**§2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ**

Στα επόμενα θα μελετήσουμε τις ιδιότητες της απλούστερης των γραμμών που είναι η ευθεία.

**Συντελεστής διευθύνσεως ευθείας**

|  |
| --- |
| **Γωνία της ευθείας ε με τον άξονα χ΄χ:** Λέγεται η **θετική** και **κυρτή** γωνία **ω** που έχει αρχική πλευρά τον άξονα χ΄χ και τελική πλευρά την ευθεία ε. Ισχύει **00ω < 1800** ή σε ακτίνια **0ω<π .** Αν **ε // χ΄χ** τότε **ω = 00** . |
|  |  |  |  |
|  ω<900 | ω>900 | ω=00 | ω=900 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Συντελεστής διεύθυνσης λ ευθείας:** Λέγεται η τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα χ΄χ. Δηλαδή **λ=εφω** Ο συντελεστής διεύθυνσης λέγεται και **κλίση της ευθείας** , γιατί καθορίζει πλήρως την διεύθυνση της ευθείαςΑν **ω=00** τότε **λ = εφ00 = 0** Αν **ω οξεία** γωνία τότε **λ >0**Αν **ω αμβλεία** γωνία τότε **λ <0** Αν **εχ΄χ** **δεν** ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας. |  |

**Σχέση των συντελεστών διεύθυνσης ευθείας και παράλληλου διανύσματος**



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **« Μία ευθεία και ένα παράλληλο διάνυσμα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης»**Δηλ. αν τότε Απόδειξη |  |  |

**Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας από δύο σημεία της**



|  |  |
| --- | --- |
| **Αν ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία Α(x1,y1) και Β(x2,y2), με x1x2** **τότε έχει συντελεστή διεύθυνσης** Απόδειξη |  |

**Συνθήκες καθετότητας και παραλληλίας ευθειών**

Έστω οι ευθείες ε1 , ε2 με συντελεστές διεύθυνσης λ1 , λ2 αντίστοιχα.

|  |  |
| --- | --- |
| **Δύο ευθείες είναι παράλληλες όταν έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης** **(και αντιστρόφως)**δηλαδή: **ε1//ε2 λ1=λ2** Απόδειξη |  |
| **Δύο ευθείες είναι κάθετες όταν οι συντελεστές διεύθυνσης έχουν γινόμενο** -**1****(και αντιστρόφως)**δηλαδή **ε1 ε2 λ1λ2** = -1Απόδειξη |  |

**Εξίσωση ευθείας**

Ένας τρόπος για να ορίσουμε μία ευθεία ε είναι να γνωρίζουμε δύο σημεία της Α , Β.

Επειδή όμως το διάνυσμα καθορίζει τον συντελεστή διεύθυνσης λ , δηλαδή την κλίση της ευθείας , μπορούμε να πούμε ότι η ευθεία ορίζεται από ένα σημείο της π.χ. το Α και τον συντελεστή διεύθυνσής της λ.

Και για τις δύο αυτές περιπτώσεις θα δώσουμε την εξίσωση της ευθείας.

|  |  |
| --- | --- |
| **Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α(x0,y0) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , έχει εξίσωση:****y-y0 = λ(x-x0)**Aπόδειξη |  |
| **Η μη κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(x1,y1) και Β(x2,y2) , έχει εξίσωση:**Απόδειξη |  |
| **Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α(x0,y0) και είναι κάθετη στον άξονα χ΄χ έχει εξίσωση:**  **x =x0**  **(κατακόρυφη ευθεία)**Ειδικά ο **άξονας y΄y** έχει εξίσωση **x=0** |  |

**Ειδικές περιπτώσεις εξίσωσης ευθείας**

|  |  |
| --- | --- |
| **Η ευθεία, που διέρχεται από το σημείο Α(0,β) του άξονα y΄y και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, έχει εξίσωση:****y=λx+β** |  |
| **Η ευθεία, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, έχει εξίσωση:****y=λx** |  |
| **i)** **Η διχοτόμος της 1ης  και 3ης γωνίας έχει εξίσωση:****y=x** **ii) Η διχοτόμος της 2ης  και 4ης γωνίας έχει εξίσωση:****y=-x** |  |  |
| **H ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α(x0,y0) και είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ έχει εξίσωση:** **y=y0** **(οριζόντια ευθεία)**Ειδικά ο **άξονας χ΄χ** έχει εξίσωση **y=0** |  |

**Ασκήσεις**

**Άσκηση 1** Δίνονται τα σημεία Α(2,-1) , Β(4,1) , Γ(5,0).

α) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ.

β) Να δείξετε ότι η ευθεία ΑΓ είναι παράλληλη στο διάνυσμα =(6α2,2α2) , α0 .

► **Αν γνωρίζουμε το λ μπορούμε να βρούμε την γωνία από την σχέση εφω=λ**

γ) Να βρεθεί η γωνία καθεμιάς από τις ευθείες ΑΒ και ΒΓ με τον χ΄χ .

► **Αν το γινόμενο των συντελεστών είναι -1 , τότε οι ευθείες είναι κάθετες**

δ) Να δειχθεί ότι οι ευθείες ΑΒ και ΒΓ είναι κάθετες.

