραμμο** και μία διαγώνιός του **διχοτομεί** μία γωνία του.



Σχήμα 18

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) και ii) Προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του ρόμβου.

iii) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΓ⊥ΒΔ.

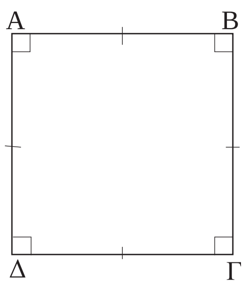
Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΑΟ είναι διάμεσος, αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Επίσης, η ΑΟ είναι και ύψος, επειδή ΑΓ⊥ΒΔ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε ΑΒ = ΑΔ. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

iv) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και ΑΓ διχοτόμος της $\hat{A}$. Τότε πάλι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές (αφού ΑΟ διχοτόμος και διάμεσος), οπότε το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

5.5 Τετράγωνο

Ορισμός

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.



Σχήμα 19

► Ιδιότητες τετραγώνου

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογωνίου και όλες τις ιδιότητες του ρόμβου. Επομένως, σε κάθε τετράγωνο:

i) Οι **απέναντι** πλευρές του είναι **παράλληλες**.
ii) **Όλες** οι πλευρές του είναι **ίσες**.
iii) **Όλες** οι γωνίες του είναι **ορθές**.
iv) Οι διαγώνιοί του είναι **ίσες**, τέμνονται **κάθετα**, **διχοτομούνται** και **διχοτομούν** τις γωνίες του.

► Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο

Για να αποδείξουμε ότι ένα **τετράπλευρο** είναι **τετράγωνο**, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι **ορθογώνιο** και **ρόμβος**. Αποδεικνύεται ότι ένα **παραλληλόγραμμο** είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

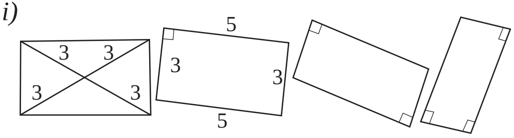
i) Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
ii) Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
iii) Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
v) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.
vi) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

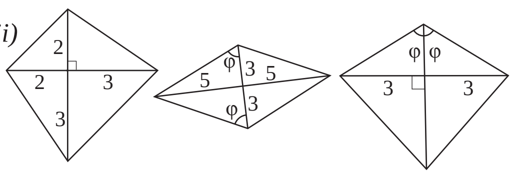
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι i) ορθογώνια, ii) ρόμβοι, iii) τετράγωνα, ποια όχι και γιατί;*

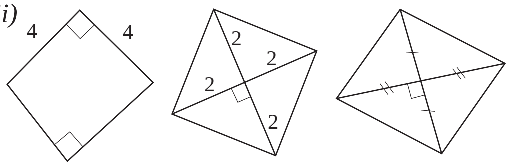
i)



ii)



iii)



2. *Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα* ***τετράπλευρο*** *είναι:*
i) Ορθογώνιο   ii) Ρόμβος

3. *Σε τι είδους τρίγωνα χωρίζονται τα παρακάτω σχήματα από τις διαγωνίους τους;*
i) Ορθογώνιο ii) Ρόμβος iii) Τετράγωνο

4. *Να αναφέρετε δύο ομοιότητες και δύο διαφορές που αφορούν πλευρές, γωνίες ή διαγωνίους μεταξύ των ζευγών των σχημάτων:*
i) Τετράγωνο – Ρόμβος
ii) Τετράγωνο – Ορθογώνιο
iii) Ορθογώνιο – Ρόμβος

5. *Σημειώστε x σε κάθε σωστή πρόταση:*
i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου δεν είναι ίσες. ☐
ii) Όλες οι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες. ☐
iii) Ένας ρόμβος με μία ορθή γωνία είναι τετράγωνο. ☐
iv) Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος. ☐

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρουμε ΑΕ⊥ΔΓ και ΓΖ⊥ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το ΑΖΓΕ είναι ορθογώνιο.*

2. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και ΒΔ = 2ΑΓ. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΟΒ και ΟΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο.*

3. *Να αποδείξετε ότι αν οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμμου δε συντρέχουν, τότε σχηματίζουν ορθογώνιο.*

4. *Να αποδείξετε ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.*

5. *Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Παίρνουμε δύο σημεία Ε και Ζ της ΑΓ, ώστε ΟΕ = ΟΖ = ΟΒ = ΟΔ. Να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι τετράγωνο.*

6. *Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε σημεία Κ, Λ, Μ και Ν αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ. Να αποδείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΒΔ και Μ το μέσο της ΒΔ. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο Ζ να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι ρόμβος.*

2. *Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ, τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΒΖ. Να αποδείξετε ότι*
i) ΑΖ = ΔΕ, ii) ΑΖ⊥ΔΕ.

3. *Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Η είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΒΕ και Θ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ, να αποδείξετε ότι το ΕΘΖΗ είναι ρόμβος.*

4. *Να αποδείξετε ότι αν δύο κάθετα τμήματα έχουν τα άκρα τους στις απέναντι πλευρές τετραγώνου, τότε είναι ίσα.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = 45°$. Από το μέσο Μ της ΓΔ φέρουμε κάθετο πάνω στη ΓΔ και έστω Ε και Ζ τα σημεία στα οποία αυτή τέμνει τις ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα (ή τις προεκτάσεις τους). Να αποδείξετε ότι το ΔΕΓΖ είναι τετράγωνο.*

2. *Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ φέρουμε ΒΕ⊥ΑΓ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $Δ\hat{B}Ε$ τέμνει τη ΓΔ στο Ζ, να αποδείξετε ότι ΒΓ = ΓΖ.*

3. *Να αποδείξετε ότι: i) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της βάσης ισοσκελούς τριγώνου από τις ίσες πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με ένα από τα ύψη του), ii) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου, που βρίσκεται στο εσωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου, από τις πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με το ύψος του).*

Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

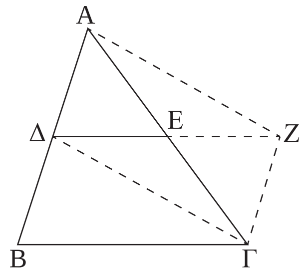
5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα (σχ.20). Θα αποδείξουμε ότι $ΔΕ // = \frac{ΒΓ}{2}$.



Σχήμα 20

Προεκτείνουμε τη ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ = ΔΕ. Το τετράπλευρο ΑΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Άρα ΑΔ = // ΓΖ, οπότε ΔΒ = // ΓΖ, αφού ΑΔ = ΔΒ. Έτσι το τετράπλευρο ΔΖΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:

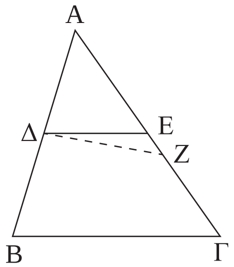
(i) ΔΖ // ΒΓ άρα ΔΕ // ΒΓ και

(ii) ΔΖ = ΒΓ ή 2ΔΕ = ΒΓ ή $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



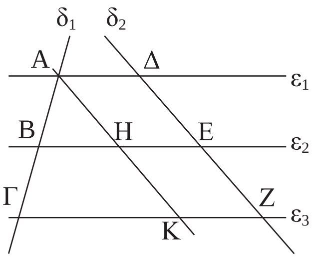
Σχήμα 21

Ας θεωρήσουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ας φέρουμε από το μέσο Δ της ΑΒ την παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ε (σχ.21). Θα αποδείξουμε ότι το Ε είναι το μέσο της ΑΓ. Έστω ότι το Ε δεν είναι μέσο της ΑΓ. Αν Ζ είναι το μέσο της ΑΓ, το τμήμα ΔΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα ΔΖ // ΒΓ. Έτσι, όμως, έχουμε από το Δ δύο παράλληλες προς τη ΒΓ, που είναι άτοπο. Άρα το Ε είναι μέσο της ΑΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ

Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



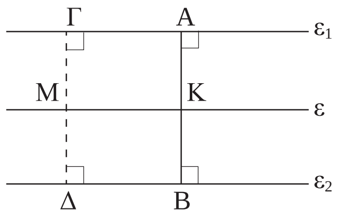
Σχήμα 22

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ οι οποίες τέμνουν την $δ_1$ στα σημεία Α, Β, Γ και ορίζουν σε αυτή τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ (σχ.22). Αν μια άλλη ευθεία $δ_2$ τέμνει τις $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, θα αποδείξουμε ότι ΔΕ = ΕΖ.

Φέρουμε ΑΚ // ΔΖ. Τότε τα τετράπλευρα ΑΔΕΗ και ΕΖΚΗ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε ΑΗ = ΔΕ (1) και ΗΚ = ΕΖ (2). Στο τρίγωνο ΑΚΓ το Β είναι το μέσο της ΑΓ και ΒΗ // ΓΚ. Άρα το Η είναι μέσο της ΑΚ, δηλαδή ΑΗ = ΗΚ (3). Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΔΕ = ΕΖ.

► Η μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ και ένα τμήμα ΑΒ = υ κάθετο προς αυτές, το οποίο έχει τα άκρα του στις



Σχήμα 23

ε_1 και ε_2. Αν από το μέσο Κ της ΑΒ φέρουμε την ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2, παρατηρούμε ότι κάθε σημείο Μ της ε **ισαπέχει** από τις ε_1 και ε_2 , αφού $ΜΓ = ΜΔ = \frac{υ}{2}$.

Αντίστροφα, αν ένα σημείο Μ ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2, το Μ τότε είναι σημείο μεταξύ των παραλλήλων και ισχύει $ΜΓ+ΜΔ = ΓΔ = υ$, οπότε $ΜΓ = ΜΔ = \frac{υ}{2}$.

Έτσι τα τετράπλευρα ΜΓΑΚ και ΜΔΒΚ είναι παραλληλόγραμμα (ΜΓ// = ΑΚ, ΜΔ // = ΚΒ), οπότε ΜΚ // ε_1, ε_2. Επομένως, το Μ ανήκει στην ευθεία ε.

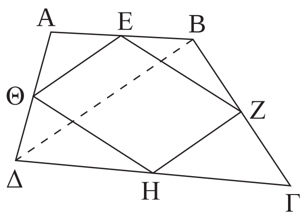
Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι:

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι μία ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2, η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δύο παράλληλες.

Η ευθεία ε λέγεται ***μεσοπαράλληλος*** των ε_1 και ε_2.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.



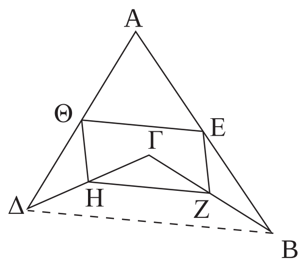
Σχήμα 24α

Απόδειξη

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ, Η, Θ των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

Φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ (σχ.24α). Παρατηρούμε ότι τα Ε και Θ είναι τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΔ, οπότε $ΕΘ = // \frac{ΒΔ}{2}$ (1).

Όμοια από το τρίγωνο ΒΓΔ προκύπτει ότι $ΖΗ = // \frac{ΒΔ}{2}$ (2).



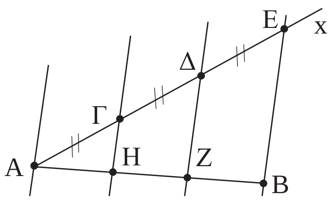
Σχήμα 24β

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι ΕΘ = // ΖΗ, οπότε το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ *Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει και σε μη κυρτό τετράπλευρο (σχ.24β).*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα (σχ.25).



Σχήμα 25

Λύση

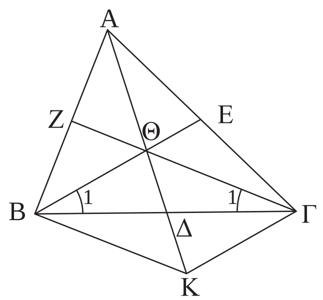
Φέρουμε μια ημιευθεία Αx και παίρνουμε σε αυτή τα ίσα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ. Φέρουμε τη ΒΕ και από τα Δ, Γ και Α παράλληλες προς αυτή, οι οποίες τέμνουν την ΑΒ στα σημεία Ζ και Η. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα ΙΙΙ, σελ. 110, θα είναι ΑΗ = ΗΖ = ΖΒ.

5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 26

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τις δύο διαμέσους ΒΕ και ΓΖ. Επειδή $\hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 < \hat{B} + \hat{\Gamma} < 2\llcorner$, οι δύο διάμεσοι τέμνονται σε ένα εσωτερικό σημείο Θ του τριγώνου. Αν η ΑΘ τέμνει τη ΒΓ στο Δ, θα αποδείξουμε ότι i) η ΑΔ είναι η τρίτη διάμεσος του τριγώνου, δηλαδή ΒΔ = ΔΓ και ii) $ΑΘ = \frac{2}{3}ΑΔ$.

i) Στην ημιευθεία ΘΔ παίρνουμε τμήμα ΘΚ = ΑΘ. Παρατηρούμε ότι τα σημεία Ε και Θ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΚΓ, οπότε $ΕΘ = // \frac{ΓΚ}{2}$ (1).

Όμοια από το τρίγωνο ΑΒΚ έχουμε $ΖΘ = // \frac{ΒΚ}{2}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ΒΕ // ΓΚ και ΓΖ // ΒΚ, δηλαδή το ΒΘΓΚ είναι παραλληλόγραμμο (3). Άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, οπότε ΒΔ = ΔΓ.

Το σημείο Θ, στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι του ΑΒΓ, λέγεται ***βαρύκεντρο*** (ή ***κέντρο βάρους***) του τριγώνου.

ii) Από το παραλληλόγραμμο ΒΘΓΚ έχουμε ακόμη

$$ΘΔ = ΔΚ = \frac{ΘΚ}{2}, \quad \text{άρα} \quad ΘΔ = \frac{ΑΘ}{2} \quad \text{ή} \quad ΑΘ = 2ΘΔ.$$

Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι

$$ΕΘ = \frac{ΓΚ}{2} = \frac{ΒΘ}{2} \quad \text{ή} \quad ΒΘ = 2ΘΕ.$$

Όμοια από τις (2) και (3) έχουμε ΓΘ = 2ΘΖ. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το βαρύκεντρο έχει την ιδιότητα να χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο τμήματα που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου. Επίσης έχουμε ότι ΑΔ = ΑΘ + ΘΔ = 2ΘΔ + ΘΔ = 3ΘΔ. Άρα

$$ΘΔ = \frac{1}{3}ΑΔ, \quad \text{οπότε} \quad ΑΘ = \frac{2}{3}ΑΔ.$$

Όμοια προκύπτει ότι $ΒΘ = \frac{2}{3}ΒΕ$ και $ΓΘ = \frac{2}{3}ΓΖ$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Η απόσταση του βαρυκέντρου Θ ενός τριγώνου ΑΒΓ από κάθε κορυφή του ισούται με τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

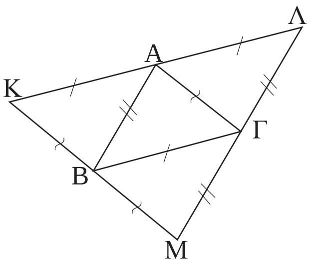
*Στην παραπάνω πρόταση θεωρήσαμε το σημείο τομής Θ των δύο διαμέσων ΒΕ και ΓΖ και αποδείξαμε ότι η ΑΘ αν προεκταθεί είναι η τρίτη διάμεσος ΑΔ. Αυτός ο τρόπος αποτελεί μια **βασική μέθοδο** για να αποδεικνύουμε ότι τρεις ευθείες **συντρέχουν** σε κάποιο σημείο.*

5.8 Το ορθόκεντρο τριγώνου

Λήμμα

Οι παράλληλες, που άγονται από τις κορυφές ενός τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές του, σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο έχει ως μέσα των πλευρών του τις κορυφές του αρχικού τριγώνου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 27

Από τις κορυφές Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές του, οι οποίες ορίζουν ένα νέο τρίγωνο ΚΛΜ (σχ.27).

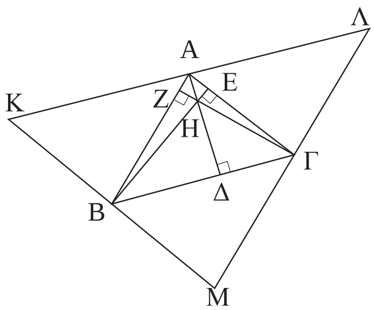
Λόγω των σχηματιζόμενων παραλληλογράμμων ΚΑΓΒ, ΛΑΒΓ και ΜΒΑΓ έχουμε: ΚΑ = ΒΓ = ΑΛ, ΛΓ = ΑΒ = ΓΜ και ΚΒ = ΑΓ = ΒΜ.

Επομένως τα σημεία Α, Β, Γ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΚΛΜ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 28

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Από τις κορυφές του Α, Β, Γ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές (σχ.28). Σύμφωνα με το Λήμμα, στο τρίγωνο ΚΛΜ τα σημεία Α, Β, Γ είναι τα μέσα των πλευρών του. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι κάθετες στις ΚΛ, ΚΜ και ΜΛ αντίστοιχα (αφού είναι κάθετες στις ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ) και μάλιστα είναι κάθετες στα μέσα τους. Δηλαδή οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου ΚΛΜ, οπότε θα διέρχονται από το ίδιο σημείο Η.

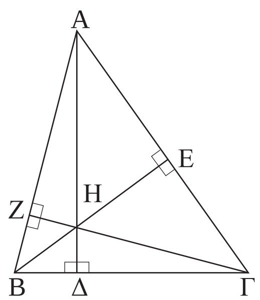
Το σημείο Η λέγεται ***ορθόκεντρο*** του τριγώνου ΑΒΓ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, το ορθόκεντρο είναι η κορυφή της ορθής γωνίας, ενώ σε αμβλυγώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο βρίσκεται εκτός του τριγώνου.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Οι κορυφές Α, Β, Γ, τριγώνου ΑΒΓ και το ορθόκεντρό του Η αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα, δηλαδή κάθε ένα από αυτά τα σημεία είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, που ορίζεται από τα άλλα τρία σημεία.



Σχήμα 29

Πράγματι οι κορυφές π.χ. Β, Γ και το ορθόκεντρο Η του τριγώνου ΑΒΓ ορίζουν το τρίγωνο ΒΗΓ.

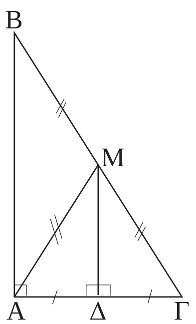
Τα ύψη ΗΔ, ΒΖ και ΓΕ του τριγώνου ΒΗΓ τέμνονται στο Α, οπότε το Α είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΗΓ.

5.9 Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Η διάμεσος οθρογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 30

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}= 90°$) και τη διάμεσό του ΑΜ (σχ.30). Θα αποδείξουμε ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

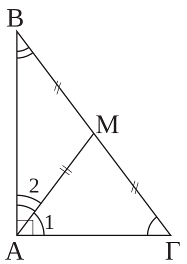
Φέρουμε τη διάμεσο ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ. Το ΜΔ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ΜΔ // ΑΒ. Αλλά $AB \perp A\Gamma$, επομένως και $M\Delta \perp A\Gamma$. Άρα, το ΜΔ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΜΓ, οπότε ΑΜ = ΜΓ, δηλαδή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή:

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 31

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διάμεσό του ΑΜ (σχ.31). Αν $AM = \frac{B\Gamma}{2}$, θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.

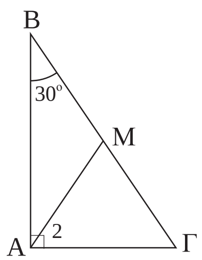
Επειδή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ έχουμε ΑΜ = ΜΓ, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (1) και ΑΜ = ΜΒ, οπότε $\hat{A}_2 = \hat{B}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$, οπότε $2\hat{A} = 2\llcorner$ ή $\hat{A} = 1\llcorner$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30^o, τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

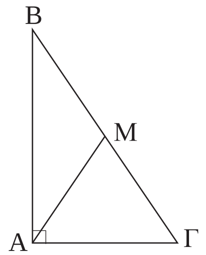
ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 32

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}= 90°$) με $\hat{B}= 30°$ (σχ.32).

Θα αποδείξουμε ότι $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$.



Σχήμα 33

Επειδή $\hat{B} = 30°$, είναι $\hat{\Gamma} = 90° - 30° = 60°$. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ και είναι $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$. Έτσι $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma} = 60°$, οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο. Επομένως $A\Gamma = M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$.

Αντίστροφο, αν στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ (σχ.33), θα αποδείξουμε ότι $\hat{B} = 30°$.

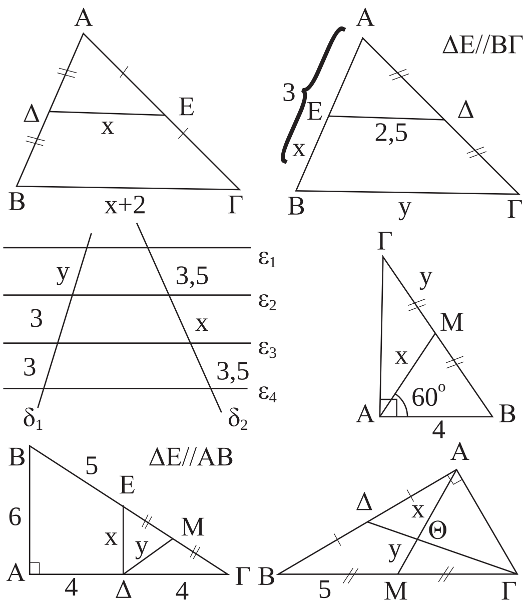
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma = A\Gamma$ (αφού $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$).
Άρα το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{\Gamma} = 60°$. Επομένως $\hat{B} = 90° - 60° = 30°$.

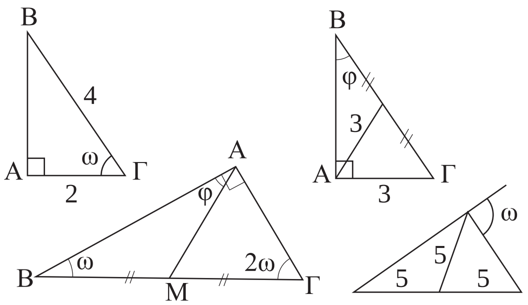
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα x και y.*

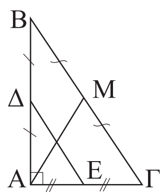


2. *Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω.*



3. *Υπάρχει τρίγωνο στο οποίο το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο ταυτίζονται;*

4. *Στο παρακάτω σχήμα να δικαιολογήσετε την ισότητα ΑΜ = ΔΕ.*



5. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ διέρχεται από το Α; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ και Ζ τυχαίο σημείο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΔΕ διχοτομεί την ΑΖ.*

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Αν Ε, Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.*

3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΜΔ = ΜΕ.*

4. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} = 30°$. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι ΕΖ=ΑΓ.*

5. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mu_\beta = \mu_\gamma$, να αποδείξετε ότι $\beta = \gamma$.*

6. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$). Προεκτείνουμε τη ΓΑ κατά τυχαίο τμήμα ΑΔ. Από το Δ φέρουμε ΔΗ⊥ΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΓΕ⊥ΔΒ.*

7. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} = 30°$ και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΕΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΕΔ. Να αποδείξετε ότι το ΑΓΕΖ είναι ρόμβος.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) και το ύψος του ΑΔ.*
   i) *Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι $E\hat{\Delta}Z = \hat{A} = 90°$.*
   ii) *Αν Μ είναι το μέσο της ΕΖ, να αποδείξετε ότι $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$.*

2. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε και Ζ των ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Αν η ΕΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Η, να αποδείξετε ότι $\Gamma H = \frac{A\Gamma}{4}$.*

3. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι $M\hat{A}\Delta = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.*

4. *Αν Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ.*

5. *Αν Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ΑΕ και ΑΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΒΔ.*

6. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ, Δ είναι το μέσο της διαμέσου ΑΜ. Αν η ΒΔ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι $AE = \frac{E\Gamma}{2}$.*

7. *Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΑΒ. Αν η ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Η και τη ΒΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι*

   i) *ΒΖ = ΖΓ,* ii) *$\Gamma H = \frac{AH}{2}$.*

8. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 30°$ η κάθετος στο μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι:*

   i) *ΜΔ = ΑΔ,* ii) *$M\Delta = \frac{AB}{3}$.*

9. *Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Η, Κ οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΕΗ⊥ΚΖ.*

10. *Τρία χωριά που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία ανήκουν στον ίδιο δήμο. Ο δήμος αποφασίζει να κατασκευάσει δρόμο (ευθεία), ο οποίος να ισαπέχει από τα τρία χωριά. Πώς θα γίνει η χάραξη του δρόμου; Πόσοι τέτοιοι δρόμοι υπάρχουν;*

Σύνθετα Θέματα

1. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του ΑΔ. Αν Ε και Ζ τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{E}Z = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.*

2. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) φέρουμε το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι αν $\hat{B} = 15°$, τότε $A\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$ και αντίστροφα.*
   *(**Υπόδειξη**: Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ).*

3. *Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ θεωρούμε το βαρύκεντρο Κ του τριγώνου ΑΒΓ και τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΓΔ και ΚΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΕΗ//ΚΖ.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} < 90°$ και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΔ. Να αποδείξετε ότι η ΔΕ διχοτομεί την πλευρά ΑΓ.*

5. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, η διχοτόμος του ΑΔ και Μ το μέσο της ΒΓ. Αν Ε είναι η προβολή του Β στη διχοτόμο ΑΔ, να αποδείξετε ότι:*
   i) *ΕΜ//ΑΓ,*
   ii) *$EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$,*
   iii) *$\Delta\hat{E}M = \frac{\hat{A}}{2}$.*

6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος του ΒΔ και Μ το μέσο του τμήματος ΓΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΔΒ. Να απο-*

δείξετε ότι η κάθετη από το Μ στην ΑΒ, η κάθετη από το Α στην ΕΓ και η ΒΔ συντρέχουν.

