**ΕΝΟΤΗΤΑ 1.1 : ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΤΥΧΗΣ, ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ**

**Λύσεις των Ασκήσεων**

**Άσκηση 1**

Τα χρώματα μιας ομάδας βόλεϊ είναι λευκό, γαλάζιο και μαύρο. Για κάθε παίκτη/παίκτρια η ομάδα δίνει τα εξής ρούχα:

* Τρεις μονόχρωμες μπλούζες: Μία λευκή (Λ), μία γαλάζια (Γ) και μία μαύρη (Μ).
* Τρία μονόχρωμα σορτσάκια, στα ίδια χρώματα με τις μπλούζες.
* Δύο ζευγάρια κάλτσες, ένα μαύρο κι ένα λευκό.

Επιλέγουμε τυχαία μία μπλούζα, ένα σορτσάκι κι ένα ζευγάρι κάλτσες.

**α)** Να γράψετε έναν δ.χ. του πειράματος τύχης.

**β)** Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω δ.χ. να βρείτε το ενδεχόμενο Α: «τα ρούχα που επιλέξαμε έχουν ίδιο χρώμα».

Λύση

**α)** Για να συμβολίσουμε κάθε στοιχείο του δ.χ. θα χρησιμοποιήσουμε διατεταγμένες τριάδες. Για παράδειγμα, η τριάδα ΛΓΜ σημαίνει Λευκή μπλούζα, Γαλάζιο σορτσάκι, Μαύρες κάλτσες. Δηλαδή πάντα πρώτο γράφουμε το αρχικό γράμμα του χρώματος της μπλούζας, δεύτερο γράφουμε το αρχικό γράμμα του χρώματος του σορτς και τρίτο γράφουμε το αρχικό γράμμα του χρώματος των καλτσών.

Άρα ως δ.χ. γράφουμε τον

Ω = { ΛΛΛ, ΛΛΜ, ΛΓΛ, ΛΓΜ, ΛΜΛ, ΛΜΜ, ΓΛΛ,ΓΛΜ,ΓΓΛ,ΓΓΜ,ΓΜΛ,ΓΜΜ, ΜΛΛ,ΜΛΜ,ΜΓΛ,ΜΓΜ,ΜΜΛ,ΜΜΜ}

**β)** Το ενδεχόμενο είναι: Α = { ΛΛΛ,ΜΜΜ } .

**Άσκηση 2**

Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Στον δ.χ. της εφαρμογής 2 να βρείτε τα ενδεχόμενα:

**α)** Α: Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2ης ρίψης.

**β)** Β: Το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός.

**γ)** Γ: Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι 6.

**δ)** ΑΒ , Λύση

ΑΒ , ΒΓ , ΑΓ και Γ Α .

Παρακάτω γράφουμε τον δ.χ. της εφαρμογής 2:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 |
| 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 |
| 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,6 |
| 4,1 | 4,2 | 4,3 | 4,4 | 4,5 | 4,6 |
| 5,1 | 5,2 | 5,3 | 5,4 | 5,5 | 5,6 |
| 6,1 | 6,2 | 6,3 | 6,4 | 6,5 | 6,6 |

**α)** Χρωματίζουμε τα κελιά, που ο πρώτος από τους δύο αριθμούς είναι μεγαλύτερος από τον δεύτερο

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 |
| 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 |
| 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,6 |
| 4,1 | 4,2 | 4,3 | 4,4 | 4,5 | 4,6 |
| 5,1 | 5,2 | 5,3 | 5,4 | 5,5 | 5,6 |
| 6,1 | 6,2 | 6,3 | 6,4 | 6,5 | 6,6 |

Άρα:

Α = {(2,1),(3,1),(3, 2),(4,1),(4, 2),(4,3),(5,1),(5, 2),(5,3),(5, 4),(6,1),(6, 2),(6,3),(6, 4),(6,5)}

**β)** Χρωματίζουμε τα κελιά, που το άθροισμα των δύο αριθμών είναι άρτιο.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 |
| 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 |
| 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,6 |
| 4,1 | 4,2 | 4,3 | 4,4 | 4,5 | 4,6 |
| 5,1 | 5,2 | 5,3 | 5,4 | 5,5 | 5,6 |
| 6,1 | 6,2 | 6,3 | 6,4 | 6,5 | 6,6 |

Β = {(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),

(4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6)}

**γ)** Τα κελιά της τελευταίας γραμμής αντιστοιχούν στο ενδεχόμενο Γ, άρα:

Γ = {(6,1),(6, 2),(6,3 ),(6, 4),(6, 5),(6, 6)}

**δ)** ΑΒ = {(3,1),( 4, 2),(5,1),(5, 3 ),(6, 2),(6, 4 )}

ΑΒ = {(1,1),(1,3),(1,5),

(2,1),(2,2),(2,4),(2,6),

(3,1),(3,2),(3,3),(3,5),

(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,6),

(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),

(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

Β − Γ = {(1,1),(1, 3),(1, 5),(2, 2),(2, 4),(2, 6),(3,1),(3,3),(3,5),(4, 2),( 4, 4),( 4, 6),(5,1),(5,3),(5,5)}

Α − Γ = {(2,1),(3,1),(3, 2),( 4,1),( 4, 2),( 4, 3),(5,1),(5, 2),(5,3),(5, 4 )}

Γ − Α = {(6,6)}

**Άσκηση 3**

Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μία άσπρη, μία κόκκινη και μία μαύρη. Παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα τυχαία και καταγράφουμε το χρώμα της. Μετά ξανατοποθετούμε τη μπάλα στο κουτί και επαναλαμβάνουμε άλλη μία φορά την τυχαία επιλογή μπάλας. Έτσι, στο τέλος έχουμε καταγράψει δύο χρώματα (ίδια ή διαφορετικά), ένα για κάθε μπάλα που επιλέξαμε. Να γράψετε έναν δ.χ. για το πείραμα τύχης και στη συνέχεια να απαντήσετε στα ερωτήματα:

**α)** Ποιο είναι το ενδεχόμενο Α: «η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη»; **β)** Ποιο είναι το ενδεχόμενο Β: «η δεύτερη μπάλα είναι κόκκινη»; **γ)** Να εκφράσετε λεκτικά το ενδεχόμενο ΑΒ και να το βρείτε.