► **Βρίσκουμε την εξίσωση ευθείας όταν**

 **Γνωρίζουμε ένα σημείο της ευθείας και τον συντελεστή διεύθυνσής της ή**

** Γνωρίζουμε δύο σημεία της**

ε) Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών ΑΒ και ΒΓ.

στ) Ποια ευθεία διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στον χ΄χ;

ζ) Ποια ευθεία διέρχεται από το Γ και είναι κάθετη στον χ΄χ;

η) Ποια ευθεία περνάει από την αρχή των αξόνων και το σημείο Β;

► **Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε μπορεί να βρεθεί έμμεσα:**

** Από μια ευθεία παράλληλη στην ε**

** Από μια ευθεία κάθετη στην ε**

θ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α

 και είναι παράλληλη στην ευθεία y=-2x+1 .

ι) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Γ

 και είναι κάθετη στην ευθεία y=x .

► **Θέτοντας στην εξίσωση της ευθείας:**

**x=0, βρίσκουμε την τομή της με τον y΄y**

**y=0, βρίσκουμε την τομή της με τον χ΄χ**

ια) Να βρεθούν τα σημεία τομής της ευθείας ΑΒ με τους άξονες .

ιβ) Να βρεθεί το σημείο τομής της ευθείας ΒΓ με την 1η  διχοτόμο .

ιγ) Να δείξετε ότι τα σημεία Α , Β και Δ(1,-2) είναι συνευθειακά .

► **Τρία σημεία είναι συνευθειακά όταν το ένα ανήκει στην ευθεία που ορίζουν τα άλλα δύο**

ιδ) Αν το σημείο Ε(-1,β) ανήκει στην ευθεία ΑΓ να βρεθεί το β.

Παρατήρηση

Οι ασκήσεις του 2ου (και 3ου ) κεφαλαίου έχουν γεωμετρικό χαρακτήρα (αφού αναφέρονται σε γεωμετρικά σχήματα), που πρέπει να λυθούν όμως με αναλυτικές μεθόδους . Έτσι αν θεωρήσουμε την άσκηση σαν μία απλή γεωμετρική κατασκευή , θα πρέπει τα γεωμετρικά στάδια της κατασκευής να τα μετατρέψουμε σε αναλυτικά στάδια

Μερικά παραδείγματα

|  |  |
| --- | --- |
| η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ και  | η ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΤΗΣ ΕΚΦΡΑΣΗ |
| Φέρουμε την ευθεία ΑΒ | Γράφουμε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α , Β  |
| Από το Α φέρουμε παράλληλη στην ευθεία ε | Γράφουμε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α, και έχει τον ίδιο συντελεστή δ/σης με την ευθεία ε |
| Φέρουμε το ύψος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ | Γράφουμε την εξίσωση της ευθείας ε που περνά από το Α,και έχει λε τέτοιον ώστε λελΒΓ=-1 |
| Οι ευθείες ε1 και ε2  τέμνονται στο σημείο Μ | Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του Μ από την λύση του συστήματος των εξισώσεων των ε1 και ε2 |

**Άσκηση 2** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(2,1) , Β(-1,-1) , Γ(-3,2).

Να βρεθούν οι εξισώσεις : i) Tου φορέα του ύψους ΒΔ

ii) Tου φορέα της διαμέσου ΑΜ iii) Της μεσοκαθέτου της πλευράς ΒΓ

**Άσκηση 3** Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με κέντρο το σημείο Κ(2,1) και εξισώσεις

των πλευρών ΑΒ , ΑΓ τις y=x+1 και y=-2x+4 αντιστοίχως. Να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών.

**Άσκηση 4** Έστω η ευθεία ε: y=x+1 και το σημείο Α(2,1).

α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες της προβολής του σημείου Α επάνω στην ευθεία ε.

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού του Α ως προς την ευθεία ε.

**Άσκηση 5** Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τετραγώνου του οποίου οι διαγώνιες βρίσκονται επάνω στους άξονες και η πλευρά του έχει μήκος ίσο με .

**Άσκηση 6** Tα σημεία Α(2,0) και Β(-1,4) είναι διαδοχικές κορυφές τετραγώνου. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

**Άσκηση 7** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Μ(1,2) και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

**► Εύρεση ευθείας που διέρχεται από γνωστό σημείο**

**Κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α(x0 , y0) έχει εξίσωση της μορφής:**

 **y-y0 = λ(x-x0) ή x =x0**

**Έτσι λοιπόν πρέπει**

**Να βρούμε το λ , άρα και την ευθεία**

** Να εξετάσουμε αν η ευθεία**

**x =x0 είναι λύση του προβλήματος**

**Άσκηση 8** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται

από το σημείο Μ(1,4) και τέμνει τις ευθείες ε1: y=-x+4 και ε2: y=2x+3

στα σημεία Α και Β αντιστοίχως , έτσι ώστε το Μ να είναι το μέσο του ΑΒ.

**Άσκηση 9** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται

από το σημείο Μ(0,1) και τέμνει τις ευθείες ε1: y=x και ε2: y=x+1

στα σημεία Α και Β αντιστοίχως , έτσι ώστε να ισχύει ΑΒ=1.