7. *Αν Κ και Λ είναι οι προβολές της κορυφής Α τριγώνου ΑΒΓ στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

i) Το ΑΚΒΛ είναι ορθογώνιο.

ii) Η ευθεία ΚΛ διέρχεται από το μέσο της ΑΓ.

8. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) το ύψος του ΑΔ και η διάμεσός του ΑΜ. Αν Ε, Ζ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

i) ΑΔ = ΕΖ,

ii) ΑΜ⊥ΕΖ,

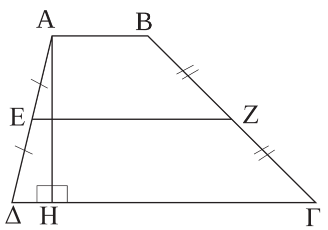
iii) Η διάμεσος ΑΜ το τμήμα ΔΖ και η παράλληλη προς την ΕΖ από το Β συντρέχουν.

Τραπέζια

5.10 Τραπέζιο

Ορισμός

Τραπέζιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.



Σχήμα 34

Οι παράλληλες πλευρές ΑΒ και ΓΔ (σχ.34) του τραπεζίου ΑΒΓΔ λέγονται ***βάσεις*** του τραπεζίου.

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στις βάσεις του τραπεζίου με τα άκρα του στους φορείς των βάσεων λέγεται ***ύψος*** του τραπεζίου. Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται ***διάμεσος*** του τραπεζίου.

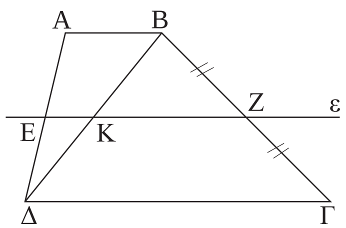
ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

Δηλαδή, αν ΕΖ διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ, τότε:

i) ΕΖ // ΑΒ, ΓΔ και ii) $ΕΖ = \dfrac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 35

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) (σχ.35), τη διαγώνιο του ΒΔ και Ε το μέσο της ΑΔ. Από το Ε φέρουμε ευθεία ε παράλληλη των ΑΒ και ΓΔ που τέμνει τις ΒΔ και ΒΓ στα Κ και Ζ αντίστοιχα. Τότε:

Στο τρίγωνο ΑΒΔ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΚ//ΑΒ, οπότε το Κ είναι το μέσο της ΒΔ και $ΕΚ = \dfrac{ΑΒ}{2}$ (1).

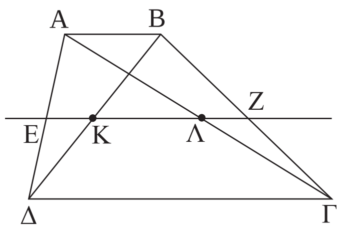
Επίσης στο τρίγωνο ΒΔΓ το Κ είναι μέσο της ΒΔ και ΚΖ // ΓΔ, οπότε το Ζ είναι το μέσο της ΒΓ και $ΚΖ = \dfrac{ΓΔ}{2}$ (2).

Επομένως η ΕΖ είναι διάμεσος του τραπεζίου και

i) ΕΖ // ΑΒ, ΓΔ (από κατασκευή).

ii) Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\text{ΕΚ} + \text{ΚΖ} = \frac{\text{ΑΒ}}{2} + \frac{\text{ΓΔ}}{2} \quad \text{ή} \quad \text{ΕΖ} = \frac{\text{ΑΒ} + \text{ΓΔ}}{2}.$$



Σχήμα 36

ΠΟΡΙΣΜΑ

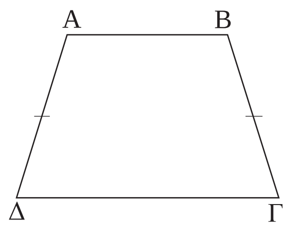
Η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αποδείξαμε παραπάνω ότι το Κ είναι μέσο της ΒΔ (σχ.35). Όμοια, αν φέρουμε την ΑΓ (σχ.36), στο τρίγωνο ΑΔΓ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΛ // ΓΔ, οπότε το Λ είναι μέσο της ΑΓ και $\text{ΕΛ} = \frac{\text{ΓΔ}}{2}$ (3).

Επομένως, η διάμεσος ΕΖ του τραπεζίου διέρχεται από τα μέσα Κ, Λ των διαγωνίων του και προφανώς ΚΛ // ΑΒ, ΓΔ. Επίσης από τις (1) και (3) προκύπτει ότι:

$$\text{ΕΛ} - \text{ΕΚ} = \frac{\text{ΓΔ}}{2} - \frac{\text{ΑΒ}}{2} \quad \text{ή} \quad \text{ΚΛ} = \frac{\text{ΓΔ} - \text{ΑΒ}}{2} \ (\text{με ΓΔ} > \text{ΑΒ}).$$

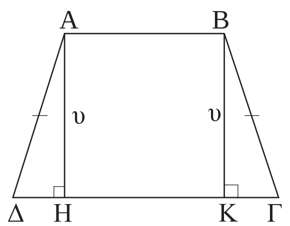


Σχήμα 37

5.11 Ισοσκελές τραπέζιο

Ορισμός

Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.



Σχήμα 38

► Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:

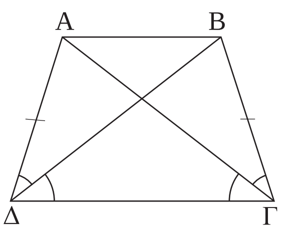
i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.

ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ). Φέρουμε τα ύψη ΑΗ και ΒΚ. Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΒΚΓ είναι ίσα ($\hat{\text{Η}} = \hat{\text{Κ}} = 90°$, ΑΔ = ΒΓ και ΑΗ = ΒΚ = υ), οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$. Επειδή $\hat{\text{Α}} + \hat{\Delta} = 180°$ και $\hat{\text{Β}} + \hat{\Gamma} = 180°$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), έχουμε και $\hat{\text{Α}} = \hat{\text{Β}}$.

ii) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ (σχ.39) είναι ίσα (ΑΔ = ΒΓ, ΓΔ κοινή και $\text{Α}\hat{\Delta}\Gamma = \text{Β}\hat{\Gamma}\Delta$), οπότε ΑΓ = ΒΔ.



Σχήμα 39

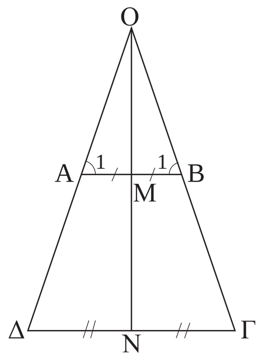
► Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις.

i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.
ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχθεί ότι σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο:
i) αν προεκτείνουμε τις μη παράλληλες πλευρές του σχηματίζονται δύο ισοσκελή τρίγωνα,
ii) η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι μεσοκάθετος της κάθε βάσης.



Σχήμα 40

Απόδειξη

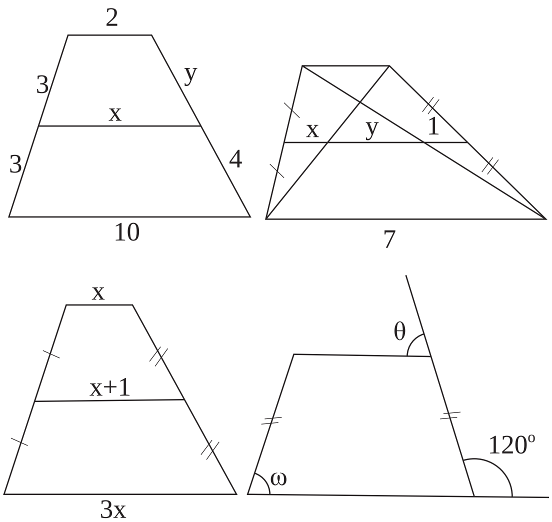
i) Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ) και Ο το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ. Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ είναι ισοσκελή, αφού $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ (ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο).

ii) Η μεσοκάθετος ε της βάσης ΑΒ διέρχεται από το Ο, επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές. Η ε είναι κάθετος και στη ΓΔ επειδή ΓΔ//ΑΒ. Αφού η ε διέρχεται από το Ο, είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΟΓΔ, άρα μεσοκάθετος και στη ΓΔ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

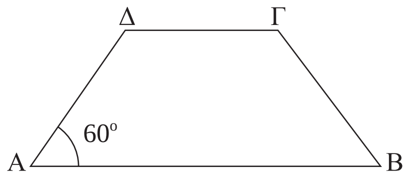
1. *Από τα παρακάτω τραπέζια να βρείτε τα x, y, ω και θ.*



2. *Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα* ***τετράπλευρο*** *είναι ισοσκελές τραπέζιο;*

3. *Τι ονομάζεται διάμεσος τραπεζίου; Ποιες ιδιότητες έχει;*

4. *Στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι: $AB = 5x$, $\Delta\Gamma = 3x$ και $\hat{A} = 60°$. Η περίμετρος του τραπεζίου είναι:*



i) 10x ii) 11x iii) 12x
iv) 13x v) 14x

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και η διάμεσός του ΕΖ. Αν οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ, ΒΓ τέμνονται στο Κ και Η, Θ είναι τα μέσα των ΚΑ και ΚΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα Ε, Ζ, Η, Θ είναι κορυφές τραπεζίου.*

2. Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), να αποδείξετε ότι το ΔΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
3. Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) τέμνονται στο Ο. Αν Ε, Ζ, Η, Θ είναι τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το ύψος του ΑΕ. Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΚΛΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
5. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ < ΓΔ και τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ. Να αποδείξετε ότι $ΔΕ = ΓΖ = \dfrac{ΓΔ - ΑΒ}{2}$.
6. Από την κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία ε που δεν τέμνει το τρίγωνο και ας είναι ΒΒ' και ΓΓ' οι αποστάσεις των Β και Γ από την ευθεία ε. Αν Μ είναι το μέσο της Β'Γ' και Κ το μέσο της διαμέσου ΑΔ να αποδείξετε ότι $ΜΚ = \dfrac{ΑΔ}{2}$.
7. Αν σε τραπέζιο η μία βάση είναι διπλάσια της άλλης, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι χωρίζουν τη διάμεσο σε τρία ίσα τμήματα.
8. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ = 3ΑΒ και Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων του ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το ΑΚΛΒ είναι παραλληλόγραμμο. Πότε αυτό είναι ορθογώνιο;
9. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με $ΓΔ = \dfrac{3}{2}ΑΒ$. Αν Ε, Ζ, Η είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΑΒΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. Αν η προέκταση της ΑΗ τέμνει τη ΓΔ στο Θ, τότε ΘΔ = ΔΓ – ΑΒ.
10. Αν Α', Β', Γ', Δ', Κ' είναι οι προβολές των κορυφών και του κέντρου Κ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα σε ευθεία ε που αφήνει όλες τις κορυφές του προς το ίδιο μέρος της, να αποδείξετε ότι ΑΑ' + ΒΒ' + ΓΓ' + ΔΔ' = 4ΚΚ'.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ(ΑΒ//ΓΔ) η διχοτόμος της γωνίας του Β τέμνει τη διάμεσο του ΕΖ στο Η. Να αποδείξετε ότι $Β\hat{Η}Γ = 90°$.
2. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) Μ είναι το μέσο της ΑΒ. Αν η μεσοκάθετος της ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η παράλληλη από το Ζ προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Η, να αποδείξετε ότι ΓΗ = ΑΖ.
3. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90°$ και $\hat{Β} = 120°$. Αν ΑΒ = 2α και ΒΓ = α να υπολογίσετε τη διάμεσο ΕΖ, ως συνάρτηση του α.
4. Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ, η μία από τις μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ είναι ίση με το άθροισμα των βάσεων. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $Α\hat{Μ}Δ = 90°$.
5. Από το μέσο Ε της πλευράς ΒΓ ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) φέρουμε παράλληλη προς την ΑΔ που τέμνει τη ΔΓ στο Μ. Να αποδείξετε ότι ΒΜ⊥ΔΓ.
6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Σύνθετα Θέματα

1. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) έχουμε ΑΔ = ΑΒ + ΓΔ. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Α}$ και $\hat{Δ}$ τέμνονται στη ΒΓ.
2. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90°$ και ΒΓ = 2ΓΔ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $Α\hat{Μ}Γ = 3Μ\hat{Α}Β$.
3. Μια ευθεία ε διέρχεται από την κορυφή Δ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και έχει εκατέρωθεν αυτής τις κορυφές Β και Γ. Αν Α', Β' και Γ' οι προβολές των Α, Β και Γ αντίστοιχα στην ευθεία ε, να αποδείξετε ότι ΑΑ' – ΓΓ' = ΒΒ' (με ΑΑ' > ΓΓ').
4. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90°$) και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Από το μέσο Ζ του ΑΔ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΓ που τέμνει τη ΒΓ στο Η. Αν $ΖΗ = \dfrac{3}{8}ΒΓ$, να υπολογισθεί η γωνία $\hat{Β}$.
5. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ < ΓΔ, έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι
   i) αν ΔΜ = ΔΓ και η παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ τέμνει τη ΔΜ στο Ε, τότε ΑΜ = ΒΕ,
   ii) αν Ε είναι το μέσο της ΔΜ, τότε $ΑΕ = \dfrac{3}{4}ΒΓ$.

5.12 Αξιοσημείωτες ευθείες και κύκλοι τριγώνου

ΣΧΟΛΙΟ

Για να αποδείξουμε ότι υπάρχουν κάποια από τα αξιοσημείωτα σημεία τριγώνου (βαρύκεντρο, ορθόκεντρο κτλ.) καθώς και τις βασικές τους ιδιότητες χρησιμοποιήσαμε τη θεωρία των παραλληλογράμμων που στηρίζεται στο αίτημα παραλληλίας (§4.2).

Είδαμε προηγούμενα (§4.5 και §5.7 - §5.8) ότι σε ένα τρίγωνο οι μεσοκάθετοι των πλευρών του, οι διχοτόμοι των γωνιών του, οι διάμεσοι και τα ύψη του αποτελούν τριάδες συντρεχουσών ευθειών.

Ανακεφαλαιώνοντας, σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ αποδείξαμε ότι **διέρχονται από το ίδιο σημείο:**

- Οι μεσοκάθετοι των τριών πλευρών του. Το κοινό σημείο Ο λέγεται **περίκεντρο** του ΑΒΓ και ο κύκλος (Ο, ΟΑ) λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου.
- Οι διχοτόμοι των τριών γωνιών του. Το κοινό σημείο Ι λέγεται **έγκεντρο** του ΑΒΓ και ο κύκλος με κέντρο το Ι και ακτίνα την κοινή απόσταση του Ι από τις τρεις πλευρές του, λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου.
- Οι τρεις διάμεσοί του. Το κοινό σημείο τους Θ λέγεται **βαρύκεντρο** του ΑΒΓ.
- Τα τρία ύψη του. Το κοινό σημείο τους Η λέγεται **ορθόκεντρο** του ΑΒΓ.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($\beta \neq \gamma$) με $\hat{A} = 60°$, τα ύψη του ΒΔ, ΓΕ και τα μέσα Μ, Ν των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΜΕ = ΝΔ.*

2. *Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2 και σημείο Α της ε_1. Φέρουμε $AK \perp \varepsilon_2$. Αν Β σημείο της ε_2 και μια ευθεία, που διέρχεται από το Β, τέμνει τις ΑΚ και ε_1 στα Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΔΕ = 2ΑΒ, να αποδείξετε ότι $A\hat{B}K = 3E\hat{B}K$.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, Δ το μέσο της ΑΒ και σημείο Ε της ημιευθείας ΔΒ, ώστε $ΔΕ = \frac{ΑΓ}{2}$. Από τα Β και Ε φέρουμε κάθετες στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, οι οποίες τέμνουν την ΑΓ στα Β′ και Ε′ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:*

   i) $B'E' = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$.

   ii) *Η ευθεία ΕΕ′ διέρχεται από το μέσο της ΒΓ.*

4. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2ΒΓ, $\hat{B} > 60°$ και το ύψος του ΑΕ προς τη ΒΓ (ΑΕ⊥ΒΓ). Αν Ζ, Η είναι τα μέσα των ΓΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

   i) *το ΗΒΓΖ είναι ρόμβος,*

   ii) *η ΖΕ είναι διχοτόμος της $H\hat{E}\Gamma$,*

   iii) *το ΗΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο,*

   iv) $Δ\hat{Z}E = 3Z\hat{E}\Gamma$.

5. *Ευθεία ε αφήνει τις κορυφές τριγώνου ΑΒΓ προς το ίδιο μέρος της. Αν Α′, Β′, Γ′, Κ′ οι προβολές των Α, Β, Γ και του βαρυκέντρου Κ αντίστοιχα στην ε, να αποδείξετε ότι ΑΑ′ + ΒΒ′ + ΓΓ′ = 3ΚΚ′.*

6. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Δ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε ΔΕ⊥ΑΓ. Αν Ζ το μέσο του ΕΓ, να αποδείξετε ότι:*

   i) *ΔΖ//ΒΕ,*

   ii) *ΑΗ⊥ΒΕ, όπου Η το μέσο του ΔΕ.*

7. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Μ το μέσο της ΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν*

Κ και Λ είναι τα κέντρα των ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.

8. *Δίνεται τετράγωνο πλευράς α και κέντρου Ο. Στη διαγώνιο ΑΓ παίρνουμε σημείο Μ, ώστε* $ΓΜ = \frac{ΑΓ}{4}$. *Φέρουμε τη ΒΜ που τέμνει τη ΓΔ στο Ε και ΟΗ κάθετη στη ΒΓ, η οποία τέμνει τη ΒΕ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:*

i) $ΟΖ = \frac{α}{3}$,

ii) *το ΟΖΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.*

9. *Οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ και ΒΓ τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα στο Ο. Αν Κ, Λ τα μέσα των βάσεων ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

i) *τα σημεία Ο, Κ, Λ είναι συνευθειακά,*

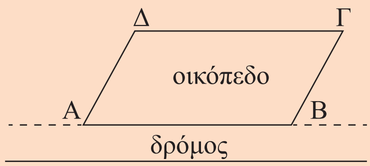
ii) $ΚΛ = \frac{ΔΓ - ΑΒ}{2}$ *(με ΔΓ > ΑΒ).*

iii) *αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, τότε το ΚΕΛΖ είναι ορθογώνιο.*

10. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ και το μέσο Μ του ΕΔ. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του Μ από τη ΒΓ είναι ίση με το άθροισμα των αποστάσεων του από τις ΑΒ, ΑΓ.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1. *Δύο αδέλφια κληρονόμησαν ένα οικόπεδο σχήματος παραλληλογράμμου, το οποίο έχει την πλευρά ΑΒ παράλληλη προς δημόσιο δρόμο που διέρχεται μπροστά από το οικόπεδο. Πώς θα μοιρασθεί δίκαια το οικόπεδο μεταξύ των δύο αδελφών;*



2. *Έχουμε 4 ίσα ορθογώνια τρίγωνα. Τοποθετώντας κατάλληλα το ένα τρίγωνο δίπλα στο άλλο, τι είδους τετράπλευρα κατασκευάζουμε; Να γίνουν τα σχήματα.*

3. *Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα έχουν κέντρο συμμετρίας, ποια έχουν άξονες συμμετρίας και πόσους. Να γίνουν τα σχήματα και να βρεθεί το συμμετρικό των κορυφών τους και των πλευρών τους.*

i) *παραλληλόγραμμο*

ii) *ορθογώνιο*

iii) *ρόμβος*

iv) *τετράγωνο*

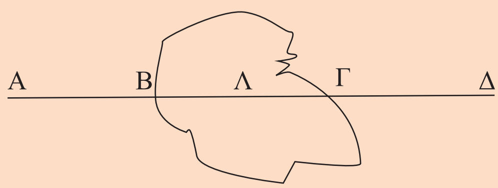
v) *τραπέζιο*

vi) *ισοσκελές τραπέζιο*

4. *Θεωρούμε ευθεία ε και ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να υπολογίσετε την απόσταση του μέσου Μ του τμήματος, ως συνάρτηση των αποστάσεων των άκρων του Α και Β από την ευθεία ε. (**Υπόδειξη**: Να διακρίνετε περιπτώσεις για τις διάφορες θέσεις των Α και Β ως προς την ευθεία ε).*

ΕΡΓΑΣΙΑ

*Σε μια πεδιάδα υπάρχει λόφος Λ, τον οποίο πρόκειται να διασχίσει **ευθεία** σιδηροδρομική γραμμή ΑΒΓΔ. Πώς ο μηχανικός θα χαράξει την προέκταση ΓΔ αυτής πίσω από το λόφο, πριν να γίνει η διάνοιξη της σήραγγας;*

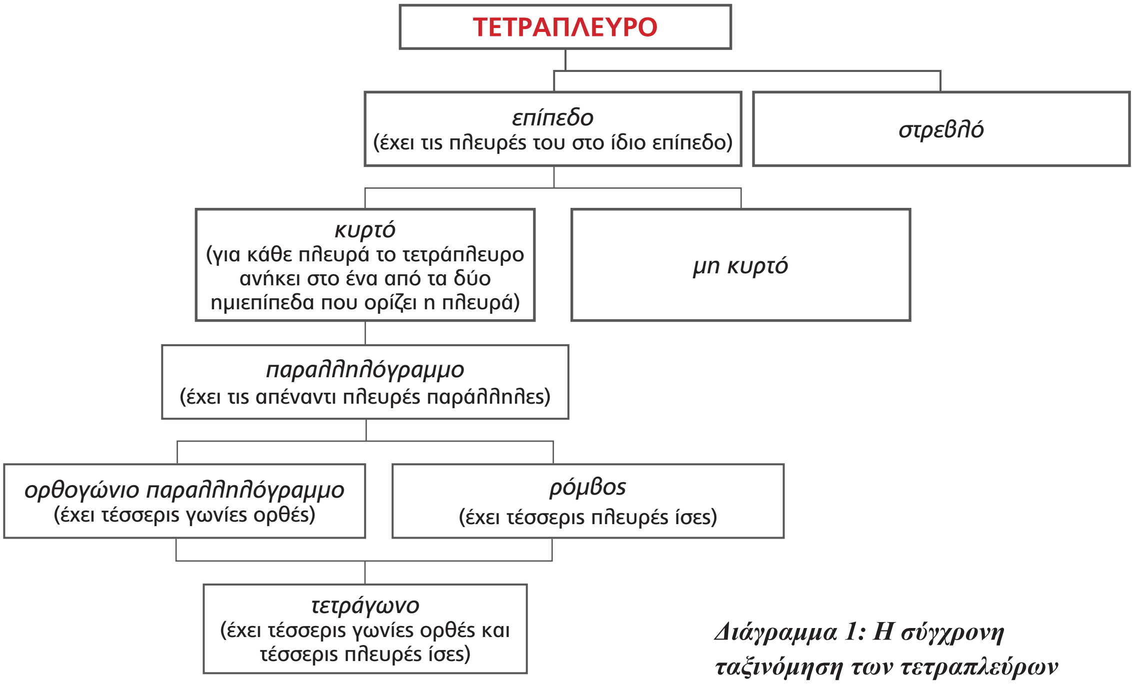


ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η έννοια του τετραπλεύρου

Η πρώτη υποδιαίρεση των τετραπλεύρων σήμερα είναι σε *επίπεδα* και *στρεβλά*, ανάλογα με το αν οι κορυφές τους βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή όχι. Τα επίπεδα τετράπλευρα, με τη σειρά τους, υποδιαιρούνται σε *κυρτά* και *μη κυρτά*, ανάλογα με το αν η κάθε πλευρά τους αφήνει το σχήμα εξ ολοκλήρου στο ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η πλευρά αυτή ή όχι. Μία ειδική περίπτωση επιπέδου κυρτού τετραπλεύρου είναι το παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του οποίου είναι παράλληλες.