**Λύσεις των Ασκήσεων**

**Άσκηση 1** Δίνονται τα σημεία Α(2,-1) , Β(4,1) , Γ(5,0).

α) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ.

λΑΓ = =

β) Να δείξετε ότι η ευθεία ΑΓ είναι παράλληλη στο διάνυσμα =(6α2,2α2) , α0 .

 = = = ( από α) ) = λΑΓ ΑΓ //

► **Αν γνωρίζουμε το λ μπορούμε να βρούμε την γωνία από την σχέση εφω=λ**

γ) Να βρεθεί η γωνία καθεμιάς από τις ευθείες ΑΒ και ΒΓ με τον χ΄χ .

● λΑΒ = = = = 1 λΑΒ = 1 λΑΒ = εφ450

η γωνία της ευθείας ΑΒ με τον χ΄χ είναι 450

● λΒΓ = = = −1 λΒΓ = −1 λΒΓ = −εφ450 λΒΓ = εφ(1800−450) λΒΓ = εφ1350

η γωνία της ευθείας ΒΓ με τον χ΄χ είναι 1350

δ) Να δειχθεί ότι οι ευθείες ΑΒ και ΒΓ είναι κάθετες.

► **Αν το γινόμενο των συντελεστών είναι -1 , τότε οι ευθείες είναι κάθετες**

λΑΒ∙ λΒΓ = ( από γ) ) 1∙(−1) = −1 ΑΒ ⊥ ΒΓ

ε) Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών ΑΒ και ΒΓ.

► **Βρίσκουμε την εξίσωση ευθείας όταν**

 **Γνωρίζουμε ένα σημείο της ευθείας και τον συντελεστή διεύθυνσής της ή**

** Γνωρίζουμε δύο σημεία της**

● Η εξίσωση της ευθείας ΑΒ, η οποία ( από γ) ) έχει λΑΒ = 1 και

διέρχεται από το σημείο Α(2,-1), είναι:

y−(−1) = 1∙(x−2) y+1 = x−2 y = x−2−1 y = x−3

● Η εξίσωση της ευθείας ΒΓ, η οποία ( από γ) ) έχει λΒΓ = −1 και

διέρχεται από το σημείο Β(4,1), είναι:

► **Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε μπορεί να βρεθεί έμμεσα:**

** Από μια ευθεία παράλληλη στην ε**

** Από μια ευθεία κάθετη στην ε**

y−1 = −1∙(x−4) y−1 = −x+4 y = −x+4+1 y = −x+5

στ) Ποια ευθεία διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στον χ΄χ;

Η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο Α(2,-1) και είναι παράλληλη

στον χ΄χ, είναι η ευθεία (με εξίσωση) y=−1.

ζ) Ποια ευθεία διέρχεται από το Γ και είναι κάθετη στον χ΄χ;

Η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο Γ(5,0) και είναι κάθετη

στον χ΄χ, είναι η ευθεία (με εξίσωση) x=5.

η) Ποια ευθεία περνάει από την αρχή των αξόνων και το σημείο Β;

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας, η οποία περνάει από

την αρχή Ο(0,0) των αξόνων και το σημείο Β(4,1) είναι ίσος με:

λ= = .

Άρα η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση: y = x .

θ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην ευθεία y=-2x+1.

Αφού η ζητούμενη ευθεία είναι παράλληλη στην ευθεία y=-2x+1, θα έχει συντελεστή διεύθυνσης λ ίσο με τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας αυτής, δηλαδή λ=−2.

Οπότε η ζητούμενη ευθεία, η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης λ=−2 και

διέρχεται από το σημείο Α(2,-1), έχει εξίσωση:

y−(−1) = −2∙(x−2) y+1 = −2x+4 y = −2x+4−1 y = −2x+3 .

ι) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Γ και είναι κάθετη στην ευθεία

y =x .

Αφού η ζητούμενη ευθεία είναι κάθετη στην ευθεία y =x, θα έχει συντελεστή διεύθυνσης λ για τον οποίο θα ισχύει: λ∙=−1 λ = −1∙3 λ = −3.

Οπότε η ζητούμενη ευθεία, η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης λ=−3 και διέρχεται από το σημείο Γ(5,0), έχει εξίσωση:

y−0 = −3∙(x−5) y = −3x+15

ια) Να βρεθούν τα σημεία τομής της ευθείας ΑΒ με τους άξονες .

Από γ) έχουμε βρει ότι η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση: y = x−3. Οπότε:

► **Θέτοντας στην εξίσωση της ευθείας:**

**y=0, βρίσκουμε την τομή της με τον χ΄χ**

**x=0, βρίσκουμε την τομή της με τον y΄y**

● Θέτοντας στην y = x−3 όπου y=0, έχουμε: 0 = x−3 x=3

Άρα το σημείο τομής της ευθείας ΑΒ με τον άξονα χ΄χ είναι το

σημείο Κ(3,0) .

● Θέτοντας στην y = x−3 όπου x=0, έχουμε: y = 0−3 y=−3

Άρα το σημείο τομής της ευθείας ΑΒ με τον άξονα y΄y είναι το

σημείο Λ(0, −3) .

ιβ) Να βρεθεί το σημείο τομής της ευθείας ΒΓ με την 1η  διχοτόμο .

Από γ) έχουμε βρει ότι η ευθεία ΒΓ έχει εξίσωση: y = −x+5 (1).

Η 1η  διχοτόμος έχει εξίσωση: y = x (2).

Λύνουμε τώρα το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

Θέτουμε στην (1) όπου y το x από την (2) και έχουμε ότι:

x = −x+5 x+x = 5 2x = 5 x = (3)

Λόγω της (3) από την (2) έχουμε ότι: y = (4)

Από τις (3) και (4) έχουμε λοιπόν ότι η λύση του συστήματος των εξισώσεων της ευθείας ΒΓ και της 1ης  διχοτόμου είναι το διατεταγμένο ζεύγος: () .

Άρα το σημείο τομής της ευθείας ΒΓ με την 1η  διχοτόμο είναι το σημείο Σ() .

► **Τρία σημεία είναι συνευθειακά όταν το ένα ανήκει στην ευθεία που ορίζουν τα άλλα δύο**

ιγ) Να δείξετε ότι τα σημεία Α , Β και Δ(1,−2) είναι συνευθειακά.

Από γ) έχουμε βρει ότι η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση: y = x−3.

Οπότε για να δείξουμε ότι τα σημεία Α , Β και Δ(1,-2) είναι

συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι το Δ(1,−2) ανήκει στην ευθεία ΑΒ, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι οι συντεταγμένες του Δ(1,−2) επαληθεύουν την εξίσωση: y = x−3 (ε)

της ευθείας ΑΒ.

Πράγματι αυτό συμβαίνει, διότι θέτοντας στην (ε) όπου x το 1 και όπου y το −2 έχουμε ότι:

−2 = 1−3 −2 = −2, το οποίο ισχύει.

ιδ) Αν το σημείο Ε(−1,β) ανήκει στην ευθεία ΑΓ να βρεθεί το β .

Από α) έχουμε βρει ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ είναι λΑΓ = .

Οπότε η εξίσωση της ευθείας ΑΓ, η οποία έχει λΑΓ = και διέρχεται από το σημείο Α(2,−1), είναι:

y−(−1) = ∙(x−2) y+1 = x − y = x − −1 y = x − − y = x − (ε1) .

Αφού το σημείο Ε(−1,β) ανήκει στην ευθεία ΑΓ, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ΑΓ, δηλαδή επαληθεύουν την (ε1).

Οπότε, θέτοντας στην (ε1) όπου x το −1 και όπου y το β έχουμε ότι:

β = ∙(−1) − = − − = − = −2 .

**Άσκηση 2** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(2,1) , Β(−1,−1) , Γ(−3,2).

Να βρεθούν οι εξισώσεις : i) Tου φορέα του ύψους ΒΔ

ii) Tου φορέα της διαμέσου ΑΜ iii) Της μεσοκαθέτου της πλευράς ΒΓ

i) Ο φορέας του ύψους ΒΔ είναι ευθεία κάθετη στην ΑΓ. Άρα: λΒΔ∙λΑΓ = −1 λΒΔ = − (1)

λΑΓ = = λΑΓ = − (2)

Από (1) λόγω (2) έχουμε ότι: λΒΔ = − λΒΔ = 5 (3)

Οπότε ο φορέας του ύψους ΒΔ, ο οποίος διέρχεται από το σημείο Β(−1,−1) και σύμφωνα με την (3) έχει συντελεστή διεύθυνσης λΒΔ = 5, έχει εξίσωση:

y−(−1) = 5(x−(−1)) y+1 = 5(x+1) y+1 = 5x+5 y = 5x+5−1 y = 5x+4

ii) Το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ με Β(−1,−1) και Γ(−3,2) έχει συντεταγμένες:

xM = = = = −2 και yM = =

Άρα το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ είναι το σημείο Μ(−2,)

Οπότε ο φορέας της διαμέσου ΑΜ, ο οποίος διέρχεται από τα σημεία Α(2,1) και Μ(−2,) , έχει εξίσωση:

y−1 = (x−2) y−1 = (x−2) y−1 = (x−2) y−1 = x − 2

y−1 = x − y = x − +1 y = x − + y = x +

iii) Η μεσοκάθετος μ της πλευράς ΒΓ είναι η ευθεία η κάθετη στο μέσο Μ της ΒΓ

Στο ii) βρήκαμε ότι το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ είναι το σημείο Μ(−2,)

Η μεσοκάθετος μ της πλευράς ΒΓ είναι ευθεία κάθετη στην ΒΓ. Άρα: λμ∙λΒΓ = −1

λμ = − (4)

λΒΓ = = = = − λΒΓ = − (5)

Από (4) λόγω (5) έχουμε ότι: λμ = − λμ = (6)

Οπότε η μεσοκάθετος μ της πλευράς ΒΓ, η οποία διέρχεται από το σημείο Μ(−2,) και σύμφωνα με την (6) έχει συντελεστή διεύθυνσης λμ = , έχει εξίσωση:

y − = (x−(−2)) y − = (x+2) y − = x+2 y − = x+

y = x++ y = x++ y = x+

Δ

Μ

Γ

Β

Α

μ

 **Ενδεικτικό σχήμα**

**Άσκηση 3** Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με κέντρο το σημείο Κ(2,1) και εξισώσεις

των πλευρών ΑΒ , ΑΔ τις y = x+1 και y = −2x+4 αντιστοίχως. Να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών.