Τέλος, διακρίνουμε τρία είδη παραλληλογράμμων (Διάγραμμα 1):



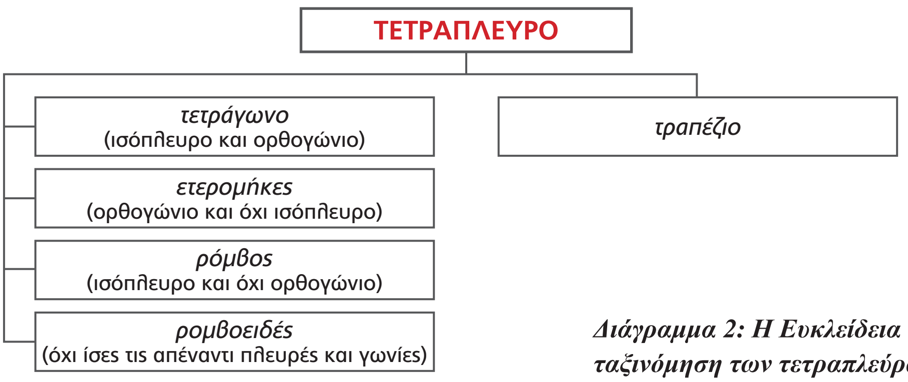
Διάγραμμα 1: Η σύγχρονη ταξινόμηση των τετραπλεύρων

(α) το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που έχει τέσσερις γωνίες ορθές,

(β) ο ρόμβος που έχει τέσσερις πλευρές ίσες,

(γ) το τετράγωνο, που έχει τέσσερις γωνίες ορθές και τέσσερις πλευρές ίσες.

Όμως η ταξινόμηση αυτή δε διαμορφώθηκε εξ αρχής στην ιστορία της Γεωμετρίας. Ο Ευκλείδης π.χ. στα «Στοιχεία» του προτείνει μια άλλη ταξινόμηση (Διάγραμμα 2).

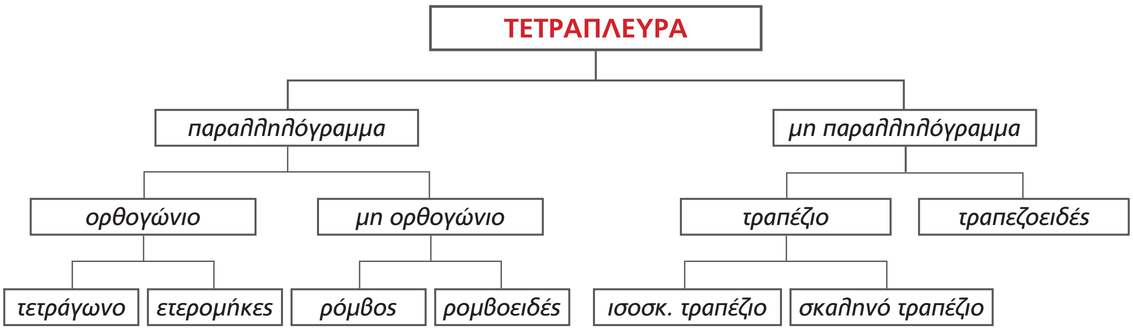


Διάγραμμα 2: Η Ευκλείδεια ταξινόμηση των τετραπλεύρων

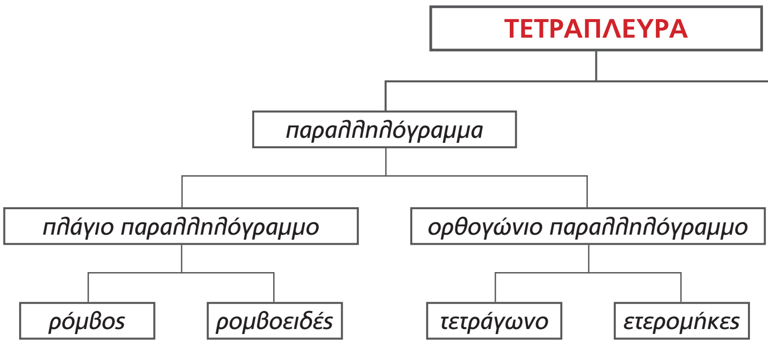
Η ταξινόμηση αυτή δε χρησιμοποιεί ως κριτήριο την έννοια της παραλληλίας, η οποία στα «Στοιχεία» εισάγεται αργότερα. Επίσης δε φαίνεται να στηρίζεται σε κάποια ενιαία αρχή. Στις τρεις πρώτες περιπτώσεις φαίνεται ότι λαμβάνει ως βάση τα κατηγορήματα «έχει ίσες πλευρές» και «έχει ορθές γωνίες» και τις αρνήσεις τους: ορθογώνιο και ισόπλευρο είναι το *τετράγωνο*, ορθογώνιο και όχι ισόπλευρο το *ετερομήκες* (δηλαδή το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο), ισόπλευρο και όχι ορθογώνιο ο *ρόμβος*. Όμως, η έννοια του *ρομβοειδούς* (δηλαδή του πλάγιου παραλληλογράμμου) στηρίζεται στην έννοια της ισότητας των απέναντι πλευρών και των γωνιών και όχι στην παραλληλία των απέναντι πλευρών. *Τραπέζιο* ονομάζει όχι ό,τι σήμερα εννοούμε με τον όρο αυτό, δηλαδή τετράπλευρο με δύο μόνο πλευρές παράλληλες, αλλά οποιοδήποτε τετράπλευρο. Ο όρος τραπέζιο, με τη σύγχρονη έννοια, απαντάται αργότερα στον Αρχιμήδη.

Η ταξινόμηση όμως αυτή αποδεικνύεται μη λειτουργική και μάλλον άβολη. Ο ίδιος ο Ευκλείδης μάλιστα δε χρησιμοποιεί ποτέ στα «Στοιχεία» του τις έννοιες του ετερομήκους, του ρόμβου και του ρομβοειδούς. Παρόλα αυτά, η ταξινόμηση αυτή απαντάται και σε μεταγενέστερους μαθηματικούς, ακόμα και του Αραβικού κόσμου, όπως π.χ. στη διαπραγμάτευση της Γεωμετρίας του αλ-Χουαρίζμι. Όμως υπήρχαν και μαθηματικοί που προσπάθησαν να τροποποιήσουν την ταξινόμηση του Ευκλείδη. Ο Πρόκλος αποδίδει στον Ποσειδώνιο μια πιο ολοκληρωμένη ταξινόμηση, η οποία απαντάται επίσης στον Ήρωνα (Διάγραμμα 3).

Μια άλλη προσπάθεια διόρθωσης της Ευκλείδειας ταξινόμησης απαντάται το 16ο αι. στη «Γεωμετρία» (1569) του Πέτρου Ράμου (Petrus Ramus ή Pierre de la Ramée) (Διάγραμμα 4). Η ταξινόμηση του Ράμου φαίνεται να στηρίζεται στη διχοτομική διαίρεση του πλάτους των εννοιών.



Διάγραμμα 3: Η ταξινόμηση των τετραπλεύρων κατά τον Ποσειδώνιο και τον Ήρωνα



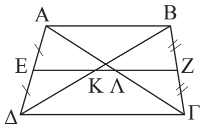
Διάγραμμα 4: Η ταξινόμηση του Ράμου

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Έχει δύο παράλληλες πλευρές

Τραπέζιο

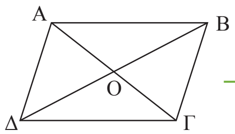


Ιδιότητες

- $EZ \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$
- $EZ = \dfrac{AB + \Gamma\Delta}{2}$
- $K\Lambda = \dfrac{\Gamma\Delta - AB}{2}$

Απέναντι πλευρές παράλληλες

Παραλληλόγραμμο



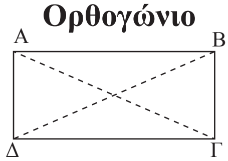
Ιδιότητες

- $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$
- $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$
- $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$
- $AO = O\Gamma$ και $BO = O\Delta$

Κριτήρια

- Καθεμιά από τις ιδιότητες
- Δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες

Ορθογώνιο



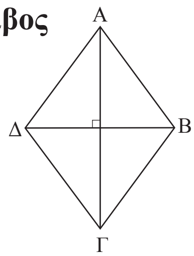
Κριτήρια

- Μια γωνία ορθή
- $A\Gamma = B\Delta$

Επιπλέον ιδιότητες

- $A\Gamma = B\Delta$
- $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$

Ρόμβος



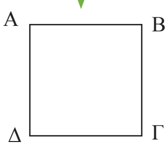
Κριτήρια

- Δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες
- $A\Gamma \perp B\Delta$
- Μία διαγώνιος διχοτομεί μία γωνία του

Επιπλέον ιδιότητες

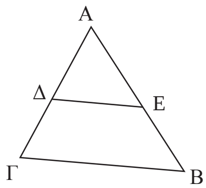
- $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$
- $A\Gamma \perp B\Delta$
- Οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του

Τετράγωνο



Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

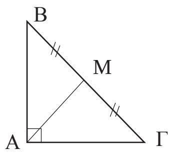
Τρίγωνο →



Αν Δ, Ε μέσα ΑΒ, ΑΓ, τότε $ΔΕ // = \frac{ΒΓ}{2}$.

Αν Δ μέσο ΑΒ και ΔΕ//ΒΓ τότε Ε μέσο ΑΓ.

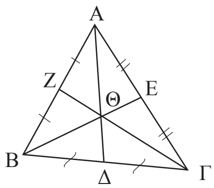
Ορθογώνιο Τρίγωνο →



$\hat{Α} = 90^{\circ} \Leftrightarrow ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Αν $\hat{Α} = 90^{\circ}$, τότε: $\hat{Β} = 30^{\circ} \Leftrightarrow ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Βαρύκεντρο τριγώνου →



$ΑΘ = \frac{2}{3}ΑΔ, \; ΒΘ = \frac{2}{3}ΒΕ, \; ΓΘ = \frac{2}{3}ΓΖ$

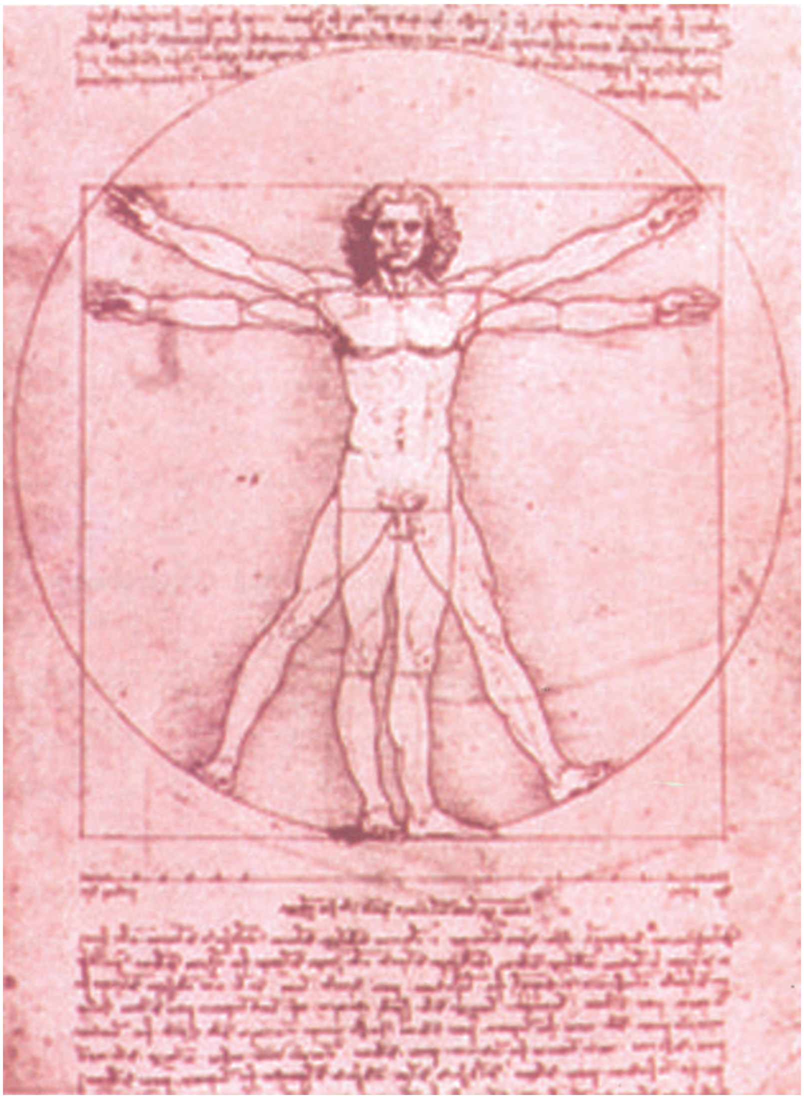
Ορθόκεντρο τριγώνου → Σημείο τομής υψών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

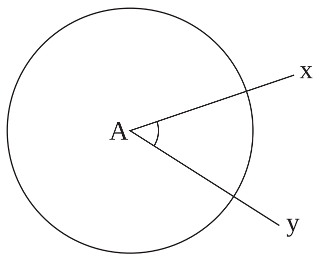
ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε αρχικά την έννοια της εγγεγραμμένης γωνίας και τη σχέση της με την αντίστοιχη επίκεντρη καθώς και με τη γωνία χορδής και εφαπτομένης. Έτσι, θα μας δοθεί η δυνατότητα αναλυτικής μελέτης βασικών γεωμετρικών τόπων στον κύκλο.

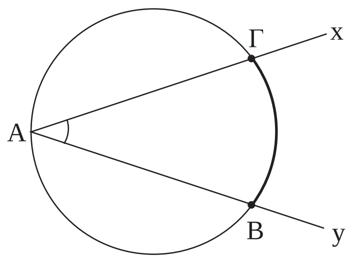
Τέλος, θα μελετήσουμε τα εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα καθώς και συγκεκριμένες γεωμετρικές κατασκευές που γίνονται με τη βοήθεια γεωμετρικών τόπων.



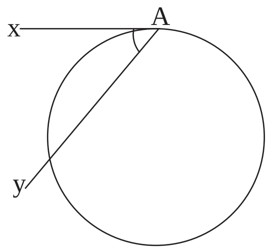
Σχέδιο και σημειώσεις του Ιταλού ζωγράφου της Αναγέννησης Leonardo da Vinci (1452-1519), από το Architectura de Vitruve, περίπου 1492.



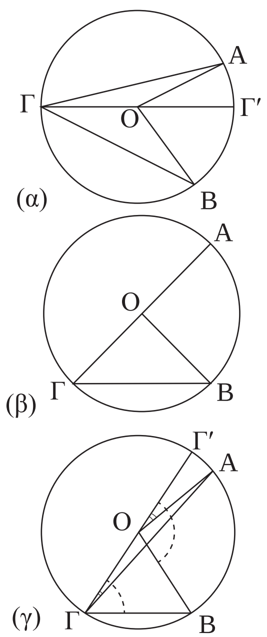
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Εγγεγραμμένη γωνία

6.1 Εισαγωγικά - Ορισμοί

Δίνεται μία κυρτή γωνία $x\hat{A}y$ και ένας κύκλος (O, R). Οι σχετικές θέσεις τους καθορίζονται από τη θέση της κορυφής της και των πλευρών της:

i) Αν η κορυφή είναι το κέντρο του κύκλου (σχ.1), τότε η γωνία λέγεται επίκεντρη, όπως είδαμε στη §2.18.

ii) Αν η κορυφή (σχ.2) είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουσες του κύκλου, τότε η γωνία λέγεται ***εγγεγραμμένη*** γωνία του κύκλου.

Το τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$ που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται ***αντίστοιχο τόξο*** της ή διαφορετικά λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{A}$ ***βαίνει*** στο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$.

iii) Αν η κορυφή είναι σημείο του κύκλου, η μία της πλευρά είναι τέμνουσα και η άλλη εφαπτομένη του κύκλου (σχ.3), τότε η γωνία λέγεται ***γωνία χορδής και εφαπτομένης.***

6.2 Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης

Η σχέση μίας εγγεγραμμένης και μίας επίκεντρης γωνίας που βαίνουν στο ίδιο τόξο δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω κύκλος (O, R) και ένα τόξο του $\overset{\frown}{AB}$. Ας θεωρήσουμε την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ και σημείο Γ του κύκλου που δεν ανήκει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Τότε θα αποδείξουμε ότι $A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B$.

i) Ας μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου το κέντρο O του κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό της εγγεγραμμένης γωνίας $A\hat{\Gamma}B$ (σχ.4α). Έστω Γ′ το αντιδιαμετρικό σημείο του Γ. Το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισοσκελές, επομένως $O\hat{A}\Gamma = O\hat{\Gamma}A$. Η $\Gamma'\hat{O}A$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΟΓ, επομένως $\Gamma'\hat{O}A = 2O\hat{\Gamma}A$ και όμοια έχουμε ότι $\Gamma'\hat{O}B = 2O\hat{\Gamma}B$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω ισότητες έχουμε ότι

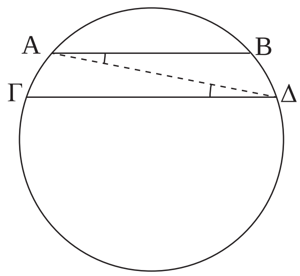
$$A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B.$$

ii) Ας εξετάσουμε κατόπιν την περίπτωση όπου το Ο ανήκει σε μία πλευρά της εγγεγραμμένης γωνίας $A\hat{\Gamma}B$ (σχ.4β). Η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου ΓΟΒ, οπότε $A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B$.

iii) Όμοια με τις προηγούμενες περιπτώσεις (σχ.4γ).

ΣΧΟΛΙΟ

Από το πόρισμα (iii) συμπεραίνουμε εύκολα ότι τα τόξα που περιέχονται μεταξύ παράλληλων χορδών είναι ίσα (σχ.5) και αντίστροφα.



Σχήμα 5

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

i) Το μέτρο μίας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

ii) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

iii) Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα.

6.3 Γωνία χορδής και εφαπτομένης

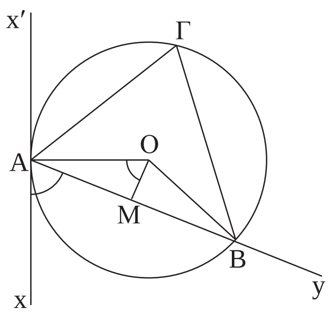
Η σχέση μίας γωνίας χορδής και εφαπτομένης με την εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι η γωνία χορδής και εφαπτομένης $x\hat{A}y$ είναι οξεία (σχ.6) και $A\hat{\Gamma}B$ μια τυχαία εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής ΑΒ. Γνωρίζουμε ότι $A\hat{\Gamma}B = \dfrac{A\hat{O}B}{2}$. Φέρουμε το απόστημα ΟΜ, οπότε $A\hat{O}M = M\hat{O}B = \dfrac{A\hat{O}B}{2} = A\hat{\Gamma}B$. Αλλά $x\hat{A}y = A\hat{O}M$ ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές. Επομένως $x\hat{A}y = A\hat{\Gamma}B$.



Σχήμα 6

Αν η γωνία χορδής και εφαπτομένης είναι αμβλεία, η απόδειξη είναι ανάλογη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Μία γωνία που η κορυφή της ανήκει στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό κύκλου και οι πλευρές της είναι τέμνουσες του κύκλου λέγεται *γωνία δύο τεμνουσών* και εκφράζεται ως συνάρτηση των εγγεγραμμένων γωνιών, που σχηματίζουν οι πλευρές της με τον κύκλο.

i) Ας θεωρήσουμε γωνία $x\hat{A}y$, όπου η κορυφή της Α είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (σχ.7). Οι πλευρές της Αx, Αy και οι προεκτάσεις τους τέμνουν τον κύκλο στα σημεία B_1, Γ_1 και B_2, Γ_2 αντίστοιχα. Τότε, ισχύει ότι η γωνία $x\hat{A}y$ ισούται με το άθροισμα των εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στα τόξα που περιέχει η $x\hat{A}y$ και η κατακορυφήν της, δηλαδή:

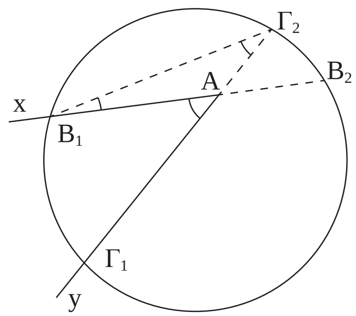
$$x\hat{A}y = A\hat{B}_1\Gamma_2 + B_1\hat{\Gamma}_2 A.$$

ii) Ας θεωρήσουμε γωνία $x\hat{A}y$ όπου η κορυφή της Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (σχ.8). Οι πλευρές της Αx, Αy τέμνουν τον κύκλο στα σημεία B_1, B_2 και Γ_1, Γ_2 αντίστοιχα. Τότε ισχύει ότι η γωνία $x\hat{A}y$ ισούται με τη διαφορά των εγγεγραμμένων γωνιών, που βαίνουν στα τόξα του κύκλου που περιέχει η $x\hat{A}y$, δηλαδή

$$x\hat{A}y = B_2\hat{B}_1\Gamma_2 - B_1\hat{\Gamma}_2\Gamma_1, \text{ όπου } B_2\hat{B}_1\Gamma_2 > B_1\hat{\Gamma}_2\Gamma_1.$$

Απόδειξη

i) Η $x\hat{A}y$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B_1A\Gamma_2$, επομένως ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, δηλαδή $x\hat{A}y = A\hat{B}_1\Gamma_2 + B_1\hat{\Gamma}_2 A$.

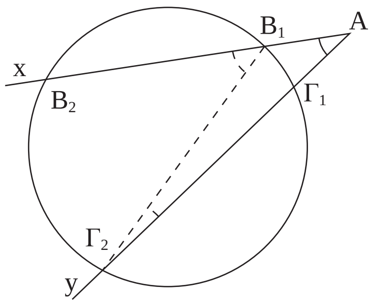


Σχήμα 7

ΣΧΟΛΙΟ

$$x\hat{A}y = \frac{\overset{\frown}{B_1\Gamma_1}}{2} + \frac{\overset{\frown}{B_2\Gamma_2}}{2}.$$

ii) Η γωνία $B_2\hat{B}_1\Gamma_2$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B_1A\Gamma_2$, επομένως $B_2\hat{B}_1\Gamma_2 = x\hat{A}y + A\hat{\Gamma}_2B_1$ ή $x\hat{A}y = B_2\hat{B}_1\Gamma_2 - B_1\hat{\Gamma}_2\Gamma_1$.



Σχήμα 8

ΣΧΟΛΙΟ

$$x\hat{A}y = \frac{\overset{\frown}{B_2\Gamma_2}}{2} - \frac{\overset{\frown}{B_1\Gamma_1}}{2}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

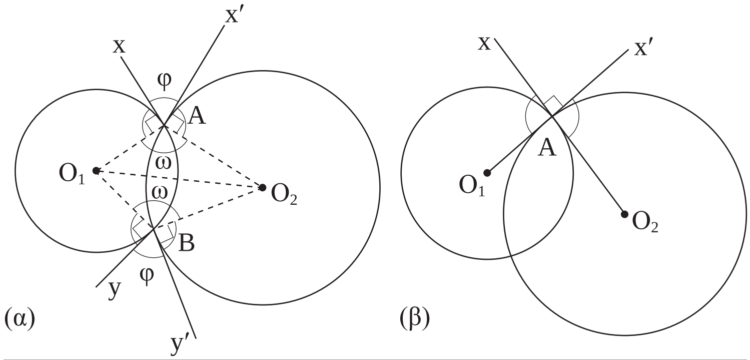
Θεωρούμε δύο τεμνόμενους κύκλους και φέρουμε τις εφαπτόμενές τους σε καθένα από τα κοινά σημεία τους.

i) Να αποδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες των δύο κύκλων σε καθένα από τα κοινά σημεία τους σχηματίζουν ίσες γωνίες. Καθεμία από τις γωνίες αυτές λέγεται *γωνία των δύο κύκλων.*

ii) Αν η γωνία των δύο κύκλων είναι ορθή, λέμε ότι *οι κύκλοι τέμνονται ορθογώνια* ή ότι είναι *ορθογώνιοι.* Να αποδειχθεί ότι, αν οι δύο κύκλοι είναι ορθογώνιοι, οι εφαπτόμενες του ενός κύκλου στα κοινά σημεία τους διέρχονται από το κέντρο του άλλου κύκλου.