Κ

Δ

Γ

Β

Α

 **Ενδεικτικό σχήμα**

● Για την εξίσωση της πλευράς ΒΓ εργαζόμαστε ως εξής:

Αφού η πλευρά ΑΔ έχει εξίσωση y = −2x+4, συμπεραίνουμε ότι είναι: λΑΔ = −2 (1)

Αφού είναι: ΒΓ//ΑΔ λΒΓ = λΑΔ λΒΓ = −2 (2)

Βρίσκουμε τώρα τις συντεταγμένες της κορυφής Γ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ως εξής:

Αρχικά βρίσκουμε τις συντεταγμένες της κορυφής Α του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Για τον σκοπό αυτό λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των πλευρών ΑΒ, ΑΔ του παραλληλογράμμου, των οποίων η τομή είναι το σημείο Α, δηλαδή λύνουμε το σύστημα:

Άρα η κορυφή Α είναι το σημείο Α(1,2) .

Τώρα το κέντρο Κ(2,1) του παραλληλογράμμου είναι το μέσο της διαγωνίου του ΑΓ. Άρα θα ισχύουν:

= xΚ = 2 1+xΓ = 2∙2 1+xΓ = 4 xΓ = 4−1 xΓ = 3

= yΚ = 1 2+yΓ = 1∙2 2+yΓ = 2 yΓ = 2−2 yΓ = 0

Άρα η κορυφή Γ του παραλληλογράμμου είναι το σημείο Γ(3,0)

Οπότε η εξίσωση της πλευράς ΒΓ, η οποία σύμφωνα με το (2) έχει λΒΓ = −2 και διέρχεται από το σημείο Γ(3,0), είναι:

y−0 = −2(x−3) y = −2x+6

● Για την εξίσωση της πλευράς ΓΔ εργαζόμαστε ως εξής:

Αφού η πλευρά ΑΒ έχει εξίσωση y = x+1, συμπεραίνουμε ότι είναι: λΑΒ = 1 (3)

Αφού είναι: ΓΔ//ΑΒ λΓΔ = λΑΒ λΓΔ = 1 (4)

Έχουμε βρει παραπάνω ότι η κορυφή Γ του παραλληλογράμμου είναι το σημείο Γ(3,0) .

Οπότε η εξίσωση της πλευράς ΓΔ, η οποία σύμφωνα με το (4) έχει λΓΔ = 1 και διέρχεται από το σημείο Γ(3,0), είναι:

y−0 = 1(x−3) y = x−3

**Άσκηση 4** Έστω η ευθεία ε: y=x+1 και το σημείο Α(2,1) .

α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες της προβολής του σημείου Α επάνω στην ευθεία ε .

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού του Α ως προς την ευθεία ε .

ζ

Κ

Α′

Α

ε

 **Ενδεικτικό σχήμα**

α) Φέρνουμε από το Α την κάθετη ευθεία ζ επάνω στην ευθεία ε και ονομάζουμε Κ το σημείο τομής της με την ε. Το σημείο Κ είναι η προβολή του Α επάνω στην ε.

Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου Κ εργαζόμαστε ως εξής:

Αφού η ευθεία ε έχει εξίσωση y=x+1, συμπεραίνουμε ότι είναι: λε = 1 (1)

Αφού είναι: ζ ⊥ ε λζ∙λε = −1 λζ = −1 (2)

Οπότε η εξίσωση της ευθείας ζ, η οποία σύμφωνα με το (2) έχει λζ = −1 και διέρχεται από το σημείο Α(2,1), είναι:

y−1 = −1(x−2) y−1 = −x+2 y = −x+2+1 y = −x+3

Επειδή τώρα το σημείο Κ είναι το σημείο τομής των ευθειών ε και ζ, οι συντεταγμένες του είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών ε και ζ, δηλαδή είναι η λύση του συστήματος:

Άρα η προβολή Κ του σημείου Α επάνω στην ευθεία ε είναι το σημείο Κ(1,2) .

β) Επάνω στην ευθεία ζ και με αρχή το σημείο Κ(1,2) παίρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΚΑ′ έτσι ώστε ΚΑ′ = ΚΑ. Τότε το σημείο Α′ είναι το συμμετρικό του σημείου Α(2,1) ως προς την ευθεία ε. Για να βρούμε τώρα τις συντεταγμένες του σημείου Α′ εργαζόμαστε ως εξής:

Το σημείο Κ(1,2) είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΑ′. Άρα θα ισχύουν:

= xΚ = 1 2+xΑ′ = 1∙2 2+xΑ′ = 2 xΑ′ = 2−2 xΑ′ = 0

= yΚ = 2 1+yΑ′ = 2∙2 1+yΑ′ = 4 yΑ′ = 4−1 yΑ′ = 3

Άρα το συμμετρικό του σημείου Α(2,1) ως προς την ευθεία ε είναι το σημείο Α′(0,3) .

**Άσκηση 5** Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τετραγώνου του οποίου οι διαγώνιες βρίσκονται επάνω στους άξονες και η πλευρά του έχει μήκος ίσο με .

Ο

Δ

Γ

Β

Α

y

y′

x′

x

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε ότι:

ΒΔ2 = ΑΔ2 + ΑΒ2 ΒΔ2 = 2 + 2 ΒΔ2 = 2 + 2 ΒΔ2 = 4 ΒΔ = 2

Οπότε, αφού είναι ΒΔ = 2 και οι κορυφές Β και Δ του τετραγώνου είναι σημεία του άξονα x′x συμμετρικά ως προς την αρχή Ο(0,0) των αξόνων, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Β και Δ

είναι αντίστοιχα τα εξής: Β(1,0) και Δ(−1,0).

( Ανάλογα συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Α και Γ είναι αντίστοιχα τα εξής: Α(0,1) και Γ(0,−1) )

Λαμβάνοντας τώρα υπ’ όψη μας ότι οι διαγώνιες ΒΔ και ΑΓ του τετραγώνου ΑΒΓΔ διχοτομούν τις ορθές γωνίες του, για τις εξισώσεις των πλευρών του έχουμε τα ακόλουθα:

● Η πλευρά ΑΒ διέρχεται από το σημείο Β(1,0) και σχηματίζει με τον άξονα x′x γωνία 135ο, οπότε έχει λΑΒ=εφ135ο=εφ(180ο−45ο)=−εφ45ο=−1, άρα έχει εξίσωση:

y−0=−1(x−1) y=−x+1

● Η πλευρά ΒΓ διέρχεται από το σημείο Β(1,0) και σχηματίζει με τον άξονα x′x γωνία 45ο, οπότε έχει λΒΓ=εφ45ο=1, και επομένως έχει εξίσωση:

y−0=1(x−1) y=x−1

● Η πλευρά ΓΔ διέρχεται από το σημείο Δ(−1,0) και σχηματίζει με τον άξονα x′x γωνία 135ο, οπότε έχει λΓΔ=εφ135ο= −1, άρα έχει εξίσωση:

y−0=−1(x−(−1)) y=−(x+1) y=−x−1

● Η πλευρά ΔΑ διέρχεται από το σημείο Δ(−1,0) και σχηματίζει με τον άξονα x′x γωνία 45ο, οπότε έχει λΔΑ=εφ45ο=1, και επομένως έχει εξίσωση:

y−0=1(x−(−1)) y=x+1

**Άσκηση 6** Tα σημεία Α(2,0) και Β(−1,4) είναι διαδοχικές κορυφές τετραγώνου. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

Γ

Δ

Α

Β

 **Ενδεικτικό σχήμα**

Έστω Γ και Δ οι άλλες δύο κορυφές του τετραγώνου. Τότε έχουμε ότι:

● Για την εξίσωση της πλευράς ΑΒ εργαζόμαστε ως εξής:

Η ευθεία ΑΒ, η οποία περνάει από τα σημεία Α(2,0) και Β(−1,4), έχει συντελεστή διεύθυνσης λΑΒ = = = −

Άρα η πλευρά ΑΒ, η οποία περνάει από το σημείο Α(2,0) και έχει λΑΒ = − , έχει εξίσωση:

y−0 = − (x−2) y =− x +2 y =− x +

● Για την εξίσωση της πλευράς ΑΔ εργαζόμαστε ως εξής:

 Η ευθεία ΑΔ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ. Οπότε:

λΑΔ∙λΑΒ = −1 ( παραπάνω βρήκαμε ότι λΑΒ = − )

λΑΔ∙(− )= −1 λΑΔ = 1 λΑΔ = λΑΔ =

Άρα η πλευρά ΑΔ, η οποία περνάει από το σημείο Α(2,0) και έχει λΑΔ = , έχει εξίσωση:

y−0 = (x−2) y = x −2 y =x −

● Για την εξίσωση της πλευράς ΒΓ εργαζόμαστε ως εξής:

Η ευθεία ΒΓ είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΔ. Οπότε:

λΒΓ = λΑΔ ( παραπάνω βρήκαμε ότι λΑΔ = )

λΒΓ =

Άρα η πλευρά ΒΓ, η οποία περνάει από το σημείο Β(−1,4) και έχει λΒΓ = , έχει εξίσωση:

y−4 = (x−(−1))y−4 = (x+1)y−4 = x + y = x + + 4y = x + +

y = x +

● Για την εξίσωση της πλευράς ΓΔ εργαζόμαστε ως εξής:

Η ευθεία ΓΔ είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ. Οπότε:

λΓΔ = λΑΒ ( παραπάνω βρήκαμε ότι λΑΒ = − )

λΓΔ = − (1)

Το μήκος της πλευράς του τετραγώνου είναι:

(ΑΒ) = = = = = 5 (ΑΒ) = 5

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι Γ(κ,λ) .