Απόδειξη

i) Ας θεωρήσουμε δύο τεμνόμενους κύκλους με κέντρα O_1 και O_2 και A, B τα σημεία τομής τους. Από την ισότητα των τριγώνων O_1AO_2 και O_1BO_2 θα έχουμε ότι



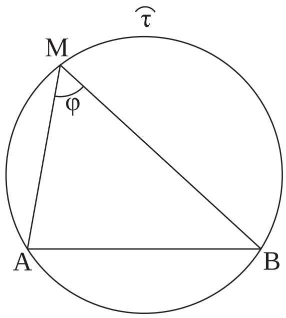
Σχήμα 9

$O_1\hat{A}O_2 = O_1\hat{B}O_2 = ω$ (σχ.9α).

Ας φέρουμε τώρα τις εφαπτόμενες των δύο κύκλων στο σημείο A και στο σημείο B. Οι εφαπτόμενες στο A σχηματίζουν γωνία $x'\hat{A}x = 2\text{L} - ω$ (γιατί $O_1\hat{A}x = O_2\hat{A}x' = 1\text{L}$) και όμοια οι εφαπτόμενες στο B σχηματίζουν γωνία $y'\hat{B}y = 2\text{L} - ω$. Επομένως, $x'\hat{A}x = y'\hat{B}y$.

ii) Αν δύο κύκλοι τέμνονται ορθογώνια, δηλαδή αν $φ = 1\text{L}$ (σχ.9β), έχουμε ότι $O_1\hat{A}O_2 + O_1\hat{A}x = 2\text{L}$, οπότε οι ημιευθείες Ax και AO_2 είναι αντικείμενες.

6.4 Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στον κύκλο
Τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία



Σχήμα 10

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και ένα σημείο M που δεν ανήκει στην ευθεία AB (σχ.10). Αν φ είναι η γωνία $A\hat{M}B$ τότε λέμε ότι το σημείο M ***βλέπει το τμήμα AB*** υπό γωνία φ ή ισοδύναμα το AB ***φαίνεται*** από το σημείο M υπό γωνία φ. Αν $\widehat{τ}$ είναι ένα τόξο κύκλου που έχει χορδή την AB και διέρχεται από το M, τότε λέμε ότι το τόξο $\widehat{τ}$ ***δέχεται γωνία φ.***

Θα δούμε τώρα πώς κατασκευάζεται ένα τόξο που να δέχεται γωνία φ.

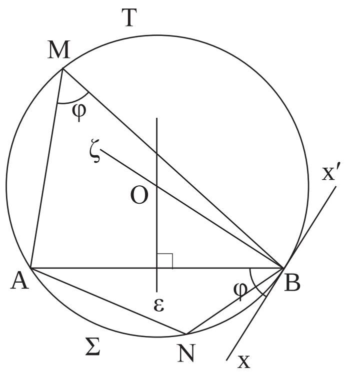
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δίνεται ένα τμήμα ΑΒ και μία γωνία φ. Να κατασκευασθεί τόξο κύκλου που να έχει χορδή το ΑΒ και να δέχεται γωνία φ.

• Έστω φ < 1L

Ανάλυση

Αν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ φαίνεται από ένα σημείο Μ υπό γωνία φ, δηλαδή $A\hat{M}B = \varphi$, τότε αρκεί να προσδιορίσουμε το κέντρο και την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΜΒ (βλ. Πόρισμα (iii), §6.2).



Σχήμα 11

Έστω $\overset{\frown}{AB}$ ένα τόξο κύκλου, κέντρου Ο, με χορδή την ΑΒ τέτοιο, ώστε για κάθε σημείο του Μ διαφορετικό των Α, Β να ισχύει $A\hat{M}B = \varphi$ (σχ.11). Αν φέρουμε την ημιευθεία Bx εφαπτόμενη του κύκλου στο Β θα έχουμε $A\hat{B}x = A\hat{M}B = \varphi$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης) και επομένως η Bx είναι μία σταθερή, ανεξάρτητη του Μ, ημιευθεία. Επειδή $OB \perp Bx$, το κέντρο Ο θα βρίσκεται στη σταθερή ευθεία ζ που είναι κάθετη στη Bx στο Β. Αλλά το Ο βρίσκεται επίσης και στη μεσοκάθετο ε του ΑΒ, άρα είναι η τομή των ε και ζ.

Σύνθεση

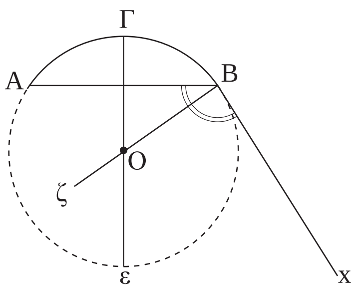
Θεωρούμε το δοσμένο τμήμα ΑΒ και φέρουμε ημιευθεία Bx έτσι, ώστε $A\hat{B}x = \varphi$. Στη συνέχεια φέρουμε ευθεία ζ κάθετη της Bx στο Β, που τέμνει τη μεσοκάθετο ε του ΑΒ στο Ο. Γράφουμε τον κύκλο (Ο, ΟΑ) και το τόξο $\overset{\frown}{ATB}$ (σχ.11) (χωρίς τα άκρα του) είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη

Για κάθε σημείο Μ του τόξου $\overset{\frown}{ATB}$ έχουμε $A\hat{M}B = A\hat{B}x = \varphi$, αφού η $A\hat{B}x$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $A\hat{M}B$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής, ενώ για κάθε σημείο Ν του τόξου $\overset{\frown}{A\Sigma B}$ έχουμε

$$A\hat{N}B = A\hat{B}x' = 2L - A\hat{B}x = 2L - \varphi,$$

όπου Bx′ η αντικείμενη ημιευθεία της Bx.



Σχήμα 12

Διερεύνηση

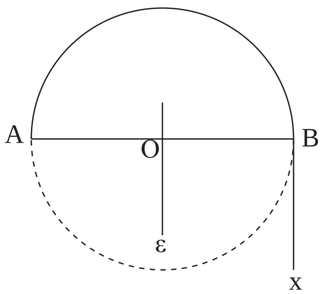
Για να υπάρχει λύση πρέπει η ευθεία ζ να τέμνει την ε, το οποίο συμβαίνει πάντοτε, αφού $A\hat{B}x = \varphi \neq 0$.

• Έστω φ > 1L

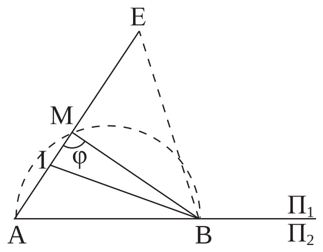
Τότε με τον ίδιο, όπως παραπάνω, τρόπο κατασκευάζουμε τον κύκλο κέντρου Ο και το τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma B}$ (σχ.12) που είναι το ζητούμενο (χωρίς τα άκρα του).

• Έστω φ = 1 L

Τότε το σημείο τομής των ευθειών ε, ζ είναι το μέσο Ο του ΑΒ (σχ.13). Επομένως, το ζητούμενο τόξο είναι καθένα από τα ημικύκλια διαμέτρου ΑΒ, χωρίς τα άκρα τους Α και Β.



Σχήμα 13

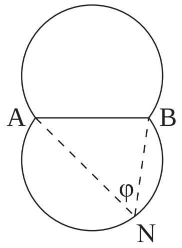


Σχήμα 14

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω τόξο $\overset{\frown}{AB}$ που δέχεται γωνία φ και Π_1 το ημιεπίπεδο στο οποίο περιέχεται (σχ.14). Για κάθε σημείο Μ του $\overset{\frown}{AB}$ έχουμε $A\hat{M}B = \varphi$, ενώ για κάθε σημείο Ι του τμήματος ΑΜ ή σημείο Ε της προέκτασης του ΑΜ έχουμε αντίστοιχα $A\hat{I}B > \varphi$ και $A\hat{E}B < \varphi$.

Άρα τα μοναδικά σημεία του Π_1 από τα οποία το ΑΒ φαίνεται υπό γωνία φ είναι τα σημεία του $\overset{\frown}{AB}$ εκτός από τα άκρα του. Όμοια αποδεικνύεται ότι τα μοναδικά σημεία του Π_2 που βλέπουν το ΑΒ υπό γωνία φ είναι τα σημεία του τόξου $\overset{\frown}{ANB}$ συμμετρικού του $\overset{\frown}{AB}$ ως προς την ευθεία ΑΒ (σχ.15).



Σχήμα 15

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

> **Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα ΑΒ φαίνεται υπό γωνία φ είναι δύο τόξα κύκλων, χορδής ΑΒ, χωρίς τα άκρα τους Α, Β, συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΒ, καθένα από τα οποία δέχεται γωνία φ.**

Άμεση συνέπεια του προηγουμένου είναι ότι:

> **Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα ΑΒ φαίνεται υπό ορθή γωνία είναι κύκλος με διάμετρο ΑΒ, χωρίς τα σημεία Α και Β.**

ΣΧΟΛΙΟ

*Στη λύση του παραπάνω προβλήματος, εκτός από τα γνωστά μας βήματα: κατασκευή, απόδειξη, διερεύνηση αναφέραμε πριν από αυτά και το βήμα της **ανάλυσης**. Το βήμα αυτό το κάνουμε όταν η κατασκευή του ζητούμενου σχήματος δεν είναι άμεσα φανερή και περιλαμβάνει τα εξής: Υποθέτουμε ότι κατασκευάσαμε το ζητούμενο σχήμα και προσπαθούμε να εντοπίσουμε εκείνες τις ιδιότητές του που ανάγουν την κατασκευή του σε γεωμετρικές κατασκευές που μας είναι ήδη γνωστές. Στη σύνθεση ή αλλιώς κατασκευή έχοντας οδηγό την ανάλυση κάνουμε όλες εκείνες τις επιμέρους γεωμετρικές κατασκευές που τελικά θα μας οδηγήσουν στην κατασκευή του ζητούμενου σχήματος. Τα παραπάνω βήματα ακολουθούν, όπως είναι γνωστό, το βήμα της απόδειξης και το βήμα της διερεύνησης (§3.17).*

*Η μέθοδος αυτή των τεσσάρων βημάτων: ανάλυση, σύνθεση, απόδειξη και διερεύνηση είναι γνωστή ως **αναλυτική - συνθετική** μέθοδος και χρησιμοποιείται σε προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών και σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών.*

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Πότε μια γωνία λέγεται εγγεγραμμένη;*

2. *Αν φ και ω είναι αντίστοιχα η εγγεγραμμένη και η επίκεντρη γωνία που βαίνουν στο ίδιο τόξο ενός κύκλου, τότε:*

α. $\varphi = \omega$, β. $\varphi = 2\omega$,

γ. $\omega = 2\varphi$, δ. $\varphi = 90° + \omega$,

ε. Τίποτα από τα προηγούμενα.

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

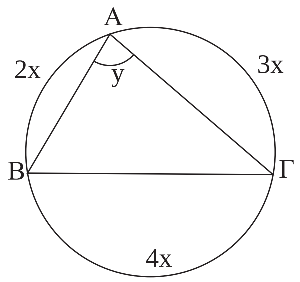
3. *Συμπληρώστε το κενό στην επόμενη πρόταση:*

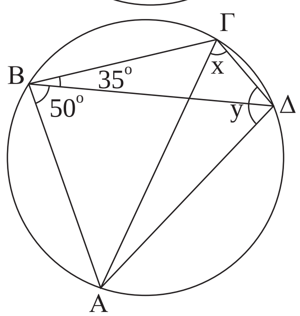
"Η γωνία χορδής και εφαπτομένης ισούται με ...."

4. *Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία βλέπουν ένα γνωστό τμήμα υπό γωνία $\varphi < 1\llcorner$ ή $\varphi = 1\llcorner$;*

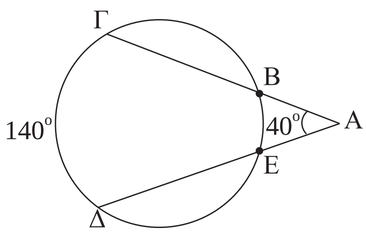
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x και y.*

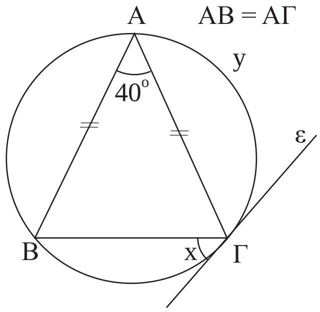


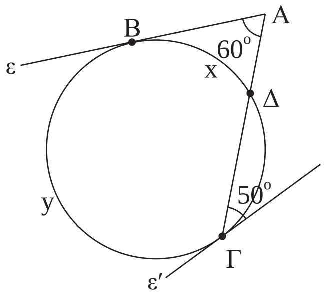


2. *Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{A} = 40°$, να βρείτε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{BE}$.*

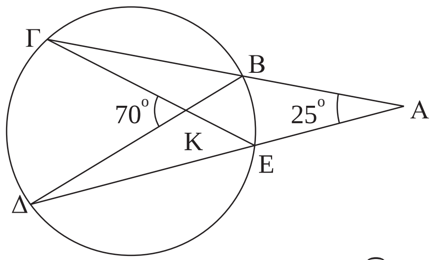


3. *Αν στα παρακάτω σχήματα οι ευθείες ε και ε′ είναι εφαπτόμενες να βρεθούν τα x και y.*

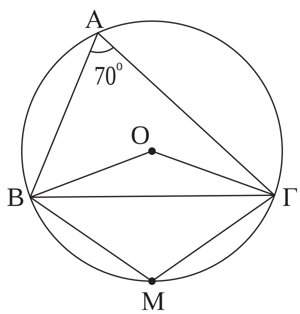




4. *Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{A} = 25°$, να βρείτε τα μέτρα των τόξων $\overset{\frown}{EB}$ και $\overset{\frown}{ΓΔ}$.*



5. *Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MΓ}$ και $\hat{A} = 70°$, να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΟΒΓ και ΜΒΓ.*



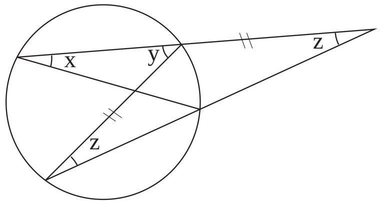
6. *Στο παρακάτω σχήμα, ποια σχέση είναι σωστή;*

i) $x - y - z = 0$, ii) $x - 2y + z = 0$,

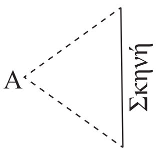
iii) $x - y + z = 0$, iv) $x + y = 2z$,

v) καμία από τις παραπάνω.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

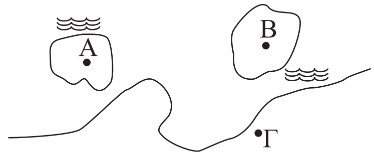


7. *Το καλύτερο κάθισμα σε έναν κινηματογράφο είναι το κάθισμα "Α". Να βρείτε ποια άλλα καθίσματα έχουν την ίδια οπτική γωνία με το θεατή που κάθεται στο κάθισμα Α.*



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο μέσο ενός από τα τόξα με χορδή ΑΒ κύκλου (Κ) είναι παράλληλη στη χορδή ΑΒ και αντίστροφα.*
2. *Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α στους δύο κύκλους, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΔ διέρχεται από το Β.*
3. *Δύο κάθετες χορδές ΑΒ, ΓΔ κύκλου (Κ) τέμνονται στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΡΜ του τριγώνου ΡΒΓ είναι κάθετη στην ΑΔ.*
4. *Ο καπετάνιος ενός ιστιοπλοϊκού πλοίου Ι είδε τρεις σημαδούρες για υφάλους στα σημεία Α, Β, Γ. Με μία πυξίδα διόπτευσης μέτρησε ότι*
   $A\hat{I}B = 100°$, $B\hat{I}Γ = 125°$, $Γ\hat{I}A = 135°$.



Εντόπισε τα σημεία Α, Β, Γ στο χάρτη και προσδιόρισε την ακριβή θέση του ιστιοπλοϊκού. Πώς τα κατάφερε;

Σύνθετα Θέματα

1. *Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (ή εσωτερικά) στο σημείο Α και δύο ευθείες ε, ε' που διέρχονται από το Α τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία Β, Β' και τον άλλο στα Γ και Γ' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΒ'// ΓΓ'.*
2. *Δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο Α. Μία χορδή ΒΓ του μεγαλύτερου κύκλου εφάπτεται στο μικρότερο, στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}Γ$.*
3. *Δίνεται κύκλος (Κ), η εφαπτομένη ε σε ένα σημείο του Α και ένα σημείο Ρ της ε. Από το Ρ φέρουμε μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα Β και Γ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}Γ$ τέμνει τη χορδή ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι ΡΔ = ΡΑ.*

Εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα

6.5 Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται *εγγεγραμμένο* σε κύκλο, αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου.

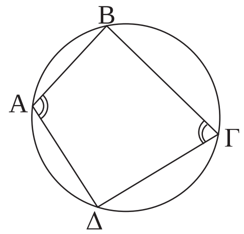
Ο κύκλος στον οποίο είναι εγγεγραμμένο ένα τετράπλευρο λέγεται ***περιγεγραμμένος*** κύκλος του τετραπλεύρου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

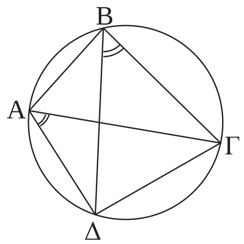
Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

i) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

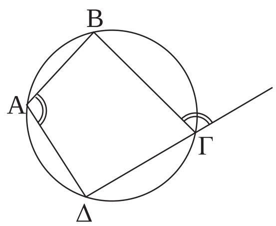
ii) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.



Σχήμα 16



Σχήμα 17



Σχήμα 18

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma\Delta}}$, ενώ η $\hat{\Gamma}$ στο $\overset{\frown}{\mathrm{BA\Delta}}$, με $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma\Delta}} + \overset{\frown}{\mathrm{BA\Delta}} = 4\llcorner$ (σχ.16). Επομένως $\hat{\mathrm{A}} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$.

ii) Δύο οποιεσδήποτε διαδοχικές κορυφές του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (π.χ. οι Α, Β) είναι και κορυφές δύο ίσων εγγεγραμμένων γωνιών ($\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ και $\Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma$), που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, που ορίζει η απέναντι πλευρά ΓΔ (σχ.17).

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.

6.6 Το εγγράψιμο τετράπλευρο

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται *εγγράψιμο* όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.

Η μελέτη των εγγράψιμων τετραπλεύρων προέκυψε από το ερώτημα αν τέσσερα σημεία του επιπέδου (ανά τρία μη συνευθειακά) είναι ή όχι ομοκυκλικά.

Γνωρίζουμε βέβαια ότι τρία σημεία του επιπέδου μη συνευθειακά ανήκουν στον ίδιο κύκλο, αυτό όμως δε συμβαίνει απαραίτητα και για τέσσερα σημεία, π.χ. οι κορυφές ενός τυχαίου παραλληλογράμμου, το οποίο δεν είναι ορθογώνιο, δεν είναι δυνατόν να ανήκουν στον ίδιο κύκλο, αφού οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες και αν δεν είναι και οι δύο ορθές δεν θα είναι παραπληρωματικές.

Απομένει λοιπόν να καθορίσουμε κάτω από ποιες συνθήκες είναι τέσσερα σημεία ομοκυκλικά ή, ισοδύναμα, κάτω από ποιες προϋποθέσεις (**κριτήρια**) ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

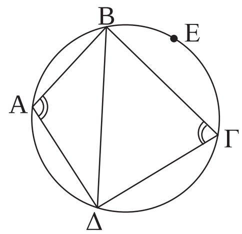
ΘΕΩΡΗΜΑ

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

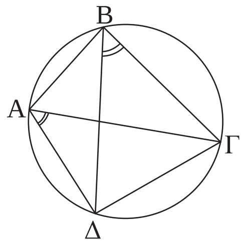
i) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

ii) Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

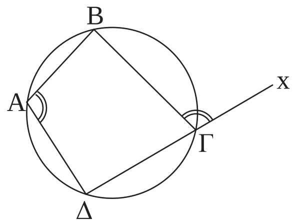
iii) Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.



Σχήμα 19



Σχήμα 20



Σχήμα 21

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Έστω $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$. Φέρουμε τον κύκλο που ορίζουν τα σημεία Α, Β, Δ και τη χορδή του ΒΔ. Τα σημεία Α, Γ βρίσκονται εκατέρωθεν της ΒΔ, οπότε κάθε εγγεγραμμένη γωνία στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{B}\mathrm{A}\Delta}$ ισούται με τη $\hat{\Gamma}$, ενώ κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο $\overset{\frown}{\mathrm{B}\mathrm{E}\Delta}$ (σχ.19) ισούται με την παραπληρωματική της, δηλαδή την $\hat{A}$. Επομένως το Γ είναι σημείο του $\overset{\frown}{\mathrm{B}\mathrm{E}\Delta}$ και ομοκυκλικό με τα Α, Β, Δ.

ii) Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε

$$\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma = \varphi.$$

Τότε τα Α, Β ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου από τα οποία το τμήμα ΓΔ φαίνεται υπό ορισμένη γωνία φ. Ο γεωμετρικός αυτός τόπος είναι (βλ. §6.4) δύο συμμετρικά τόξα ως προς το ΓΔ. Τα Α, Β όμως βρίσκονται στο ίδιο μέρος της ΓΔ, συνεπώς ανήκουν στο ίδιο τόξο, επομένως τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι ομοκυκλικά.

iii) Έστω ότι $x\hat{\Gamma}B = \hat{A}$ (σχ. 21), τότε $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$, επομένως το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο γιατί έχει δύο απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές, λόγω του κριτηρίου i).

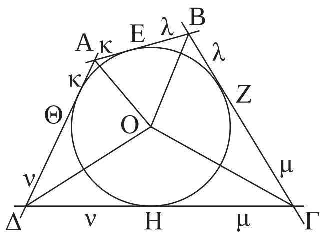
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΡΑΨΙΜΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

Ένα τετράπλευρο, του οποίου οι πλευρές εφάπτονται στον ίδιο κύκλο, λέγεται *περιγεγραμμένο* στον κύκλο αυτό, ενώ ο κύκλος λέγεται *εγγεγραμμένος* στο τετράπλευρο αυτό.

(Α) Να αποδειχθούν οι ιδιότητες ενός περιγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ:
- **i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.**
- **ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.**

(Β) Να αποδείξετε ότι για να είναι ένα τετράπλευρο περιγράψιμο σε κύκλο αρκεί να ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:
- **i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.**
- **ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.**

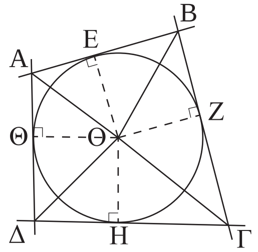


Σχήμα 22

Απόδειξη

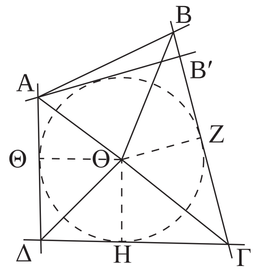
(Α) Απλή (βλ. σχ.22).

(Β) i) Από το σημείο τομής Ο των διχοτόμων φέρουμε τις κάθετες ΟΕ, ΟΖ, ΟΗ, ΟΘ στις πλευρές του τετραπλεύρου ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα (σχ.23). Το Ο ως σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$ ισαπέχει από τις πλευρές της ΑΒ, ΑΔ, συνεπώς ΟΕ = ΟΘ. Ανάλογα έχουμε ότι ΟΕ = ΟΖ = ΟΗ, οπότε τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ ανήκουν σε κύκλο (Ο, ΟΕ) και το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι περιγράψιμο.