Τότε έχουμε ότι:

(ΒΓ) = 5 = 5 = 5

 = 5 = 5

(υψώνουμε τα δύο μέλη στο τετράγωνο)

κ2 + λ2 + 2κ – 8λ + 17 = 25 κ2 + λ2 + 2κ – 8λ = 25−17 κ2 + λ2 + 2κ – 8λ = 8 (2)

Επίσης από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (=90ο ) έχουμε ότι:

(ΑΓ)2 = (ΑΒ)2 + (ΒΓ)2 = 52 + 52 (κ−2)2 + λ2 = 25 +25

 = 50 κ2 + λ2 − 4κ = 50 – 4 κ2 + λ2 − 4κ = 46 (3)

Αφαιρούμε στη συνέχεια την (3) από τη (2), oπότε προκύπτει η εξίσωση:

(κ2 + λ2 + 2κ – 8λ) – (κ2 + λ2 − 4κ) = 8 – 46 κ2 + λ2 + 2κ – 8λ – κ2 − λ2 + 4κ = –38

6κ − 8λ = –38 2(3κ – 4λ) = 2∙(−19) 3κ – 4λ = −19 – 4λ = −19 – 3κ

4λ = 19 + 3κ λ = (4)

Αντικαθιστούμε τώρα στην (3) το λ με από την (4), oπότε προκύπτει η εξίσωση:

κ2 + − 4κ = 46 κ2 + − 4κ = 46 κ2 + − 4κ = 46

κ2 + − 4κ = 46 16κ2 + 361 + 114κ + 9κ2 − 16∙4κ = 16∙46

16κ2 + 361 + 114κ + 9κ2 − 64κ = 736 16κ2 + 9κ2 + 114κ − 64κ + 361 – 736 = 0

25κ2 + 50κ − 375 = 0 25(κ2 + 2κ – 15) = 0 κ2 + 2κ – 15 = 0

Η τελευταία είναι δευτεροβάθμια ως προς κ με ρίζες κ = 3 ή κ = −5. Οπότε:

 Αν κ = 3 από την (4) έχουμε ότι: λ = = = = 7 λ = 7

Άρα στην περίπτωση αυτή το σημείο Γ είναι το Γ(3,7) και αφού στην (1) έχουμε βρει ότι λΓΔ = − , η πλευρά ΓΔ, η οποία περνάει από το σημείο Γ(3,7) και έχει λΓΔ = − , έχει εξίσωση:

y−7 = − (x−3)y−7 = − x +3 y−7 = − x + 4 y = − x + 4 + 7y = − x +11

 Αν κ = −5 από την (4) έχουμε ότι: λ = = = = 1 λ = 1

Άρα στην περίπτωση αυτή το σημείο Γ είναι το Γ(−5,1) και αφού στην (1) έχουμε βρει ότι λΓΔ = − , η πλευρά ΓΔ, η οποία περνάει από το σημείο Γ(−5,1) και έχει λΓΔ = − , έχει εξίσωση:

y−1 = − (x−(−5))y−1 = − (x+5) y−1 = − x −5 y−1 = − x −

y = − x − + 1y = − x − + y = − x −

**Άσκηση 7** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Μ(1,2) και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο Μ(1,2) είναι:

οι ευθείες της μορφής y – 2 = λ(x – 1) με λ ≠ 0 (1) ,

η οριζόντια ευθεία y = 2, η οποία προφανώς δεν αποτελεί λύση για την Άσκηση και

η κατακόρυφη ευθεία x = 1, η οποία επίσης προφανώς δεν αποτελεί λύση για την Άσκηση.

Οπότε:

 Θέτοντας στην (1) όπου y το 0 έχουμε ότι: 0 – 2 = λ(x – 1)–2 = λx – λ–2 + λ = λx

λx = –2 + λ x =

Άρα οι ευθείες της μορφής (1) τέμνουν τον άξονα x′x στο σημείο Α( ,0) .

 Θέτοντας στην (1) όπου x το 0 έχουμε ότι: y – 2 = λ(0 – 1)y – 2 = −λy = −λ+2

Άρα οι ευθείες της μορφής (1) τέμνουν τον άξονα y′y στο σημείο Β(0,−λ+2) .

Σύμφωνα με την εκφώνηση, οι ευθείες της μορφής (1) σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο, δηλαδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές.

Επομένως ισχύει: (ΟΑ) = (ΟΒ) = = =

 − = 0 – = 0 (1− = 0

( (2) ή 1−)

● Λύνουμε την (2) 2−λ = 0 λ = 2

Οπότε θέτοντας στην (1) όπου λ το 2 προκύπτει η ευθεία:

y – 2 = 2∙(x – 1) y – 2 = 2x – 2 y = 2x, η οποία δεν αποτελεί λύση για την Άσκηση, διότι δεν σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο καθώς διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

● Λύνουμε την (3) − = −1 = 1 ( λ = 1 ή λ = −1 )

Οπότε:

●● θέτοντας στην (1) όπου λ το 1 προκύπτει η ευθεία (ε1):

y – 2 = 1∙(x – 1) y – 2 = x – 1 y = x – 1 + 2 y = x + 1

●● θέτοντας στην (1) όπου λ το −1 προκύπτει η ευθεία (ε2):

y – 2 = −1∙(x – 1) y – 2 = −x + 1 y = −x + 1 + 2 y = −x + 3

Άρα η Άσκηση έχει δύο λύσεις, τις ευθείες (ε1): y = x + 1 και (ε2): y = −x + 3 .