Σχήμα 23

ii) Έστω ότι ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ (1). Θεωρούμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ο και από το Ο φέρουμε τις κάθετες στις πλευρές των γωνιών αυτών, ΟΘ⊥ΑΔ, ΟΗ⊥ΓΔ και ΟΖ⊥ΒΓ (σχ.24). Τότε ΟΘ = ΟΗ = ΟΖ και ο κύκλος (Ο, ΟΘ) εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ΑΒΓΔ. Έστω ότι δεν εφάπτεται στην ΑΒ. Φέρουμε την εφαπτομένη από το Α στον κύκλο (Ο, ΟΘ) η οποία τέμνει την ευθεία ΒΓ σε σημείο Β′. Το τετράπλευρο ΑΒ′ΓΔ είναι περιγεγραμμένο, οπότε



Σχήμα 24

$$AB' + \Gamma\Delta = A\Delta + B'\Gamma \qquad (2).$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$AB - AB' = B\Gamma - B'\Gamma \quad ή \quad AB = AB' + BB',$$

το οποίο είναι άτοπο, επομένως ο κύκλος εφάπτεται και στην πλευρά ΑΒ.

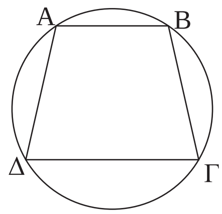
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Να αποδειχθεί ότι κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι εγγράψιμο.

Απόδειξη

Αν το ΑΒΓΔ (σχ.25) είναι ισοσκελές τραπέζιο θα είναι $\hat{A} = \hat{B}$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ και $\hat{A} + \hat{\Delta} = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$.

Επομένως θα είναι και $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$, οπότε είναι εγγράψιμο.



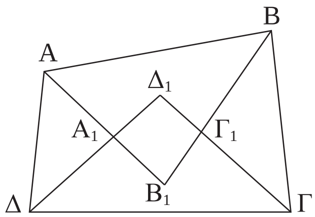
Σχήμα 25

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Να αποδειχθεί ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τετραπλεύρου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.

Απόδειξη

Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ το τετράπλευρο που σχηματίζουν οι διχοτόμοι των γωνιών του (σχ.26). Τότε έχουμε ότι



Σχήμα 26

$$B_1\hat{A}_1\Delta_1 = A\hat{A}_1\Delta = 2\llcorner - \left(\frac{\hat{A} + \hat{\Delta}}{2}\right) \quad \text{και} \quad \Delta_1\hat{\Gamma}_1B_1 = B\hat{\Gamma}_1\Gamma = 2\llcorner - \left(\frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2}\right).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε ότι

$$B_1\hat{A}_1\Delta_1 + \Delta_1\hat{\Gamma}_1B_1 = 4\llcorner - \left(\frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2}\right) = 2\llcorner,$$

επομένως το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Σε ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο:*

i) *Τα αθροίσματα των απέναντι γωνιών είναι ίσα.* □Σ □Λ

ii) *Κάθε πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.* □Σ □Λ

Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προηγούμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. *Αν ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο τετράπλευρο τότε:*

α. $\hat{A} + \hat{\Gamma}_{εξ} = 2$L β. $\hat{A} = \hat{\Gamma}$

γ. $\hat{A} = \hat{\Delta}_{εξ}$ δ. $\hat{A} = \hat{\Gamma}_{εξ}$ ε. $\hat{B} = \hat{\Delta}$

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. *Από τέσσερα μη συνευθειακά σημεία διέρχεται πάντοτε ένας κύκλος;*

4. *i)* *Πότε ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο;*

ii) *Αν οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο;*

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

5. *Ποια είναι τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο;*

6. *Ποια από τα τετράπλευρα: παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο και τραπέζιο είναι εγγράψιμα;*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι* $\hat{A} = 120°$ *και* $\hat{B}_{εξ} = 80°$. *Να βρείτε τις γωνίες* $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ *και* $\hat{\Delta}$ *του τετραπλεύρου.*

2. *Αν ένας ρόμβος είναι εγγεγραμμένος σε κύκλο, να αποδείξετε ότι είναι τετράγωνο.*

3. *Να αποδείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.*

4. *Να αποδείξετε ότι κάθε περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται στο κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από τα Α και Β φέρουμε ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα Γ και Γ' και τον άλλο στα Δ και Δ' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΓΓ'//ΔΔ'.*

2. *Ένας κύκλος (Κ) διέρχεται από τις κορυφές Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη ε του περιγεγραμμένου κύκλου στο Α.*

3. *Να αποδείξετε ότι τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ενός τριγώνου ΑΒΓ διχοτομούν τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΖ.*

4. *Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα άκρα δύο κάθετων χορδών κύκλου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του (Ο, R). Αν ΒΔ και ΓΕ είναι ύψη του τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι ΟΑ⊥ΔΕ (Θεώρημα Nagel).*

2. *Δίνεται μία χορδή ΒΓ ενός κύκλου (Ο, R) και οι εφαπτόμενες* $ε_1$ *και* $ε_2$ *στα άκρα της. Από ένα τυχαίο σημείο Μ της ΒΓ φέρουμε κάθετη στην ΟΜ, που τέμνει τις* $ε_1$ *και* $ε_2$ *στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΜ = ΜΕ.*

3. *Να αποδείξετε ότι οι προβολές κάθε σημείου του περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου πάνω στις πλευρές του είναι σημεία συνευθειακά (ευθεία Simson).*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Αν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΔΒ και ΑΔΓ τέμνουν τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΓΕ = ΒΖ.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να εξετασθεί η ύπαρξη κύκλου που διέρχεται από:
i) δύο δοσμένα σημεία,
ii) τρία δοσμένα σημεία,
iii) τέσσερα δοσμένα σημεία,
και η μοναδικότητά του σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις.

6.7 Γεωμετρικοί τόποι και γεωμετρικές κατασκευές με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων

Σε προηγούμενα κεφάλαια συναντήσαμε ορισμένους βασικούς γεωμετρικούς τόπους, όπως ο κύκλος, η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος, η διχοτόμος μίας γωνίας, η μεσοπαράλληλος δύο παράλληλων ευθειών και τέλος το τόξο γνωστής χορδής ΑΒ, τα σημεία του οποίου βλέπουν το τμήμα ΑΒ υπό δοσμένη γωνία φ.

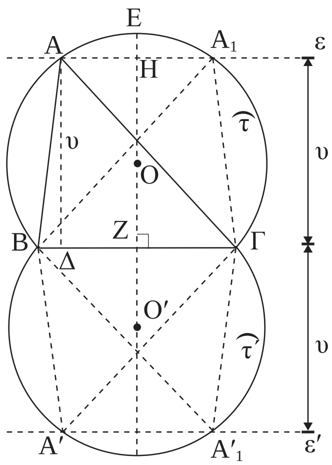
Οι γεωμετρικοί αυτοί τόποι μας είναι χρήσιμοι στη λύση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ που έχει ΒΓ = α, ύψος ΑΔ = υ και γωνία $\hat{A}$ = ω, όπου α, υ γνωστά τμήματα και ω γνωστή γωνία.

Λύση

Ανάλυση. Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο (σχ.27) που έχει ΒΓ = α, ύψος ΑΔ = υ και γωνία $\hat{A}$ = ω. Επειδή $\hat{A}$ = ω η κορυφή Α βλέπει γνωστό τμήμα ΒΓ υπό γνωστή γωνία, άρα είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου T_1 που αποτελείται από τα τόξα $\overset{\frown}{\tau}$ και $\overset{\frown}{\tau}'$, που γράφονται με χορδή τη ΒΓ εκατέρωθεν αυτής και δέχονται το καθένα γωνία ω. Επίσης, αφού το Α απέχει από τη ΒΓ γνωστή απόσταση υ, είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου T_2 που αποτελείται από δύο ευθείες παράλληλες προς τη ΒΓ και εκατέρωθεν αυτής σε απόσταση υ. Άρα η κορυφή Α είναι η τομή των γεωμετρικών τόπων T_1 και T_2.



Σχήμα 27

Σύνθεση. Με χορδή τμήμα ΒΓ = α γράφουμε τα τόξα $\overset{\frown}{\tau}$ και $\overset{\frown}{\tau}'$, που δέχονται γωνία ω. Στη συνέχεια σε απόσταση ΖΗ = υ από τη ΒΓ και εκατέρωθεν αυτής φέρουμε ευθείες ε, ε′//ΒΓ που τέμνουν τα τόξα $\overset{\frown}{\tau}$ και $\overset{\frown}{\tau}'$. Αν Α είναι ένα από τα σημεία τομής των T_1, T_2, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη. Το τρίγωνο ΑΒΓ, από την κατασκευή έχει ΒΓ = α, ύψος ΑΔ = υ και γωνία $\hat{A}$ = ω, αφού το Α είναι σημείο π.χ. του τόξου $\widehat{\tau}$ τα σημεία του οποίου βλέπουν το ΒΓ υπό γωνία ω.

Διερεύνηση. Για να υπάρχει λύση πρέπει οι γεωμετρικοί τόποι T_1 και T_2 να έχουν κοινά σημεία. Έτσι, αν ΑΔ < ΕΖ η ευθεία ε τέμνει το τόξο $\widehat{\tau}$ σε δύο σημεία Α και A_1 και η ε′ τέμνει το $\widehat{\tau}'$ στα Α′ και A_1', οπότε έχουμε τέσσερα τρίγωνα τα οποία είναι ίσα μεταξύ τους (τρεις πλευρές ίσες), οπότε θεωρούμε ότι έχουμε μία λύση. Αν ΑΔ = ΕΖ, η ε έχει ένα κοινό σημείο με το $\widehat{\tau}$, το Ε, οπότε έχουμε ως λύση το ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΓ και η ε′ έχει ένα κοινό σημείο με το $\widehat{\tau}'$, το Ε′, οπότε έχουμε ως λύση το ισοσκελές τρίγωνο Ε′ΒΓ. Τα τρίγωνα αυτά όμως είναι ίσα, οπότε έχουμε μία μόνο λύση. Τέλος, αν ΑΔ > ΕΖ δεν υπάρχουν κοινά σημεία των T_1, T_2 και το πρόβλημα είναι αδύνατο.

ΣΧΟΛΙΟ

Στο παραπάνω πρόβλημα, για να κατασκευάσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου γνωρίζουμε την πλευρά ΒΓ = α, πρέπει να προσδιορίσουμε ακόμα την κορυφή Α. Η κορυφή αυτή έχει δύο ιδιότητες:

i) βλέπει το τμήμα ΒΓ υπό γνωστή γωνία ω και

ii) απέχει από την πλευρά ΒΓ, γνωστή απόσταση υ.

Επομένως το Α είναι η τομή των δύο γεωμετρικών τόπων, τόξου και ευθείας αντίστοιχα.

Γενικά, όταν ένα πρόβλημα είναι ή ανάγεται στον προσδιορισμό ενός σημείου, τότε βρίσκουμε δύο γεωμετρικούς τόπους T_1, T_2 στους οποίους οφείλει, σύμφωνα με τα δεδομένα, να βρίσκεται το σημείο αυτό και η τομή των T_1, T_2 είναι το ζητούμενο σημείο.

Η μέθοδος της χρησιμοποίησης των γεωμετρικών τόπων στη λύση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών ανάγεται στον Πλάτωνα.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών δοσμένου κύκλου που:

i) είναι παράλληλες σε δοσμένη ευθεία ή

ii) ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου ή

iii) συντρέχουν σε ένα σημείο.

Στη συνέχεια δίνουμε ορισμένα ακόμα παραδείγματα γεωμετρικών κατασκευών με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

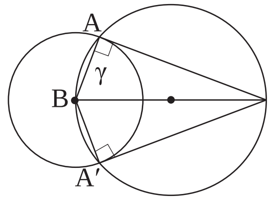
Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου δίνονται η υποτείνουσα ΒΓ = α και μία κάθετη πλευρά του ΑΒ = γ, όπου α και γ γνωστά τμήματα.

Λύση

Ανάλυση. Ας υποθέσουμε ότι ΑΒΓ είναι το ζητούμενο τρίγωνο με $\hat{A} = 1\llcorner$, ΒΓ = α και ΑΒ = γ (σχ.28). Ας θεωρήσουμε γνωστή την πλευρά ΒΓ. Το σημείο Α:

i) απέχει απόσταση γ από το Β, άρα ανήκει στον κύκλο (Β, γ), και

ii) βλέπει το ΒΓ υπό ορθή γωνία, άρα ανήκει στον κύκλο διαμέτρου ΒΓ.



Σχήμα 28

Σύνθεση. Κατασκευάζουμε τους δύο κύκλους (σχ.28) οι οποίοι τέμνονται στα Α και Α′. Σχηματίζονται δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′ΒΓ που είναι λύσεις του προβλήματος σε διαφορετικές θέσεις.

Απόδειξη. Το τρίγωνο που κατασκευάσαμε έχει $\hat{A} = 1\llcorner$, επειδή βαίνει σε ημικύκλιο, και ΑΒ = γ ως ακτίνα του κύκλου (Β, γ).

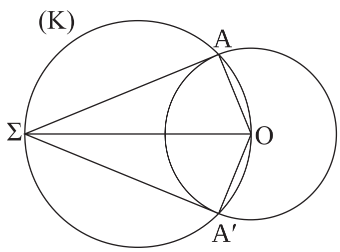
Διερεύνηση. Για να υπάρχει λύση πρέπει οι δύο κύκλοι να τέμνονται, το οποίο συμβαίνει όταν $\alpha > \gamma$. Όταν $\alpha \leq \gamma$, είναι φανερό ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και σημείο Σ εκτός αυτού. Να κατασκευασθεί εφαπτομένη του κύκλου η οποία να διέρχεται από το Σ.

Λύση

Ανάλυση. Ας υποθέσουμε ότι ΣΑ είναι μία εφαπτομένη του κύκλου από το Σ, όπου Α το σημείο επαφής (σχ.29). Φέρουμε την ακτίνα ΟΑ, οπότε η γωνία $O\hat{A}\Sigma$ είναι ορθή και επομένως το Α είναι σημείο του γνωστού κύκλου (Κ) με διάμετρο το γνωστό τμήμα ΟΣ. Άρα το Α είναι κοινό σημείο του (Ο, R) και του (Κ). Επομένως το Α προσδιορίζεται, οπότε προσδιορίζεται και η ΣΑ.



Σχήμα 29

Σύνθεση. Με διάμετρο ΟΣ γράφουμε κύκλο (Κ), ο οποίος τέμνει τον (Ο, R) στα σημεία Α και Α′. Φέρουμε τις ευθείες ΣΑ και ΣΑ′ οι οποίες είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες.

Απόδειξη. Είναι $O\hat{A}\Sigma = O\hat{A}'\Sigma = 1\llcorner$, ως εγγεγραμμένες στον κύκλο (Κ) οι οποίες βαίνουν σε ημικύκλια. Άρα οι ακτίνες ΟΑ και ΟΑ′ είναι κάθετες αντίστοιχα στις ΣΑ και ΣΑ′ και επομένως οι ΣΑ και ΣΑ′ είναι εφαπτόμενες του κύκλου (Ο, R).

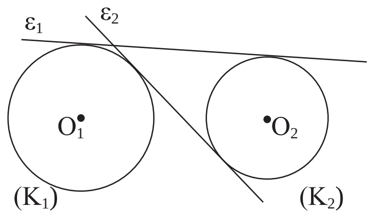
Διερεύνηση. Το πρόβλημα έχει πάντοτε δύο λύσεις, γιατί οι κύκλοι (Κ) και (Ο, R) τέμνονται αφού ο (Κ) διέρχεται από το εσωτερικό σημείο Ο και από το εξωτερικό σημείο Σ του (Ο, R).

Συμπέρασμα:

Από οποιοδήποτε εξωτερικό σημείο ενός κύκλου φέρονται ακριβώς δύο ευθείες εφαπτόμενες στον κύκλο.

► Κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων

Ας θεωρήσουμε δύο κύκλους (K_1) και (K_2). Μία ευθεία που εφάπτεται και στους δύο κύκλους λέγεται ***κοινή εφαπτομένη*** τους. Μία κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων (σχ.30) χαρακτηρίζεται ως ***εξωτερική***, όπως η ε_1, όταν οι κύκλοι είναι προς το ίδιο μέρος της και ως ***εσωτερική***, όπως η ε_2, όταν οι κύκλοι βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής.



Σχήμα 30

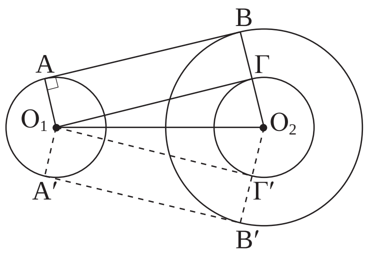
Στο επόμενο πρόβλημα δίνουμε την κατασκευή των κοινών εξωτερικών εφαπτομένων δύο κύκλων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται δύο κύκλοι (O_1, ρ), (O_2, R) με $R > \rho$ και $O_1O_2 > R - \rho$. Να κατασκευάσετε τις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενές τους.

Λύση

Ανάλυση. Έστω ΑΒ μία κοινή εξωτερική εφαπτομένη των κύκλων (O_1, ρ), (O_2, R), όπου Α, Β τα σημεία επαφής της με τους κύκλους αυτούς αντίστοιχα (σχ.31). Τότε οι ακτίνες O_1A, O_2B είναι κάθετες στην ΑΒ και επομένως παράλληλες. Από το O_1 φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ, που τέμνει την O_2B στο Γ, οπότε το τετράπλευρο $ΑΒΓO_1$ είναι ορθογώνιο. Έτσι $O_1Γ \perp O_2Γ$ οπότε ο κύκλος κέντρου O_2 και ακτίνας $O_2Γ = O_2B - BΓ = O_2B - O_1A = R - \rho$ εφάπτεται στην $O_1Γ$ στο Γ.



Σχήμα 31

Σύνθεση. Με κέντρο O_2 και ακτίνα $R - \rho$ γράφουμε κύκλο και από το O_1 φέρουμε τις εφαπτόμενες του $O_1Γ$ και $O_1Γ'$ αντίστοιχα. Φέρουμε τις $O_2Γ$, $O_2Γ'$ που τέμνουν τον κύκλο (O_2, R) στα Β, Β′ και στη συνέχεια φέρουμε τις ακτίνες O_1A, O_1A' του κύκλου (O_1, ρ) παράλληλες προς τις O_2B, O_2B' αντίστοιχα. Τότε οι ευθείες ΑΒ και Α′Β′ είναι οι ζητούμενες κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες των κύκλων.

Απόδειξη. Το τετράπλευρο $ΑΒΓO_1$ έχει, από την κατασκευή, $O_1A // ΓB$ και $ΓB = O_2B - O_2Γ = R - (R - \rho) = O_1A$, δηλαδή $O_1A =// ΓB$, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή η γωνία του $\hat{Γ}$ είναι ορθή, αφού η $O_1Γ$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $(O_2, R - \rho)$ το $ΑΒΓO_1$ είναι ορθογώνιο. Άρα οι ακτίνες O_1A και O_2B είναι κάθετες στην ΑΒ και επομένως η ΑΒ είναι κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων. Η ΑΒ είναι εξωτερική εφαπτομένη αφού οι κύκλοι είναι προς το ίδιο μέρος της. Όμοια αποδεικνύεται ότι και η Α′Β′ είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη.

Διερεύνηση. Από την προηγούμενη κατασκευή προκύπτει ότι το πρόβλημα έχει λύση όταν είναι δυνατή η χάραξη των εφαπτομένων $O_1Γ$ και $O_1Γ'$ από το O_1 προς τον κύκλο $(O_2, R – ρ)$. Αυτό όμως είναι δυνατό όταν το O_1 είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου $(O_2, R – ρ)$, το οποίο ισχύει αφού από την υπόθεση έχουμε ότι $O_1O_2 > R – ρ$. Επομένως, όταν $O_1O_2 > R – ρ$ υπάρχουν δύο εξωτερικές κοινές εφαπτόμενες των κύκλων $(O_1, ρ)$ και (O_2, R).

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Δίνονται δύο κύκλοι $(O_1, ρ)$ και (O_2, R) με $O_1O_2 > R + ρ$. Να κατασκευάσετε τις κοινές εσωτερικές εφαπτόμενές τους. Στη συνέχεια να εξετάσετε το πλήθος των κοινών εσωτερικών και εξωτερικών εφαπτομένων δύο κύκλων ανάλογα με τις σχετικές θέσεις τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που*

i) έχουν απόσταση ρ από ένα σταθερό σημείο Ο,

ii) ισαπέχουν από δύο σταθερά σημεία Α και Β,

iii) έχουν απόσταση λ από μία ορισμένη ευθεία ε,

iv) ισαπέχουν από τις πλευρές μίας γωνίας,

v) ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες,

vi) ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες,

vii) βλέπουν ένα δοσμένο τμήμα ΑΒ υπό ορισμένη γωνία ω.

2. *Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάζεται όταν δίνονται:*

i) δύο κάθετες πλευρές του. ☐ Σ ☐ Λ

ii) μία κάθετη πλευρά του και η υποτείνουσα. ☐ Σ ☐ Λ

iii) μία οξεία γωνία του. ☐ Σ ☐ Λ

iv) η υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του. ☐ Σ ☐ Λ

v) η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα και η υποτείνουσα. ☐ Σ ☐ Λ

Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προηγούμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των θέσεων:*

i) του δρομέα που κινείται σε ένα ευθύγραμμο διάδρομο ισαπέχοντας από τις πλευρές του,

ii) ενός τεχνητού δορυφόρου της Γης που κινείται σε απόσταση 10km πάνω από αυτή.

2. *Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων γνωστής ακτίνας:*

i) που κυλίονται στο εσωτερικό ενός μεγαλύτερου γνωστού κύκλου,

ii) που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο.

3. *Το σημείο στο οποίο είναι κρυμμένος ένας θησαυρός απέχει 4m από ένα δέντρο Δ και ισαπέχει από δύο άλλα δέντρα Α και Β. Να βρεθεί η θέση του θησαυρού.*

4. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των ακτίνων δοσμένου κύκλου.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Α της ορθής γωνίας ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ που έχει δοσμένη υποτείνουσα.*

2. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των προβολών του δοσμένου σημείου Α πάνω στις ευθείες που διέρχονται από δοσμένο σημείο Β.*

3. *Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Α στο εσωτερικό της. Οι κορυφές Β και Γ ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1∟) κι-*

νούνται πάνω στις Oy και Ox αντίστοιχα. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ της υποτείνουσας ΒΓ.

4. *Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1∟) του οποίου δίνονται:*
   i) η διάμεσος ΑΜ = μ και μία κάθετη πλευρά.
   ii) η διάμεσος ΑΜ = μ και το ύψος ΑΔ = λ.

Σύνθετα Θέματα

1. *Από ένα μεταβλητό σημείο Ρ της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ που τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ του ΖΕ.*

2. *Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου δίνονται:*
   i) η πλευρά ΒΓ = λ, η γωνία $\hat{A}$ = ω και η διάμεσος ΑΜ = μ.
   ii) η πλευρά ΒΓ = λ, η γωνία $\hat{A}$ = ω και η διάμεσος ΒΝ = μ.

3. *Να κατασκευάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ που έχει πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ ίσες με τα γνωστά τμήματα κ, λ, μ, ν αντίστοιχα, και η γωνία του $\hat{A}$ είναι ίση με δοσμένη γωνία ω.*

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α. Από τα άκρα Β, Γ της υποτείνουσας ΒΓ φέρουμε κάθετες Βx και Βy στη ΒΓ και προς το ίδιο μέρος της ΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε κάθετη στην ΑΓ, που τέμνει την Γy στο Ε και κάθετη στην ΑΒ που τέμνει την Βx στο Δ. Να αποδειχθεί ότι:*
   i) τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά,
   ii) τα τετράπλευρα ΑΔΒΜ και ΑΜΓΕ είναι εγγράψιμα σε κύκλο,
   iii) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΔΜΕ εφάπτεται στη ΒΓ.

2. *Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει σταθερή την πλευρά ΒΓ και η κορυφή Α μεταβάλλεται έτσι, ώστε η διαφορά των πλευρών ΑΒ και ΑΓ να είναι σταθερή. Αν Μ είναι η προβολή της κορυφής Β πάνω στη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ.*

3. *Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ από τις γωνίες $\hat{B}$ = ω, $\hat{\Gamma}$ = φ και την περίμετρό του δ.*

4. *Δίνεται κύκλος (Ο, R) και σημείο Α εκτός αυτού. Από το Α να φέρετε ευθεία, που τέμνει τον κύκλο στα Β, Γ ώστε το Β να είναι μέσο του ΑΓ.*

5. *Δίνεται εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Με χορδές τις πλευρές του γράφουμε μέσα σε αυτό τόξα, που τέμνονται ανά δύο στα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ. Να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι εγγράψιμο. (Οι έξι κύκλοι του Miquel).*

6. *Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΖΕ, ΒΖΔ και ΓΕΔ διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

7. *Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος και Ε, Ζ σημεία των ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΒΕ, ΔΕ, ΓΖ και ΑΖ σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.*

8. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ορθόκεντρο του Η. Αν M_1, M_2, M_3 είναι τα μέσα των ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα, AH_1, BH_2, ΓH_3 τα ύψη του και Z_1, Z_2, Z_3 τα μέσα των ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*
   i) το τετράπλευρο $H_1M_1M_2M_3$ είναι εγγράψιμο,
   ii) το τετράπλευρο $Z_1H_1M_1M_2$ είναι εγγράψιμο,
   iii) τα σημεία M_i, H_i, Z_i, i = 1, 2, 3 είναι ομοκυκλικά (Κύκλος των 9 σημείων ή κύκλος του Euler).

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Εγγεγραμμένη γωνία

i) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης.

ii) Η γωνία χορδής και εφαπτομένης ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

Εγγεγραμμένο τετράπλευρο

Ιδιότητες

i) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

ii) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

iii) Κάθε εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

Εγγράψιμο τετράπλευρο

Κριτήρια

Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

i) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

ii) Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

iii) Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

Περιγεγραμμένο τετράπλευρο

Ιδιότητες

i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

Περιγράψιμο τετράπλευρο

Κριτήρια

Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

Γεωμετρικοί τόποι και γεωμετρικές κατασκευές

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄

Η αξιωματική μέθοδος

Η αξιωματική μέθοδος είναι ένας τρόπος κατασκευής μιας επιστημονικής θεωρίας, κατά τον οποίο ορισμένες προτάσεις (τα λεγόμενα *αξιώματα* ή *αιτήματα*) λαμβάνονται ως αρχή και από αυτά συνάγονται όλα τα θεωρήματα της θεωρίας με μια ακολουθία συλλογισμών που ονομάζεται *απόδειξη*. Οι κανόνες που ακολουθούν οι συλλογισμοί αυτοί είναι αντικείμενο της επιστήμης της λογικής. Όλες οι έννοιες που χρησιμοποιούνται κατά τη διαδικασία της απόδειξης (εκτός από ένα μικρό αριθμό αρχικών εννοιών) εισάγονται με *ορισμούς*, οι οποίοι επεξηγούν το νόημα των εννοιών αυτών με βάση γνωστές έννοιες ή άλλες έννοιες που έχουν ορισθεί προηγουμένως. Οι επιστήμες που κατασκευάζονται με τη μέθοδο αυτή ονομάζονται *αποδεικτικές* ή *παραγωγικές επιστήμες*.

Η γένεση της αξιωματικής μεθόδου στην κλασσική Ελληνική αρχαιότητα

Η ιδέα της αρχής στην Ελληνική φιλοσοφική σκέψη

Η γένεση της αξιωματικής μεθόδου στα μαθηματικά είναι φαινόμενο όχι μόνο μαθηματικού χαρακτήρα. Μαθηματικές γνώσεις είχαν πολλοί λαοί και μεγάλοι πολιτισμοί. Όμως μόνο στην αρχαία Ελλάδα γεννήθηκε η ιδέα να κατασκευαστεί η Γεωμετρία ξεκινώντας από έναν πεπερασμένο αριθμό αρχικών προτάσεων.

Η ιδέα της ενιαίας αρχής του κόσμου εντοπίζεται ήδη στα φιλοσοφικά σχήματα των Ιώνων φιλοσόφων, με τα οποία επιχειρούσαν να ερμηνεύσουν τον κόσμο. Ο Εμπεδοκλής ανέπτυξε τη θεωρία των στοιχείων, από την αλληλεπίδραση των οποίων γεννιέται ο κόσμος. Οι αρχαίοι ατομιστές επεχείρησαν επίσης να ερμηνεύσουν τον κόσμο ξεκινώντας από κάποιες ελάχιστες αδιαίρετες οντότητες. Έτσι η τάση να εξηγηθεί ο κόσμος ξεκινώντας από ένα πεπερασμένο αριθμό αρχικών στοιχείων με κάποιους ορθολογικούς κανόνες δέσποζε στην πνευματική ατμόσφαιρα της αρχαίας Ελλάδας.

Στους κύκλους των φιλοσόφων της Πλατωνικής Ακαδημίας και των Περιπατητικών συζητείται το θέμα των αρχών πάνω στις οποίες πρέπει να κατασκευάζεται μια αποδεικτική επιστήμη. Σύμφωνα με τη θεωρία της επιστήμης του Πλάτωνα, η επιστήμη

1. είναι ένα σύνολο απόλυτων αληθειών,
2. ξεκινά από κάποιες αρχές, από τις οποίες συνάγονται οι αλήθειες της επιστήμης,
3. μελετά ιδεατά αντικείμενα που είναι σταθερά και αμετάβλητα στην πορεία του χρόνου. Απόλυτες αλήθειες μπορούν να διατυπωθούν μόνο για αντικείμενα αυτού του τύπου.

Τα μαθηματικά, κατά τον Πλάτωνα, επιτυγχάνουν την τελειότητα στο βαθμό που οι αρχές τους προκύπτουν από τη λεγόμενη Ιδέα του Αγαθού, που στο φιλοσοφικό σύστημα του Πλάτωνα παίζει ρόλο καθαρού Απολύτου.

Ο Αριστοτέλης, από την άλλη μας άφησε στα «Αναλυτικά Ύστερα» μια αρκετά επεξεργασμένη θεωρία αποδεικτικής επιστήμης. Η γενική λογική δομή μιας αποδεικτικής επιστήμης αποτελείται από όρους και προτάσεις που έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

(I) Η αποδεικτική επιστήμη είναι μια ακολουθία προτάσεων για τα στοιχεία ενός πεδίου αντικειμένων, του γένους (αρχή της ομογένειας).
Οι προτάσεις αυτές διαιρούνται σε αναπόδεικτες ή αρχικές (*αξιώματα, αιτήματα, αρχές, τα πρώτα*), και αποδείξιμες ή παράγωγες (*θεωρήματα*).
Οι όροι της πρότασης διαιρούνται σε μη οριζόμενους ή αρχικούς όρους (*αρχές, τα πρώτα*), και ορίσιμους ή παράγωγους όρους (*τα εκ τούτων*).
Ωστόσο, ο Αριστοτέλης δεν απαιτεί τη ρητή απαρίθμηση όλων των αρχικών προτάσεων και όρων.

(II) Από τις αρχικές προτάσεις, τα αξιώματα είναι προφανή και αναπόδεικτα, ενώ τα αιτήματα είναι υποθέσεις που λαμβάνονται χωρίς απόδειξη, αν και δεν είναι πάντοτε προφανείς.

(III) Οι αρχικοί όροι είναι άμεσα νοητοί και δεν ορίζονται.

(IV) Από τις αρχικές προτάσεις, τα αξιώματα είναι αληθείς και αναγκαίες προτάσεις. Η αλήθεια των αιτημάτων όμως δεν είναι λογικά αναγκαία, αλλά γίνεται δεκτή χωρίς απόδειξη.

Οι αναζητήσεις πάνω στις αρχές της αποδεικτικής επιστήμης στην Ακαδημία του Πλάτωνα και το Λύκειο, συνέτειναν πιθανότατα στη δημιουργία ενός ενιαίου συστήματος αρχών, που αποτέλεσε τη βάση των «Στοιχείων» του Ευκλείδη.

Το αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη

Η πρωταρχική ανάπτυξη της αξιωματικής μεθόδου έχει αφετηρία στα έργα των αρχαίων Ελλήνων γεωμετρών. Η πρώτη προσπάθεια να γραφούν «Στοιχεία» της Γεωμετρίας ανήκει στον Ιπποκράτη το Χίο. Σύμφωνα με μαρτυρία του Πρόκλου, διάφοροι γεωμέτρες επιχείρησαν να γράψουν «Στοιχεία». Στην πορεία της κατασκευής των «Στοιχείων» της Γεωμετρίας τέθηκε πιθανότατα το θέμα να διευκρινιστεί ποιες είναι οι προτάσεις εκείνες από τις οποίες όλες οι άλλες προτάσεις προκύπτουν ως συμπέρασμα. Αν και τα «Στοιχεία» των γεωμετρών αυτών δε διασώθηκαν, είναι ωστόσο λογικό να υποθέσουμε ότι η έκθεση της Γεωμετρίας διέφερε από έργο σε έργο κι ότι οι αρχικές προτάσεις σ' αυτά δεν ήταν οι ίδιες.

Το Βιβλίο Ι των «Στοιχείων» αρχίζει με 23 Ορισμούς οι οποίοι εισάγουν τις βασικές γεωμετρικές έννοιες (σημείο, γραμμή, επιφάνεια, ευθεία, επίπεδο, γωνία, σύνορο, σχήμα) και παράγωγες έννοιες με τη βοήθεια των οποίων ορίζονται τα βασικά γεωμετρικά σχήματα (ορθή, οξεία και αμβλεία γωνία, κύκλος, τρίγωνα, τετράπλευρα, παράλληλες ευθείες). Ωστόσο, ο ορισμός της έννοιας π.χ. του σημείου ή της ευθείας που δίνει ο Ευκλείδης δε χρησιμοποιείται πουθενά στη συνέχεια στις αποδείξεις των «Στοιχείων».

Τα τρία πρώτα Αιτήματα* διασφαλίζουν την εκτέλεση γεωμετρικών κατασκευών με κανόνα και διαβήτη. Το τέταρτο αίτημα εξασφαλίζει ότι μια ευθεία μπορεί να προεκταθεί κατά μονοσήμαντο τρόπο, και το πέμπτο αίτημα εξασφαλίζει την ύπαρξη σημείου τομής δύο ευθειών υπό τις συνθήκες του αιτήματος.

Οι Κοινές Έννοιες** είναι προτάσεις που περιγράφουν γενικές ιδιότητες της ισότητας ή ανισότητας μεγεθών. Όλες οι Κοινές Έννοιες εκτός της τέταρτης αφορούν όχι μόνο γεωμετρικά μεγέθη, αλλά και αριθμούς. Μόνον η τέταρτη έχει κατ' εξοχήν γεωμετρικό χαρακτήρα. Γι' αυτό θεωρείται από ορισμένους ιστορικούς των μαθηματικών ότι πιθανόν είναι μεταγενέστερη παρεμβολή.

Η επιλογή των αιτημάτων και των Κοινών Εννοιών είναι εν γένει εύστοχη. Όλες σχεδόν οι προτάσεις αυτές διατηρήθηκαν στο σύγχρονο αξιωματικό σύστημα της Γεωμετρίας. Ωστόσο, δεν είναι επαρκή, από σύγχρονη άποψη, για να θεμελιώσουν τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Απουσιάζουν εντελώς έννοιες όπως του «μεταξύ», «από το ίδιο μέρος», «εντός (εκτός) ενός γεωμετρικού σχήματος», και πολλές άλλες που ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί στη συνέχεια κατά τη διαδικασία των αποδείξεων. Όμως αυτό δεν αποτελεί μειονέκτημα από την Αριστοτέλεια άποψη της αποδεικτικής επιστήμης, αφού δεν επιβάλλεται η πλήρης απαρίθμηση όλων των αρχικών προτάσεων, κι επομένως επιτρέπεται η χρήση «προφανών», μη ρητά διατυπωμένων υποθέσεων στην πορεία της απόδειξης.

Η εφαρμογή της αξιωματικής μεθόδου έδωσε τη δυνατότητα της συστηματοποίησης του σώματος των γεωμετρικών προτάσεων κατά την αρχαιότητα και την αποφυγή λογικών λαθών όπως π.χ. οι φαύλοι κύκλοι. Επίσης συνέβαλε στην αποσαφήνιση της λογικής αλληλουχίας των εννοιών, πράγμα που προσέδωσε στη Γεωμετρία ανυπέρβλητη για την εποχή λογική αυστηρότητα.

Η γένεση της νέας αντίληψης της αξιωματικής μεθόδου στα τέλη του 19ου αι.

Ο διαχωρισμός της έννοιας του αξιωματικού συστήματος από την ερμηνεία του

Με την κατάρρευση του αρχαίου Ελληνικού πολιτισμού τα επιστημονικά κέντρα μετατοπίζονται στην Ανατολή και αργότερα στην Ευρώπη. Στη διάρκεια όλων αυτών των αιώνων το σύστημα των «Στοιχείων» παραμένει το ιδεώδες της μαθηματικής αυστηρότητας και το πρότυπο της επιστημονικής μεθόδου. Όμως η αξιωματική μέθοδος δε γνώρισε κάποια ιδιαίτερη ανάπτυξη μέχρι τα τέλη του 19ου αι. Ούτε υπήρξε κάποια σημαντική προσπάθεια βελτίωσης των εγγενών αδυναμιών της. Ο ρόλος της αξιωματικής μεθόδου στα μαθηματικά αρχίζει να αλλάζει σημαντικά από τα μέσα του 19ου αι. όταν ο Λομπατσέφσκι και ο Μπόλυαϊ

* 1. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
2. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.
3. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
4. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
5. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

** 1. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.
2. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.
3. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.
4. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
5. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον [ἐστιν].

απέδειξαν ότι μπορεί να κατασκευασθεί μια Γεωμετρία με αξιώματα διαφορετικά από τα Ευκλείδεια.

Οι σημαντικότερες ίσως αδυναμίες της Ευκλείδειας αξιωματικής μεθόδου σήμερα είναι ότι δεν παρέχει ακριβή περιγραφή του τι συνιστά λογική απόδειξη. Έτσι στους συλλογισμούς υπεισέρχεται το στοιχείο της γεωμετρικής εποπτείας, ιδιαίτερα σε προτάσεις που αφορούν τη συνέχεια των γεωμετρικών σχημάτων και τη σχετική τους θέση στο χώρο. Επίσης δεν υπάρχει σαφήνεια στον ορισμό των εννοιών. Η εισαγωγή των αρχικών εννοιών π.χ. από τον Ευκλείδη γίνεται με επεξηγήσεις που δίνουν την εντύπωση προσπάθειας ορισμού, αλλά παραμένουν μη λειτουργικοί.

Το πιο σημαντικό όμως χαρακτηριστικό του ιδεώδους αυτού είναι ότι η γεωμετρική θεωρία είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με το μοναδικό της μοντέλο –το φυσικό χώρο– και οι βασικές υποθέσεις της θεωρίας κατανοούνται ως οι χαρακτηριστικές ιδιότητες αυτού του μοντέλου. Ακόμα και με την ανακάλυψη της Υπερβολικής Γεωμετρίας οι μαθηματικοί δε συνειδητοποίησαν αμέσως τη διαμορφούμενη νέα αντίληψη της αξιωματικής μεθόδου, η οποία μας επιτρέπει να θεωρούμε τη Γεωμετρία ως επιστήμη που κατασκευάζεται από υποθέσεις που δε συνδέονται κατ' ανάγκην με το μοντέλο του φυσικού χώρου. Η Υπερβολική Γεωμετρία φάνταζε στα μάτια των μαθηματικών του 19ου αι. περισσότερο σαν ιδιοφυές παράδοξο στο σώμα της μαθηματικής γνώσης, παρά σαν εναλλακτικό σύστημα Γεωμετρίας, ισότιμο μάλιστα προς το Ευκλείδειο. Για να νομιμοποιηθεί η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία χρειάστηκε να συνδεθεί με τις συνήθεις αντιλήψεις του χώρου στα έργα του Μπελτράμι, του Κλάιν και του Πουανκαρέ, να επινοηθούν ερμηνείες (μοντέλα) της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο πλαίσιο της κλασσικής Γεωμετρίας.

Εκτός όμως από τη Γεωμετρία, τον 19ο αι. εισάγονται και μια σειρά νέες έννοιες, όπως οι ιδανικοί αριθμοί του Κούμμερ, οι υπερμιγαδικοί αριθμοί και τα γεωμετρικά τους ισοδύναμα, οι πολυδιάστατοι χώροι κτλ., η ερμηνεία των οποίων στο πλαίσιο των κλασικών μαθηματικών θεωριών γινόταν όλο και πιο πολύπλοκη. Εκτός από αυτό οι ερμηνείες αυτές αποδεικνυόταν ότι δεν είναι μοναδικές. Αυτό έδειχνε ότι οι θεωρίες αυτές πρέπει να εξετάζονται ανεξάρτητα από κάποια συγκεκριμένη ερμηνεία.

Έτσι στη διάρκεια του δεύτερου μισού του 19ου αι. προτείνονται αξιωματικοί ορισμοί μιας σειράς νέων εννοιών. Το 1854 ο Καίλεϋ προτείνει τον αξιωματικό ορισμό της αφηρημένης έννοιας της ομάδας (σε μορφή που είναι ορθή μόνο για πεπερασμένες ομάδες), το 1870 ο Κρόνεκερ προτείνει ένα σύστημα αξιωμάτων της θεωρίας πεπερασμένων Αβελιανών ομάδων και, εν γένει πολλά έργα μαθηματικών του 19ου αι. –του Χ. Χάνκελ (Hermann Hankel, 1839-1873), του Χ. Βέμπερ (Heinrich Weber, 1842-1913), του Ντέντεκιντ (Richard Dedekind, 1831-1916), και άλλων– είναι αφιερωμένα στην αξιωματικοποίηση τμημάτων της άλγεβρας.

Το 1882 ο Πας (Pasch M.) επιχειρεί την αξιωματικοποίηση της Γεωμετρίας. Στο αξιωματικό σύστημα του Πας εμφανίζονται για πρώτη φορά αξιώματα που χαρακτηρίζουν την έννοια του «μεταξύ», και εισάγεται η αρχή με τη βοήθεια της οποίας μπορεί ένα επίπεδο να διαιρεθεί από μία ευθεία και ο χώρος από ένα επίπεδο. Το 1889 ο Πεάνο (Giuseppe Peano, 1858-1932) στο έργο του για τα λογικά θεμέλια της Γεωμετρίας καταφέρνει να αξιωματικοποιήσει το τμήμα της Γεωμετρίας που μελετά τη σχετική θέση σημείων, ευθειών και επιπέδων. Το σύστημα του Πεάνο θυμίζει αυτό του Πας, όμως ο Πεάνο επιτυγχάνει να αποφύγει συλλογισμούς εποπτικού χαρακτήρα. Στο πλαίσιο της Ιταλικής σχολής, οι μαθητές του Πεάνο, Αμοδέο, Φανό (Gino Fano, 1871-1952), Ενρίκε (Federigo Enriques, 1871-1946) και Πιερί (Mario Pieri, 1860-1913), επιτυγχάνουν τη θεμελίωση της προβολικής Γεωμετρίας.

Παράλληλα γίνονται μελέτες για την αξιωματικοποίηση της αριθμητικής στα έργα του Χ. Γκράσσμαν (Hermann Grassmann, 1809-1877), του Γκ. Κάντορ (Georg Cantor, 1845-1918), του Γκ. Φρέγκε (Gottlob Frege, 1848-1925) και του Μπ. Ράσσελ (Bertrand Russell, 1872-1970). Τα πρώτα πλήρη συστήματα αξιωμάτων της αριθμητικής προτείνονται το 1888 από το Ντέντεκιντ και το 1891 από τον Πεάνο.

Το αξιωματικό σύστημα του Χίλμπερτ

Σε όλες αυτές τις έρευνες που αναφέραμε δεσπόζει η τάση να διαχωριστεί η μαθηματική θεωρία από την ερμηνεία (το μοντέλο) με βάση το οποίο κατασκευάζεται. Η τάση αυτή οδήγησε και στην αξιωματική κατασκευή της Γεωμετρίας στο έργο του Ντ. Χίλμπερτ «Τα θεμέλια των μαθηματικών», το οποίο αντανακλά τη νέα αντίληψη της αξιωματικής μεθόδου. Πώς όμως εκδηλώνεται αυτή η τάση στο πεδίο της Γεωμετρίας και σε τι συνίσταται η καινοτομία του Χίλμπερτ;

Πριν την ανακάλυψη της Υπερβολικής Γεωμετρίας, όταν η Γεωμετρία του Ευκλείδη εθεωρείτο ως η μόνη δυνατή Γεωμετρία των σχέσεων του φυσικού χώρου, ήταν νόμιμο να επιχειρήσει κανείς να ορίσει τις βασικές γεωμετρικές έννοιες, ερμηνεύοντάς τες με βάση τα πραγματικά αρχέτυπα των εννοιών αυτών στο φυσικό χώρο. Αυτή ακριβώς ήταν η προσέγγιση του Ευκλείδη και των μετέπειτα γεωμετρών μέχρι το 19° αι. Ο ίδιος ο Ευκλείδης επιχειρεί να ορίσει π.χ. το σημείο ως «κάτι το οποίο δεν έχει μέρη», δηλαδή ως οντότητα χωρίς εσωτερική δομή ή άτομο. Ο ορισμός αυτός, που επιχειρεί να επεξηγήσει τη μαθηματική έννοια καταφεύγοντας σε αρχέτυπα του φυσικού χώρου, κατανοείται ποικιλοτρόπως από τους σχολιαστές του Ευκλείδη και τους μετέπειτα μαθηματικούς.

Όμως μετά την ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών έγινε σαφές ότι η προσέγγιση του Ευκλείδη κατά τον ορισμό των αρχικών εννοιών είναι αδύνατη. Κάθε δυνατή Γεωμετρία έχει τις δικές της αρχικές έννοιες, οι οποίες εξαρτώνται από τα αξιώματα του γεωμετρικού συστήματος. Οι ορισμοί των αρχικών εννοιών έτσι συνδέονται με το δεδομένο γεωμετρικό σύστημα κι όχι πλέον με το φυσικό χώρο.

Αφού λοιπόν δεν είναι δυνατόν να δοθεί ορισμός των αρχικών βασικών εννοιών για όλες τις δυνατές γεωμετρίες, οι αρχικές έννοιες έπρεπε να οριστούν ως αντικείμενα οποιασδήποτε φύσης που ικανοποιούν τα αξιώματα της Γεωμετρίας. Τα αξιώματα αυτά ορίζουν έμμεσα τις αρχικές έννοιες. Στο πλαίσιο αυτό τα αξιώματα παύουν πλέον να θεωρούνται προφανείς αλήθειες που δε χρήζουν απόδειξης. Η έννοια του «προφανούς» αντικαθίσταται τώρα από την έννοια της «απλότητας» του αξιωματικού συστήματος.

Στο σύστημα του Χίλμπερτ τα αρχικά μαθηματικά αντικείμενα είναι τριών ειδών: τα «σημεία», οι «ευθείες» και τα «επίπεδα», που συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις του «ανήκειν», του «μεταξύ» και της «ισοδυναμίας». Το σύστημα του Χίλμπερτ εξετάζει τις αρχικές αυτές έννοιες και τις σχέσεις τους και οι πέντε ομάδες αξιωμάτων που εισάγει συνιστούν έμμεσο ορισμό των αρχικών αντικειμένων και των σχέσεών τους.

(I) Τα *αξιώματα συνδέσεως* (*«ανήκειν»*) ορίζουν τις ιδιότητες της αμοιβαίας θέσης μεταξύ σημείων, ευθειών και επιπέδων[1].

(II) Τα *αξιώματα διάταξης* ορίζουν τις ιδιότητες της αμοιβαίας θέσης σημείων πάνω σε μια ευθεία ή ένα επίπεδο[2].

(III) Τα *αξιώματα ισοδυναμίας* ορίζουν την έννοια της «ισότητας» δύο τμημάτων ή γωνιών[3].

(IV) Τα *αξιώματα συνέχειας*[4].

(V) Το *αξίωμα παραλληλίας*[5] .