(ε2)

(ε1)

Ο

Μ

**Άσκηση 8** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο Μ(1,4) και τέμνει τις ευθείες ε1: y=−x+4 και ε2: y=2x+3 στα σημεία Α και Β αντιστοίχως , έτσι ώστε το Μ να είναι το μέσο του ΑΒ .

Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο Μ(1,4) είναι:

οι ευθείες της μορφής y – 4 = λ(x – 1) (1) και

η κατακόρυφη ευθεία x = 1 (2)

Έστω Α(xΑ,yΑ) και Β(xΒ,yΒ) τα σημεία στα οποία η ζητούμενη ευθεία ε τέμνει αντίστοιχα τις ευθείες ε1 και ε2 . Τότε:

● αφού το Α(xΑ,yΑ) ανήκει στην ευθεία ε1: y=−x+4, θα ισχύει: yΑ = −xΑ+4, οπότε το σημείο Α είναι το Α(xΑ,−xΑ+4)

● αφού το Β(xΒ,yΒ) ανήκει στην ευθεία ε2: y=2x+3, θα ισχύει: yΒ = 2xΒ+3, οπότε το σημείο Β είναι το Β(xΒ, 2xΒ+3)

Αφού τώρα το σημείο Μ(1,4) είναι το μέσο του ΑΒ, έχουμε ότι:

 = 1 xΑ + xΒ = 1∙2 xΑ + xΒ = 2 (3)

και

−xΑ + 2xΒ = 1 (4)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3) και (4) προκύπτει η εξίσωση:

xΑ + xΒ −xΑ + 2xΒ = 2 + 1 3xΒ = 3xΒ = 1 (5)

Οπότε από την (3) λόγω της (5) έχουμε ότι: xΑ + 1 = 2 xΑ = 1 (6)

Από τις (5) και (6) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Α και Β, στα οποία η ζητούμενη ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο Μ(1,4) τέμνει αντίστοιχα τις ευθείες ε1 και ε2 έτσι ώστε το Μ να είναι το μέσο του ΑΒ, έχουν την ίδια τετμημένη 1.

Άρα η ζητούμενη ευθεία ε είναι η κατακόρυφη ευθεία x = 1 .

**Άσκηση 9** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο Μ(0,1) και τέμνει τις ευθείες ε1: y=x και ε2: y=x+1 στα σημεία Α και Β αντιστοίχως , έτσι ώστε να ισχύει ΑΒ=1.

Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο Μ(0,1) είναι:

οι ευθείες της μορφής y – 1 = λ(x – 0) y – 1 = λx y = λx + 1 (1) και

η κατακόρυφη ευθεία x = 0, δηλαδή ο άξονας y′y (2)

Παρατηρούμε ότι το σημείο Μ(0,1) ανήκει στην ευθεία ε2: y=x+1, αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση y=x+1 της ευθείας ε2, διότι για x=0 προκύπτει y=∙0+1=1.

Άρα το σημείο Β ταυτίζεται με το σημείο Μ(0,1).

● Έχουμε ότι η ευθεία ε2: y=x+1 προκύπτει από την παράλληλή της ευθεία ε1: y=x με κατακόρυφη μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα επάνω.

Άρα μία λύση της Άσκησης είναι η κατακόρυφη ευθεία x = 0, δηλαδή ο άξονας y′y, δηλαδή η ευθεία (2), διότι στην περίπτωση αυτή το σημείο Α στο οποίο η ευθεία αυτή τέμνει την ευθεία ε1: y=x ταυτίζεται με την αρχή Ο(0,0) των αξόνων και η απόσταση ΑΒ=ΟΜ=1.

● Έστω τώρα μία ευθεία της μορφής y = λx + 1 (1), με λ≠, η οποία διέρχεται από το σημείο Μ(0,1) και η οποία όπως ήδη αναφέραμε τέμνει την ευθεία ε2: y=x+1 στο σημείο Μ(0,1).

Αρχικά βρίσκουμε το σημείο τομής Α της ευθείας y = λx + 1 (1), με λ≠, με την ευθεία

y = x (3) , λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (3):

Από (1) και (3) έχουμε ότι:

λx + 1 = x 2λx + 2 = x 2λx – x = −2 (2λ−1)x = −2 x = (4) (αφού λ≠)

Οπότε από την (3) λόγω της (4) έχουμε ότι: y =  y = (5)

Από τις (4) και (5) έχουμε ότι το σημείο τομής Α της ευθείας y = λx + 1 (1), με λ≠, με την ευθεία y = x (3) είναι το Α( )

Αφού τώρα ΑΒ=1, όπου, όπως είδαμε παραπάνω το σημείο Β ταυτίζεται με το σημείο Μ(0,1),

έχουμε ότι:

ΑΒ=1 ΑΜ=1 =1 =1

+ = 1 4 + 4λ2 = (2λ-1)2 4 + 4λ2 = 4λ2-4λ+14λ = 1-4 4λ = -3

λ = - (6)

Οπότε λόγω της (6) η ευθεία της μορφής y = λx + 1 (1), με λ≠, που είχαμε θεωρήσει γράφεται: y = - x + 1 .

Επομένως η Άσκηση έχει δύο λύσεις:

την κατακόρυφη ευθεία x = 0 και την (πλάγια) ευθεία y = - x + 1 .