Η έννοια της ερμηνείας (μοντέλου)

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ένα γεωμετρικό σύστημα δίνεται με τη βοήθεια ενός συστήματος αξιωμάτων. Τα αντικείμενα που ικανοποιούν τα αξιώματα αυτού του γεωμετρικού συστήματος μπορεί να είναι διάφορα. Τα διάφορα αυτά αντικείμενα συνιστούν διαφορετικές ερμηνείες ή μοντέλα του γεωμετρικού συστήματος.

---

1. Τα αξιώματα αυτά είναι οκτώ:
   - (I_1) Από οποιαδήποτε δύο σημεία διέρχεται μία μόνο ευθεία.
   - (I_2) Σε κάθε ευθεία υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία.
   - (I_3) Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία που δεν κείνται στην ίδια ευθεία.
   - (I_4) Από οποιαδήποτε τρία σημεία που δεν κείνται στην ίδια ευθεία, διέρχεται ένα μόνο επίπεδο.
   - (I_5) Σε οποιοδήποτε επίπεδο υπάρχει πάντοτε ένα σημείο που ανήκει σ' αυτό.
   - (I_6) Αν δύο σημεία βρίσκονται σε ένα επίπεδο, τότε και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία αυτά βρίσκεται σ' αυτό το επίπεδο.
   - (I_7) Αν δύο επίπεδα έχουν κοινό σημείο, τότε έχουν τουλάχιστον ένα ακόμα κοινό σημείο.
   - (I_8) Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα σημεία που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.
2. Τα αξιώματα διάταξης είναι τέσσερα:
   - (II_1) Από τρία διαφορετικά σημεία μιας ευθείας ένα και μόνον ένα βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων.
   - (II_2) Για οποιαδήποτε δύο σημεία A και $Γ$ υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο B στην ευθεία $AΓ$ τέτοιο, ώστε το σημείο $Γ$ να βρίσκεται μεταξύ του A και του B.
   - (II_3) Για οποιαδήποτε τρία σημεία μιας ευθείας υπάρχει όχι περισσότερο από ένα σημείο που βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων.
     Η σχέση του «μεταξύ» για σημεία σε μια ευθεία μας επιτρέπει να ορίσουμε την έννοια του *ευθύγραμμου τμήματος*.
   - (II_4) Έστω A, B, $Γ$ τρία σημεία που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία και έστω $ε$ ευθεία στο επίπεδο των A, B, $Γ$ που δε διέρχεται από κανένα από τα σημεία A, B, $Γ$. Αν η ευθεία ε διέρχεται από ένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB, τότε πρέπει να διέρχεται κι από ένα σημείο του τμήματος $AΓ$ ή από ένα σημείο του τμήματος $BΓ$ (αξίωμα του Πας).

Έστω π.χ. ότι ερμηνεύουμε τα αρχικά αντικείμενα ως εξής: ως «σημείο» θεωρούμε οποιαδήποτε σφαίρα ακτίνας R, ως «ευθεία» κάθε άπειρο κυκλικό κύλινδρο ακτίνας R, και ως «επίπεδο» οποιοδήποτε τμήμα του χώρου που περιέχεται μεταξύ δύο επιπέδων που βρίσκονται σε απόσταση $2R$ το ένα από το άλλο. Θα λέμε ότι ένα «σημείο» κείται επ' «ευθείας» αν η αντίστοιχη σφαίρα περιέχεται στον κύλινδρο. Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων μπορεί να ορισθεί ως η απόσταση μεταξύ των κέντρων των αντίστοιχων σφαιρών. Με ανάλογο τρόπο μπορούν να οριστούν διάφορα «σχήματα». Τότε όλα τα αξιώματα (και επομένως και τα θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας) θα πρέπει να ικανοποιούνται στην ερμηνεία (μοντέλο) αυτή.

Με τον παραπάνω τρόπο κατασκευάσαμε ένα μοντέλο του Ευκλείδειου γεωμετρικού συστήματος. Όλες οι ιδιότητες και τα θεωρήματα που προκύπτουν από το αφηρημένο σύστημα των αξιωμάτων «μεταφέρονται» στα συγκεκριμένα αντικείμενα που είναι ερμηνείες των βασικών εννοιών του αξιωματικού συστήματος. Επομένως, οποιασδήποτε φύσης κι αν είναι τα αντικείμενα αυτά και σε οποιοδήποτε κλάδο της επιστήμης κι αν ανήκουν οι ιδιότητές τους μπορούν να θεωρηθούν γνωστές εκ των προτέρων, επειδή προκύπτουν από τις ιδιότητες του αφηρημένου αξιωματικού συστήματος. Έτσι δεν απαιτείται να μελετηθούν τα αντικείμενα αυτά ξεχωριστά. Αυτό όμως διευρύνει το πεδίο εφαρμογής της Γεωμετρίας και καθιστά τη σύγχρονη αξιωματική μέθοδο ισχυρότατο επιστημονικό εργαλείο.

Εκτός από τη Γεωμετρία, η μέθοδος του μοντέλου χρησιμοποιείται και σε άλλους κλάδους των μαθηματικών, αλλά και σε άλλους κλάδους της επιστήμης. Στην άλγεβρα π.χ. γνωρίζουμε ότι το σύνολο των ακεραίων είναι μοντέλο της αφηρημένης έννοιας της ομάδας. Ένα άλλο μοντέλο της ομάδας είναι το σύνολο των ρητών, το οποίο είναι ταυτόχρονα και μοντέλο της αφηρημένης έννοιας του σώματος.

Η νέα αντίληψη της αξιωματικής μεθόδου που διαμορφώθηκε στα τέλη του 19ου αι. είναι συνυφασμένη με την ιδέα του *μοντέλου* και συνίσταται στο ότι αντικείμενο μιας αξιωματικής θεωρίας αποτελεί οποιοδήποτε μοντέλο (ερμηνεία) της θεωρίας αυτής.

Το πρόβλημα της μη αντιφατικότητας της Γεωμετρίας

Η αξιωματικοποίηση της Γεωμετρίας από τον Χίλμπερτ επέτρεψε στον Φ. Κλάιν και τον Α. Πουανκαρέ να αποδείξουν τη σχετική μη αντιφατικότητα της Γεωμετρίας Λομπατσέφσκι-Μπόλυαϊ ως προς τη Γεωμετρία του Ευκλείδη. Αυτή η απόδειξη, που βασίζεται στην ιδέα του μοντέλου της αξιωματικής θεωρίας, συνίσταται στο να δείξει κανείς έναν τρόπο ερμηνείας

3. Τα αξιώματα αυτά είναι πέντε:
   - (III_1) Αν A και B είναι δύο διαφορετικά σημεία στην ευθεία ε και A' είναι ένα σημείο της ίδιας ευθείας ή άλλης ευθείας ε', τότε μπορεί πάντοτε να βρεθεί σημείο B' που βρίσκεται στο δεδομένο από το σημείο A' μέρος της ευθείας ε' τέτοιο, ώστε το τμήμα AB να είναι ισοδύναμο (ίσο) με το τμήμα $A'B'$.
   - (III_2) Αν δύο τμήματα είναι ισοδύναμα προς τρίτο, τότε είναι και μεταξύ τους ισοδύναμα.
   - (III_3) Έστω AB και $B\Gamma$ δύο τμήματα της ευθείας ε που δεν έχουν κοινό σημείο και έστω επίσης $A'B'$ και $B'\Gamma'$ δύο τμήματα της ίδιας ευθείας ή άλλης ευθείας ε' που επίσης δεν έχουν κοινό σημείο. Αν τώρα $AB = A'B'$, $B\Gamma = B'\Gamma'$, τότε και $A\Gamma = A'\Gamma'$.
     Η γωνία ορίζεται ως το σχήμα που αποτελείται από δύο διαφορετικές ημιευθείες με κοινό αρχικό σημείο.
   - (III_4) Από δεδομένη ημιευθεία σε δεδομένο ημιεπίπεδο που ορίζεται από αυτή την ημιευθεία και την προέκτασή της, μπορεί να σχηματιστεί μια μοναδική γωνία ισοδύναμη με τη δεδομένη γωνία.
   - (III_5) Αν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A_1B_1\Gamma_1$ έχουν $AB = A_1B_1$, $A\Gamma = A_1\Gamma_1$ και $\angle A = \angle A_1$, τότε και $\angle B = \angle B_1$, $<\Gamma = \angle\Gamma_1$.
4. Τα αξιώματα συνέχειας είναι δύο:
   - (IV_1) Έστω AB και $\Gamma\Delta$ δύο οποιαδήποτε τμήματα. Τότε στην ευθεία AB υπάρχει πεπερασμένος αριθμός σημείων $A_1, A_2, ..., A_n$, τέτοιων ώστε τα τμήματα AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$, να είναι ισοδύναμα με το τμήμα $\Gamma\Delta$ και το σημείο B να βρίσκεται μεταξύ A και A_n *(αξίωμα Ευδόξου-Αρχιμήδη)*.
   - (IV_2) Τα σημεία μιας ευθείας σχηματίζουν σύστημα, το οποίο, τηρουμένης της γραμμικής διάταξης, του πρώτου αξιώματος ισοδυναμίας και του αξιώματος Ευδόξου-Αρχιμήδη δεν είναι επεκτάσιμο, δηλ. σ' αυτό το σύστημα σημείων δεν είναι δυνατόν να προστεθεί ένα ακόμα σημείο, έτσι ώστε στο επεκτεταμένο σύστημα που αποτελείται από το αρχικό σύστημα και το συμπληρωματικό σημείο να ικανοποιούνται τα παραπάνω αξιώματα (*αξίωμα γραμμικής πληρότητας*).
5. Έστω ε τυχούσα ευθεία και σημείο A εκτός αυτής. Στο επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία ε και το σημείο A υπάρχει όχι περισσότερο από μία ευθεία που διέρχεται από το σημείο A και δεν τέμνει την ευθεία ε.

των εννοιών και προτάσεων της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας με όρους της Ευκλείδειας (στην περίπτωση της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας η μέθοδος απέδειξε ότι αν η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι μη αντιφατική, τότε και η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι επίσης μη αντιφατική).

Όσον αφορά τη μη αντιφατικότητα της ίδιας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αυτή ανάγεται στη μη αντιφατικότητα της αριθμητικής των φυσικών αριθμών. Ωστόσο, δεν υπάρχει απόλυτη απόδειξη της μη αντιφατικότητας της αριθμητικής (αν και υπάρχουν αποδείξεις μη αντιφατικότητας υποσυστημάτων της αριθμητικής). Έτσι δεχόμαστε ότι μια αξιωματική θεωρία είναι μη αντιφατική αν μπορεί να κατασκευαστεί αριθμητικό μοντέλο της θεωρίας αυτής. Τα παραπάνω αποκαλύπτουν τον ιδιαίτερο ρόλο της αριθμητικής στο πρόβλημα της μη αντιφατικότητας, δεδομένου ότι το ανάλογο πρόβλημα για μια σειρά άλλες μαθηματικές θεωρίες ανάγεται επίσης στο πρόβλημα της μη αντιφατικότητας της αριθμητικής. Η μέθοδος της απόδειξης της σχετικής μη αντιφατικότητας μιας θεωρίας με τη βοήθεια της κατασκευής ενός μοντέλου εφαρμόζεται σήμερα ευρύτατα στα θεμέλια των μαθηματικών και τη μαθηματική λογική για την απόδειξη της σχετικής μη αντιφατικότητας διάφορων μαθηματικών και λογικών θεωριών.

Το πρόβλημα της ανεξαρτησίας των αξιωμάτων της Γεωμετρίας

Η μέθοδος του μοντέλου μας επιτρέπει επίσης να λύσουμε το πρόβλημα της ανεξαρτησίας των αξιωμάτων. Προκειμένου να αποδειχθεί ότι ένα αξίωμα A της θεωρίας T δεν είναι αποδείξιμο από τα υπόλοιπα αξιώματα της θεωρίας αυτής, αρκεί να κατασκευαστεί ένα μοντέλο της θεωρίας T, στο οποίο το αξίωμα A είναι ψευδές, ενώ τα υπόλοιπα αξιώματα είναι αληθή.

Η ύπαρξη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας αποδεικνύει την ανεξαρτησία του αξιώματος παραλληλίας από τα υπόλοιπα αξιώματα της Γεωμετρίας του Ευκλείδη. Το σύστημα αξιωμάτων της Υπερβολικής Γεωμετρίας είναι ένα σύστημα που λαμβάνεται από το παραπάνω αξιωματικό σύστημα της Γεωμετρίας του Ευκλείδη με την αλλαγή του αξιώματος παραλληλίας με το παρακάτω αξίωμα:

> «Έστω ε τυχούσα ευθεία και σημείο A εκτός αυτής. Στο επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία ε και το σημείο A άγονται περισσότερες από μία ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και δεν τέμνουν την ευθεία ε».

Με ανάλογο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί η ανεξαρτησία των αξιωμάτων συνέχειας. Η ανεξαρτησία του αξιώματος Ευδόξου-Αρχιμήδη αποδεικνύεται με τη βοήθεια της κατασκευής ενός μοντέλου «μη Αρχιμήδειας Γεωμετρίας».

Ιδιαίτερο ρόλο έχει το αξίωμα (I_7), το οποίο στην ουσία εξασφαλίζει ότι ο χώρος έχει τρεις διαστάσεις. Η ανεξαρτησία αυτού του αξιώματος από τα υπόλοιπα αποδεικνύεται, π.χ. με την κατασκευή ενός μοντέλου τετραδιάστατου Ευκλείδειου χώρου.

Έτσι το πρόβλημα της ανεξαρτησίας των αξιωμάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας οδηγεί στη μελέτη νέων «γεωμετρικών χώρων», που διαφέρουν σημαντικά ως προς τις ιδιότητές τους από το συνήθη χώρο του Ευκλείδη.

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

§2.1 - 2.10

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. i) 6 τμήματα, ii) 10 τμήματα.
2. i) 3 σημεία, ii) 3 τμήματα και 12 ημιευθείες.
3. $ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ = ...$
4. $ΑΓ = ΑΜ + ΜΒ + ΒΝ + ΝΓ = ...$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τα ΑΔ, ΒΓ ως συνάρτηση του ΕΖ.
2. Υπολογίστε τα ΓΑ, ΓΒ ως συνάρτηση του ΓΜ.
3. α) Να διακρίνετε περιπτώσεις.
   β) προκύπτει από το α).

Σύνθετα Θέματα

1. Να εξετάσετε δύο περιπτώσεις. Αν το Α είναι μεταξύ των Β, Γ ή όχι.
2. 6 τροχονόμοι.

§2.11 - 2.16

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Αφαιρούμε την $y\hat{O}z$.
2. $\frac{1}{2}$ ορθής.
3. Ορθή γωνία. Μετά από 6 ώρες.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. $Δ\hat{O}Ε = Δ\hat{O}y + y\hat{O}Ε = \ldots$
2. Υπολογίστε τις $Γ\hat{O}Α$, $Γ\hat{O}Β$ ως συνάρτηση της $Γ\hat{O}Δ$.
3. Όμοια με την προηγούμενη άσκηση.

Σύνθετα Θέματα

1. Υπολογίστε τις $Α\hat{O}Δ$, $Β\hat{O}Γ$ ως συνάρτηση της $x\hat{O}y$.
2. $Δ\hat{O}Ε = Β\hat{O}Δ - Β\hat{O}Ε = \ldots$

§2.17 - 2.18

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Άπειροι.
2. Απλή.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Είναι $ΟΑ = ΟΔ$ και $ΟΒ = ΟΓ$.
2. Η ΟΓ είναι διχοτόμος της $Α\hat{O}Β$.

§2.19

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. i) Είναι: $\overset{\frown}{ΡΑ} = \overset{\frown}{ΡΜ} - \overset{\frown}{ΑΜ}$ και $\overset{\frown}{ΡΒ} = \overset{\frown}{ΡΜ} + \overset{\frown}{ΜΒ}$.
   ii) Είναι: $\overset{\frown}{ΣΑ} = \overset{\frown}{ΣΜ} + \overset{\frown}{ΜΑ}$ και $\overset{\frown}{ΣΒ} = \overset{\frown}{ΜΒ} - \overset{\frown}{ΣΜ}$.
2. α) $(\overset{\frown}{ΑΓ}) = 130°$, $(\overset{\frown}{ΓΒ}) = 50°$.
3. 30° και 60°.
4. 72°.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. 45°.
2. 35° και 55°.
3. $Α\hat{O}Β = 36°$ κτλ.

Γενικές Ασκήσεις

1. Αν Ο μέσο ΑΒ τότε $ΕΖ = ΟΖ - ΟΕ$ κτλ.
2. Αν Ο μέσο ΒΖ αρκεί $ΔΒ = ΖΕ$.
3. $ΑΕ = ΑΒ + \frac{ΒΔ}{2}$, $ΒΔ = ΒΓ + ΓΔ$ κτλ.
4. Αποδείξτε ότι $Α\hat{O}x = 180°$.
5. 45°.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

§3.1 - 3.2

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΓ είναι ίσα.
2. Τα τρίγωνα ΜΑΚ, ΚΒΛ και ΛΓΜ είναι ίσα.
3. Συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α′Β′Μ′ όπου Μ, Μ′ τα μέσα των ΒΓ και Β′Γ′ αντίστοιχα.
4. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΑΒΖ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Είναι $Α\overset{\Delta}{Κ}Β = Δ\overset{\Delta}{Κ}Ε$ και $Α\overset{\Delta}{Κ}Γ = Δ\overset{\Delta}{Κ}Ζ$.
2. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΕΓ.
3. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ.

§3.3 - 3.4

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α′Β′Δ′ καθώς και τα ΑΒΕ και Α′Β′Ε′. ii) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΕ και Α′Β′Ε′.
2. α) Είναι $Α\overset{\Delta}{Δ}Γ = Α'\overset{\Delta}{Δ'}Γ'$
   β) Χρησιμοποιήστε το α).
3. Να βρείτε τρεις πλευρές ίσες.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Εφαρμογή του κριτηρίου ΓΠΓ.
2. Εφαρμογή των κριτηρίων ΠΓΠ και ΠΠΠ.
3. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ίσα.

Σύνθετα Θέματα

1. α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α′Β′Δ′.
   β) $Α\overset{\Delta}{Β}Μ = Α'\overset{\Delta}{Β'}Μ'$.
   γ) $Α\overset{\Delta}{Β}Θ = Α'\overset{\Delta}{Β'}Θ'$.
2. Χαρακτηριστική ιδιότητα μεσοκαθέτου.
3. α) Απλό,
   β) Αποδείξτε ότι $Ε\hat{Α}Γ = Α\hat{Β}Δ$.

§3.5 - 3.6

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΕΒΓ, ΒΔ και ΓΕ τα ύψη.
2. α) Αν $ΚΔ, ΛΕ \perp ΒΓ$, να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΚ και ΕΓΛ.
   β) Αν $ΚΗ \perp ΑΓ$ και $ΛΖ \perp ΑΒ$, να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΗΑΚ και ΖΑΛ.
3. Να συγκρίνετε τα δύο ορθογώνια τρίγωνα που προκύπτουν.
4. Αν $ΑΔ \perp ΒΓ$ και $Α'Δ' \perp Β'Γ'$ να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α′Β′Δ′.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Αν $ΜΕ \perp ΑΒ$ και $ΜΔ \perp ΑΓ$, να

συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΕ και ΑΜΔ.

2. Το τρίγωνο με πλευρές $υ_α$, $μ_α$ είναι ίσο με το τρίγωνο που έχει πλευρές $υ_{α'}$, $μ_{α'}$.
3. Αν ΒΔ⊥ΑΓ, Β′Δ′⊥Α′Γ′, ΓΕ⊥ΑΒ και Γ′Ε′⊥Α′Β′ αποδείξτε ότι $\overset{\Delta}{ΒΕΓ} = \overset{\Delta}{Β'Ε'Γ'}$ και $\overset{\Delta}{ΒΔΓ} = \overset{\Delta}{Β'Δ'Γ'}$.
4. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΕΔΒ και στη συνέχεια τα ΑΒΓ και ΕΒΖ.
5. Σε ίσες χορδές αντιστοιχούν ίσα τόξα.

Σύνθετα Θέματα

1. i) Είναι ΔΒ = ΔΓ και ΔΕ = ΔΖ ii) Είναι ΑΕ = ΑΖ και ΓΖ′ = ΒΕ′.
2. Αν γ = γ′ προεκτείνετε τις ΑΓ, Α′Γ′ κατά τμήματα ΓΔ = α, Γ′Δ′ = α′ αντίστοιχα.

§3.7

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Είναι ο κύκλος (Μ, ΜΑ) χωρίς τα σημεία τομής του με την ευθεία ΒΓ.
2. Είναι ο κύκλος (Ο, 2R).

§3.8 - 3.9

Ασκήσεις Εμπέδωσης

2. Εφαρμογή §3.8.
3. Να λάβετε υπόψη την προηγούμενη άσκηση.
4. Εφαρμογή §3.8.
5. Αποδείξτε ότι το συμμετρικό κάθε σημείου της γωνίας ως προς τη διχοτόμο είναι σημείο της γωνίας.
6. Ιδιότητες μεσοκαθέτου.

§3.10 - 3.11 - 3.12

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Θεώρημα εξωτερικής γωνίας.
2. Είναι $Β\hat{Α}Γ = Β\hat{Γ}Α$.
3. Διακρίνετε περιπτώσεις για τη θέση του ίχνους του ύψους στη ΒΓ.
4. Θεώρημα εξωτερικής γωνίας.
5. $Α\hat{Μ}Β > \hat{Γ}$ κτλ.
6. Φέρουμε ΔΕ⊥ΒΓ.
7. Τα τρίγωνα ΟΒΜ και ΟΓΛ είναι ίσα.
8. Είναι ΒΔ = ΓΔ.
9. Εφαρμογή του: $\hat{Β} = \hat{Γ}$ συνεπάγεται β = γ.
10. Εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Από την $μ_α < \frac{α}{2}$ προκύπτουν ΑΜ < ΒΜ και ΑΜ < ΜΓ.
2. Εφαρμογή §3.12.
3. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά ίσο τμήμα ΜΑ′.
4. Αν τα Σ, Ο, Μ δεν είναι συνευθειακά, εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα στο $\overset{\Delta}{ΣΟΜ}$.
5. Αν Μ το μέσο της ΑΓ, το $\overset{\Delta}{ΑΒΜ}$ είναι ισοσκελές.
6. Παίρνουμε το μέσο του $\overset{\frown}{ΑΒ}$.
7. Εφαρμογή §3.12.

Σύνθετα Θέματα

1. i) τριγωνική ανισότητα στα τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ και ΔΟΑ.

   ii) Όταν το Ο ταυτίζεται με το σημείο τομής των διαγωνίων.
2. Αποδείξτε ότι $Μ\hat{Ε}Β = Μ\hat{Β}Ε$.
3. Εφαρμόστε την τριγωνική ανισότητα.
4. Θεωρήστε τα συμμετρικά του Γ ως προς τις πλευρές της γωνίας.

§3.13

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σύγκριση πλαγίων τμημάτων.
2. Σύγκριση πλαγίων τμημάτων.
3. Σύγκριση κάθετου και πλάγιου τμήματος.

§3.14 - 3.15

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να συγκρίνετε τα αποστήματα των χορδών.
2. Ιδιότητες διακεντρικής ευθείας ενός σημείου.
3. Ισότητα εφαπτόμενων τμημάτων.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Βρείτε ισοσκελή τρίγωνα.
2. Φέρτε τη ΜΟ και αποδείξτε ότι $Ο\hat{Μ}Β = Β\hat{Μ}Γ$.
3. Η ΟΡ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.

§3.16

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σχετικές θέσεις δύο κύκλων.
2. Εφάπτονται εσωτερικά.
3. Εφάπτονται εξωτερικά.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. i) Αποδείξτε ότι

   ΡΟ – 2R < ΡΟ < ΡΟ + 2R.

   ii) Το Α είναι μέσο του ΟΓ.
2. i) απλό,

   ii) $Ο_1Ο_2 < Ο_1Α + ΑΒ + ΒΟ_2$,

   iii) $ΑΒ < ΑΟ_1 + Ο_1Ο_2 + Ο_2Β$.
3. Η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων.

§3.17 - 3.18

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Διχοτομούμε μια ορθή γωνία.
2. Απλή.
3. Κατασκευή 3 §3.18.
4. Αρχικά κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο του ΒΓ = α.
5. i), ii) Αρχικά κατασκευάζουμε μια ορθή γωνία $x\hat{Α}y$.

Γενικές Ασκήσεις

1. Στη Γ′Β′ παίρνουμε σημείο Β″ τέτοιο ώστε Γ′Β″ = ΓΒ.
2. Ισότητα τριγώνων.
3. Πάνω στον κύκλο παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΓΕ = ΑΒ.
4. Είναι $\overset{\Delta}{ΑΒΕ} = \overset{\Delta}{ΒΓΖ}$ κτλ.
5. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και παίρνουμε το μέσο Ε της ΑΓ.
6. Φέρουμε τη διχοτόμο ΒΔ και παίρνουμε το μέσο Μ της ΒΓ.
7. Προεκτείνουμε τις διαμέσους ΑΜ και Α′Μ′ κατά ίσα τμήματα.
8. Ιδιότητα μεσοκαθέτου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

§4.1 - 4.5

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Αποδείξτε ότι $\hat{\Delta} = \hat{E}$.
2. Αποδείξτε ότι $\hat{O}_1 = \hat{A}_1$.
3. Αποδείξτε ότι $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$.
4. Βρείτε δύο κατάλληλες γωνίες ίσες.
5. Όμοια με την προηγούμενη άσκηση.
6. Είναι $OM \perp B$, ...

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. $AM \perp B\Gamma$ οπότε $AM // \Gamma x$.
2. Αποδείξτε ότι $AB = AE$.
3. Αποδείξτε ότι $A\Delta = AB$.
4. $\Delta E = \Delta I + IE = ...$
5. $B\Gamma = B\Delta + \Delta E + \Delta\Gamma = ...$

Σύνθετα Θέματα

1. Αποδείξτε ότι $EZ // B\Gamma$ και $MK // B\Gamma$.
2. Φέρουμε $\Gamma Z // Ax // By$.
3. $\Delta E = I\alpha E - I\alpha\Delta$.
4. α) απλό
   β) $BE + \Gamma Z = BA + A\Gamma =$ σταθερό.
   γ) Προεκτείνουμε την ΕΜ κατά ίσο τμήμα.

§4.6 - 4.8

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. α) $\hat{B} = 60°$, $\hat{\Gamma} = 30°$
   β) $\hat{B} = 36°$, $\hat{\Gamma} = 54°$.
2. $\hat{A} = 36°$ οπότε $B\hat{I}\Gamma = 108°$.
3. $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 36°$.
4. Οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές.
5. $\hat{\Delta} = 36°$.
6. $\omega = 45°$, $\varphi = 55°$.
7. $\nu = 7$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{A} + \hat{\Gamma}$ οπότε.... $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.
2. Παρατηρήστε ότι είναι εξωτερικές γωνίες τριγώνου.
3. $\Delta\hat{A}E + A\hat{E}\Delta = 90°$, $A\hat{E}\Delta$ εξωτερική στο τρίγ. ΑΕΓ.
4. $A\hat{E}B + \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = 180°$ κτλ.
5. Υπολογίστε την $\hat{A}$ από τρίγ. ΑΒΓ και την $E\hat{\Delta}\Gamma$ από τρίγ. ΔΕΓ.
6. Αποδείξτε ότι $\hat{Z} = \hat{E}$.
7. Αποδείξτε ότι $\hat{Z} = \hat{H}$.

Σύνθετα Θέματα

1. Αν η ΔΕ τέμνει την ΒΓ στο Κ αποδείξτε ότι το τρίγ. ΒΔΚ είναι ορθογώνιο.
2. Παρατηρήστε ότι το τρίγ. ΑΒΕ είναι ισοσκελές.
3. Αρκεί $\Delta\hat{A}B + \hat{A} + \Gamma\hat{A}E = 180°$.
4. α) Αποδείξτε ότι $\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{E}$
   β) Προκύπτει από τα τρίγ. ΒΔΓ και ΔΓΕ.
5. i) απλό
   ii) $Z\hat{A}H = Z\hat{A}\Delta + \Gamma\hat{A}H$, κτλ.
6. Αν η διχοτόμος της Β τέμνει την ΔΓ στο Ε, από τρίγ. ΔΖΕ...
7. Αποδείξτε ότι $\alpha // \beta$.

Γενικές Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τις $B\hat{\Delta}\Gamma$ και $\Gamma\hat{E}A$ ως συνάρτηση των $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$. Είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 120°$ ($\hat{A} = 60°$).
2. Παίρνουμε το μέσο Ζ του ΕΓ.
3. Φέρουμε $\Delta H \perp AB$ και $\Delta K \perp A\Gamma$.
4. Είναι $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180°$ (αφού $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90°$).
5. i) Είναι $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ ($AB < A\Gamma$).
   ii) προεκτείνουμε την ΑΜ κατά ίσο τμήμα
   iii) $B\hat{A}E = E\hat{A}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2}$ οπότε από i) και ii) ....
6. Έχουμε τρία ισοσκελή τρίγωνα.
7. Παρατηρήστε τα ίσα εφαπτόμενα τμήματα που σχηματίζονται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

§5.1 - 5.2

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Τρίγ. ΑΔΕ ισοσκελές.
2. Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.
3. i) $AE // = \Gamma Z$.
   ii) Τα παραλληλόγραμμα έχουν μια κοινή διαγώνιο.
4. Τρίγ. ΑΕΔ ισοσκελές.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. $ME = A\Delta$ και τρίγ. ΜΔΒ ισοσκελές.
2. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΓ.
3. Φέρουμε την ΑΓ.
4. Τα ΑΖΒΓ και ΑΒΓΗ είναι παραλληλόγραμμα.
5. Γράφουμε κύκλο (Ο, λ), όπου Ο τυχαίο σημείο της μιας ευθείας.

Σύνθετα Θέματα

1. i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΕΚ και ΓΗΖ
   ii) Τα παραλληλόγραμμα, ανά δύο έχουν μια κοινή διαγώνιο.
2. Αποδείξτε ότι ΓΖ, ΓΕ διχοτόμοι.
3. Αρκεί $\hat{\Gamma} + B\hat{\Gamma}E + \Delta\hat{\Gamma}Z = 180°$.
4. Φέρουμε από το Δ παράλληλη στην ΑΒ.
5. Αν ΓΔ η θέση της γέφυρας φέρουμε $BE // = \Gamma\Delta$.

§5.3 - 5.5

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. $AE // = \Gamma Z$.
2. $ZE = \frac{B\Delta}{2} = A\Gamma$.
3. Να λάβετε υπόψη σας την εφαρμογή της §4.4.
4. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΓΖ.
5. Να βρείτε τις ιδιότητες των διαγωνίων του.
6. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΚΝ, ΒΚΛ, ΜΓΛ και ΜΑΝ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο και η ΒΔ διχοτόμος.
2. i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΔΕ
   ii) Με άθροισμα γωνιών σε κατάλληλο τρίγωνο.
3. Φέρουμε την ΕΖ.
4. Αν $K\Lambda \perp EZ$, φέρουμε $EH \perp \Delta\Gamma$ και $KM \perp B\Gamma$.

Σύνθετα Θέματα

1. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΜΕΔ και ΜΖΓ.
2. Αρκεί γων. ΒΖΓ = γων. ΖΒΓ.
3. i) Το άθροισμα ισούται με το ύψος ΒΗ (σταθερό).
   ii) Από το τυχαίο σημείο Μ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ και εφαρμόζουμε το i).

§5.6 - 5.9

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Τα Δ, Ε είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ.
2. Τα Δ, Η και Ζ, Ε είναι μέσα πλευρών.
3. Οι ΕΜ, ΔΜ είναι διάμεσα ορθογωνίων τριγώνων.
4. Τα Ε, Ζ είναι μέσα πλευρών και $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.
5. Να λάβετε υπόψη σας την ιδιότητα του βαρύκεντρου.
6. Το Ε είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΓΔ.
7. Το ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο και $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΑΕΖ
   ii) Η ΔΜ διάμεσος και τα Ε, Ζ μέσα πλευρών.
2. Φέρουμε την ΔΒ.
3. Είναι $Μ\hat{Α}Δ + Δ\hat{Μ}Α = 90°$ και $\hat{Β} + \hat{Γ} = 90°$.
4. Να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.
5. Φέρουμε την ΑΓ. Τα Κ, Η είναι βαρύκεντρα τριγώνων.
6. Παίρνουμε το μέσο Ζ του ΑΓ.
7. i) Να αποδείξετε ότι το ΒΕΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
   ii) Το Η είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΓ.
8. Είναι ΜΔ = ΑΔ και $ΜΔ = \frac{ΔΒ}{2}$.
9. Αν Μ το σημείο τομής των ΕΗ και ΚΖ, αρκεί $\hat{Μ} = 90°$.
10. Ο δρόμος συνδέει τα μέσα των αποστάσεων.

Σύνθετα Θέματα

1. Είναι ΕΖ\\ΑΒ και ΔΕ = ΕΓ.
2. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ, οπότε $Α\hat{Μ}Γ = 30°$.
3. Είναι $ΖΗ //= \frac{ΚΓ}{2}$ και Κ βαρύκεντρο.
4. Παρατηρήστε ότι $\hat{Β} = 2\hat{Ε} = 2\hat{Γ}$.
5. Προεκτείνουμε την ΒΕ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ.
6. Είναι ΒΜ\\ΕΓ και Η ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΜ.
7. i) Απλό ii) Αν Ο το μέσο του ΑΒ, αρκεί ΟΚ//ΒΓ.
8. i) Απλό. ii) Με άθροισμα γωνιών σε κατάλληλο τρίγωνο. iii) Αν Κ το σημείο τομής των ΑΜ και ΔΖ αρκεί ΒΚ//ΕΖ.

§5.10 - 5.11

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Η ΕΖ διάμεσος τραπεζίου και Η, Θ μέσα πλευρών τριγώνου.
2. ΔΕ//ΒΓ και $\hat{Β} = \hat{Γ}$.
3. ΕΗ = ΘΖ και Ε, Ζ, Η, Θ μέσα πλευρών τριγώνου.
4. $ΚΕ = \frac{ΑΔ}{2}$ και ΚΛ//ΔΓ.
5. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ.
6. Η ΜΔ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΒΒ′Γ′Γ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Αρκεί ΗΖ = ΒΖ.
2. Το Ζ είναι σημείο της μεσοκαθέτου και το ΖΗΒΓ ισοσκελές τραπέζιο.
3. Φέρουμε ΒΕ⊥ΔΓ, οπότε $Ε\hat{Β}Γ = 30°$.
4. Παίρνουμε το μέσο Ε της ΑΔ.
5. Αρκεί $ΜΕ = \frac{ΒΓ}{2}$.
6. Είναι $ΔΗ = \frac{ΑΒ}{2}$ και Δ, Ε, Ζ, μέσα πλευρών τριγώνου.
7. Να λάβετε υπόψη σας το πόρισμα.
8. Όμοια με την προηγούμενη άσκηση. Για να είναι ορθογώνιο πρέπει ΑΓ = ΒΔ.
9. Η ΖΗ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΕΒΓΔ.
10. Βρείτε κατάλληλα τραπέζια με διάμεσο την ΚΚ′.

Σύνθετα Θέματα

1. Αν η διχοτόμος της $\hat{Α}$ τέμνει την ΒΓ στο Ε αρκεί ΔΕ διχοτόμος της $\hat{Δ}$.
2. Φέρουμε ΜΕ⊥ΑΔ.
3. Αν Κ το κέντρο του ΑΒΓΔ φέρουμε ΚΚ′⊥ε.
4. Η ΖΗ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΔΕΓΑ, οπότε …. $\hat{Β} = 30°$.
5. i) Αποδείξτε ότι το ΑΒΜΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο ii) Η προέκταση της ΑΕ τέμνει την ΔΓ στο Ζ.

Γενικές Ασκήσεις

1. Αν ΑΒ < ΑΓ είναι
   $ΑΔ = \frac{ΑΒ}{2} < \frac{ΑΓ}{2}$ και
   $ΑΕ = \frac{ΑΓ}{2} > \frac{ΑΒ}{2}$.
2. Παίρνουμε το μέσο Μ του ΔΕ.
3. α) Τα τρίγωνα ΑΒ′Β και ΑΕ′Ε είναι ισοσκελή β) Αποδείξτε ότι Β′Ε′ = ΓΕ′.
4. α) απλό β) Αρκεί $Η\hat{Ε}Ζ = Ζ\hat{Ε}Γ$ γ) $ΗΕ = \frac{ΑΒ}{2} = ΖΓ$ δ) Από το γ) προκύπτει ότι $\hat{Γ} = 2Ζ\hat{Ε}Γ$.
5. Παίρνουμε το μέσο Δ του ΒΚ και φέρνουμε Δ′Δ⊥ε.
6. α) απλό β) Το Η είναι ορθόκεντρο του τριγ. ΑΔΖ.
7. Παρατηρήστε ότι
   $ΜΛ //= \frac{ΒΗ}{2}$ και $ΜΚ //= \frac{ΕΓ}{2}$.
8. α) Το Μ είναι το μέσο του ΟΓ και το Ζ βαρύκεντρο του τριγ. ΒΟΓ.
   β) Να λάβετε υπόψη σας το α).
9. i) Φέρουμε ΟΚ διάμεσο στο τρίγ. ΟΑΒ. Αρκεί να τέμνει την ΔΓ στο μέσο Λ.
10. Φέρουμε από τα Δ και Ε κάθετες στις ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

§6.1 - 6.4

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Για το 1ο σχήμα είναι x = 40° και y = 2x = 80°.
   Για το 2ο σχήμα είναι x = 50° και y = 180° – x – 35° = 105°.
2. Είναι $\widehat{ΒΕ}$ = 120° (Εφαρμογή §6.3).
3. Είναι x = 40° (γωνία χορδής και εφαπτ.). Επίσης $2y + \widehat{ΒΓ} = 180°$ οπότε y = 140°.
   Για το 2ο σχήμα, είναι y – x = 120°. Από $\hat{Γ} = Γ\hat{Β}Δ$ προκύπτει x + y = 260° οπότε x = 70° και y = 190°.
4. Είναι: $\widehat{ΔΓ} = 95°$ και $\widehat{ΒΕ} = 45°$.
5. Είναι $Β\hat{Ο}Γ = Ζ\hat{Α} = 140°$ και $Ο\hat{Β}Γ = Ο\hat{Γ}Β = 20°$.
   Επίσης
   $Μ\hat{Β}Γ = Μ\hat{Γ}Β = \frac{1}{2}\,70° = 35°$
   οπότε $Β\hat{Μ}Γ = 110°$.
6. Είναι y εξωτερική γωνία τριγώνου. Σωστή η α).
7. Βλέπε «τόξο που δέχεται γνωστή γωνία».

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έστω Μ το μέσο του $\widehat{ΑΒ}$. Για το **ευθύ** αποδείξτε ότι η εφαπτομένη στο Μ και η ΑΒ τεμνόμενες από την ΜΒ, σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Για το **αντίστροφο** αποδείξτε ότι $Μ\hat{Α}Β = Μ\hat{Β}Α$.
2. Αποδείξτε ότι $Α\hat{Β}Γ + Α\hat{Β}Δ = 1∟$.
3. Αν η ΜΡ τέμνει την ΑΔ στο Ν, δείξτε ότι: $Ν\hat{Ρ}Δ + Ρ\hat{Δ}Α = 1∟$.
4. Είναι η τομή δύο κατάλληλων τόξων.

Σύνθετα Θέματα

1. Φέρτε την κοινή εσωτερική (ή εξωτερική) εφαπτομένη και δείξτε ότι $\hat{Β} = \hat{Γ}$.
2. Έστω Ζ, Η τα δεύτερα κοινά σημεία των ΑΒ, ΑΓ με το μικρότερο κύκλο. Αρκεί Δ μέσο $\widehat{ΖΗ}$.
3. Αποδείξτε ότι $Α\hat{Δ}Ρ = Δ\hat{Α}Ρ$.

§6.5 - 6.6

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Ιδιότητες εγγεγραμμένων τετραπλεύρων.
   $\hat{Β} = 120°$, $\hat{Γ} = 60°$ και $\hat{Δ} = 80°$.
2. Αρκεί $\hat{Α} = 90°$.
3. Αποδείξτε μια γωνία ορθή.
4. Εφαρμογή 1 §6.6.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Φέρτε την κοινή χορδή ΑΒ και αποδείξτε ότι: $\hat{Γ} = \hat{Δ}_{εξ}$.
2. Αποδείξτε ότι οι ευθείες ε, ΔΕ τεμνόμενες από την ΑΓ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.
3. Αν τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τέμνονται στο Η, παρατηρήστε ότι τα τετράπλευρα ΒΖΗΔ, ΔΗΕΓ και ΒΖΕΓ είναι εγγράψιμα.
4. Αποδείξτε ότι $\hat{Κ} + \hat{Μ} = 180°$. Γι' αυτό λάβετε υπόψη ότι τα τρίγωνα ΚΑΔ και ΜΒΓ είναι ισοσκελή (ΚΛΜΝ είναι το τετράπλευρο που σχηματίζεται).

Σύνθετα Θέματα

1. Αποδείξτε ότι $Ε\hat{Α}Ο + Α\hat{Ε}Δ = 90°$ ή φέρτε την εφαπτόμενη στο Α.
2. Αρκεί $Ε\hat{Δ}Ο = Ο\hat{Ε}Δ$. Παρατηρήστε ότι ΟΒΔΜ και ΟΜΓΕ είναι εγγράψιμα.
3. Αν Δ, Ε, Ζ είναι οι προβολές ενός σημείου Μ του περιγ/νου κύκλου στις ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, αποδείξτε ότι: $Ζ\hat{Ε}Μ + Μ\hat{Ε}Δ = 180°$ (παρατηρήστε ότι τα ΜΖΑΕ, ΜΕΔΓ είναι εγγράψιμα).
4. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΒΔΖ και ΓΔΕ είναι ίσα.

§6.7

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. i) Μεσοπαράλληλη ii) Κύκλος με κέντρο το κέντρο της γης.
2. i) Ο κύκλος (Ο, R–ρ) ii) Ο κύκλος (Α, ρ).
3. Η θέση του θησαυρού είναι κοινό σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ και του κύκλου (Δ, 4m).
4. Αν (Ο, R) είναι ο δοσμένος κύκλος ο γ.τ είναι ο κύκλος (Ο, R/2).

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Αν Ο το μέσο του ΒΓ είναι $ΑΟ = \frac{ΒΓ}{2}$ = σταθ. οπότε ο γ.τ. του Α είναι ο κύκλος $\left(Ο, \frac{ΒΓ}{2}\right)$.
2. Αν Μ η προβολή του Α πάνω σε ευθεία ε, που διέρχεται από το Β, τότε $Α\hat{Μ}Β = 1∟$.
3. Είναι ΟΜ = ΜΑ.
4. i) Είναι: ΒΓ = 2ΑΜ = 2μ, ii) Το τρίγωνο ΑΔΜ κατασκευάζεται.

Σύνθετα Θέματα

1. Το Μ είναι και μέσο του ΑΡ.
2. i) Το Α είναι τομή δύο γ.τ.
   ii) Από το Α φέρουμε ΑΚ//ΒΝ οπότε Β μέσο ΚΓ.
3. Το ΑΒΔ κατασκευάζεται, οπότε το Γ είναι στην τομή δύο γ.τ.

Γενικές Ασκήσεις

1. i) Αρκεί $Δ\hat{Α}Ε = 180°$,
   ii) Αποδείξτε ότι δύο απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές,
   iii) Είναι $Δ\hat{Μ}Ε = 90°$.
2. Ο κύκλος $\left(Κ, \frac{δ}{2}\right)$, όπου δ = ΑΓ – ΑΒ και Κ το μέσο της ΒΓ.
3. Προεκτείνουμε εκατέρωθεν τη ΒΓ.
4. Το Β ανήκει σε κύκλο ακτίνας $\frac{R}{2}$.
5. Αρκεί $\hat{Ε} + \hat{Η} = 180°$.
6. Βρείτε κατάλληλα εγγράψιμα τετράπλευρα.
7. Μια εξωτερική γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική.
8. i) $Η_1Μ_1Μ_2Μ_3$ ισοσκελές τραπέζιο.
   ii) Αποδείξτε ότι δύο απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές.
   iii) Προκύπτει με συνδυασμό των i) και ii).

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ

Π

Ρ

Σ

Τ

Υ

Φ

Χ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΝΟΜΑΤΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

1) Αλιμπινίση Α., Δημάκου Γ., κ.ά., Θεωρητική γεωμετρία Β′ Λυκείου, ΟΕΔΒ.
2) F.G.-M., Ασκήσεις Γεωμετρίας (Ιησουϊτών), μετάφραση στα ελληνικά Δ. Γκιόκα, Εκδόσεις Καραββία, τόμοι 1-4, Αθήνα, 1952.
3) Ιωαννίδη Ι., Γεωμετρία, Εκδόσεις Κορφιάτη, τόμοι 1-12, Αθήναι, 1973.
4) Ιωαννίδη Ι., Επίπεδος Γεωμετρία, Εκδόσεις Π. Γρηγορόπουλου.
5) Κανέλλου Σ. Γ., Ευκλείδειος Γεωμετρία, ΟΕΔΒ, 1976.
6) Κισκύρα Ν.Α., Θεωρήματα και Προβλήματα Γεωμετρίας, 1957.
7) Νικολάου Ν., Θεωρητική Γεωμετρία, ΟΕΔΒ, 1973.
8) Νικολάου Ν., Μεγάλη Γεωμετρία, Αθήναι.
9) Ντάνη Ι., Γεωμετρία Τεύχη 1-2.
10) Πάλλα Α., Μεγάλη Γεωμετρία.
11) Πανάκη Ι. Ρ., Γεωμετρία του Τριγώνου, Εκδόσεις Gutenberg.
12) Παπαμιχαήλ Δ., Σκιαδά Α., Θεωρητική Γεωμετρία, ΟΕΔΒ.
13) Παπανικολάου Γ., Θεωρητική Γεωμετρία, Αθήναι.
14) Σταμάτη Ε., Ευκλείδεια Γεωμετρία, τόμοι Ι - ΙΙΙ, ΟΕΣΒ, αρχαίο κείμενο και μετάφραση των Στοιχείων του Ευκλείδη, ΟΕΣΒ, Αθήνα, 1975.
15) Τσαρούχη Χ., Θεωρήματα και Προβλήματα Γεωμετρίας, 1969.
16) Τόγκα Π. Γ., Θεωρητική Γεωμετρία.
17) Τόγκα Π. Γ., Ασκήσεις και Προβλήματα Γεωμετρίας.
18) Τσίντσιφα Γ., Γεωμετρία, Εκδόσεις Σύγχρονου Βιβλιοπωλείου.

ΞΕΝΗ

1) Berger M., Pansu P., Berry J., Saint-Raymond X., Problems in Geometry, Springer-Verlag, 1984.
2) Blumenthal L.M., A Modern View of Geometry, Dover, N.Y 1961.
3) Bonola R., Non-Euclidean Geometry, Dover, 1955.
4) Caronnet Th., Exercices de Geometrie, 8eme edition, Librairie Vuibert, 1-7 livres, Paris.
5) Coxeter H., Introduction to Geometry, Wiley & Sons Inc, N.Y. 1969.
6) Coxeter H. and Greitzer S., Geometry Revisited, MAA, 1975.
7) Dorrie H., 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Dover Pub. Inc, N.Y., 1965.
8) Eves H., A survey of Geometry, Allyn of Bacon Inc, Boston, 1974.
9) Forder H., The Foundations of Euclidean Geometry, Dover, 1958.
10) Hollinger A., Problemes de Geometrie, Bucurest.
11) Jacobs H., Geometry, W. H. Freeman & Co.

12) Knorr W.R., The Ancient Tradition of Geometric Problems, Dover, N.Y. 1986.
13) Lebosse G., Hemery G., Geometrie, 1960.
14) Ogilvy C.S., Excursions in Geometry, Dover Pub. Inc., N.Y. 1969.
15) Posamentier A., Salkid Ch., Challenging Problems in Geometry, Dover Pull. Inc., 1970.
16) Sved M., Journey into Geometries, MAA, 1991.
17) Tuller A., Introduction to Geometries, Van Nostrand Reinhold, 1967.
18) Yale P. B., Geometry and Symmetry, Dover Pub. Inc., N.Y., 1968.

Κωδικός βιβλίου: 0-22-0236
ISBN 978-960-06-5177-5

ΙΤΥΕ
"ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ"
ινστιτουτο
τεχνολογιας
υπολογιστων & εκδοσεων

(01) 000000 0 22 0236 5