**δ)** Να εκφράσετε λεκτικά το ενδεχόμενο ΑΒ και να το βρείτε.

Λύση

Θεωρώντας ότι με Α συμβολίζουμε την καταγραφή μπάλας άσπρου χρώματος, με Κ κόκκινου χρώματος και με Μ μαύρου χρώματος, ως δ.χ. του πειράματος τύχης γράφουμε τον Ω = {ΑΑ, ΑΚ, ΑΜ,ΚΑ,ΚΚ,ΚΜ,ΜΑ,ΜΚ,ΜΜ}

**α)** A = {KA,KK,KM}

 **β)** Β = {ΑΚ,ΚΚ,ΜΚ }

**γ)** ΑΒ: «η πρώτη και η δεύτερη μπάλα είναι κόκκινες»

ΑΒ = {KK }

**δ)** Α−Β: «η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη και η δεύτερη μπάλα δεν είναι κόκκινη»

Α−Β = {KA,KM}

**Άσκηση 4**

Να λύσετε την άσκηση 3, αν αυτή τη φορά η μπάλα που εξάγεται την πρώτη φορά δεν επανατοποθετείται στο κουτί πριν τη δεύτερη εξαγωγή μπάλας.

Λύση

Θεωρώντας, όπως και στην άσκηση 3, ότι με Α συμβολίζουμε την καταγραφή μπάλας άσπρου χρώματος, με Κ κόκκινου χρώματος και με Μ μαύρου χρώματος, ως δ.χ. του πειράματος τύχης γράφουμε τον

 Ω = {ΑΚ, ΑΜ,ΚΑ, ΚΜ,ΜΑ,ΜΚ }

**α)** A = {KA,KM}

**β)** Β = {ΑΚ,ΜΚ}

**γ)** ΑΒ = Ø : «η πρώτη και η δεύτερη μπάλα είναι κόκκινες».

**δ)** Α−Β = {KA,KM} : «η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη και η δεύτερη μπάλα δεν είναι κόκκινη».

**Άσκηση 5**

Ρίχνουμε δύο ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα της ρίψης. Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα Α*΄* , ΑΓ, ΑΓ και ΒΓ, όπου:

Α: «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός», Β: «Το αποτέλεσμα των ρίψεων έχει άθροισμα 7»,

Γ: «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 3».

Λύση

Α΄: «Δεν είναι το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων άρτιος αριθμός» ή αλλιώς Α΄: «Το αποτέλεσμα μιας τουλάχιστον από τις δύο ρίψεις είναι περιττός αριθμός»

ΑΓ: «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός ή το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 3».

ΑΓ: «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός, αλλά δεν είναι και οι δύο μεγαλύτεροι του 3». Ή εναλλακτικά «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός, αλλά ένας τουλάχιστον είναι μικρότερος του 3».

ΒΓ : «Το αποτέλεσμα των ρίψεων έχει άθροισμα 7, αλλά δεν είναι και οι δύο μεγαλύτεροι του 3».

**Άσκηση 6**

Δύο παίκτες παίζουν σκάκι και συμφωνούν να είναι νικητής εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παρτίδες. Να γράψετε έναν δ.χ. για το πείραμα τύχης, από τον οποίο να προκύπτει πόσα παιχνίδια έγιναν μέχρι να βγει νικητής, ποιος προηγήθηκε και ποιος τελικά κέρδισε.

Λύση

Έχουμε δύο παίκτες, τους Α και Β. Ας συμβολίσουμε ως α τη νίκη του Α σε μια παρτίδα και ως β τη νίκη του Β σε μια παρτίδα.

Τότε, το παρακάτω διάγραμμα εκφράζει όλες τις δυνατές εκβάσεις του παιχνιδιού.

1η παρτίδα 2η παρτίδα 3η παρτίδα (αν χρειαστεί)

α

α

β

β

α

β

α

β α β

Άρα Ω = {αα, αβα, αββ, βαα, βαβ, ββ}.

Σε κάθε στοιχείο του δ.χ. φαίνονται οι πληροφορίες που ζητούνται. Π.χ. στην έκβαση αββ, χρειάστηκε να γίνουν 3 παρτίδες, προηγήθηκε ο Α και νίκησε τελικά ο Β.

**Πρόσθετο υλικό**

**Άσκηση 1**

Οι ένοικοι μίας πολυκατοικίας παρκάρουν τα οχήματά τους σε ένα χώρο στάθμευσης αυτοκινήτων. Στο παρακάτω διάγραμμα Venn, το Α έχει ως στοιχεία του ενοίκους που έχουν αυτοκίνητο και το Β εκείνους που έχουν μηχανή. Επιλέγουμε τυχαία έναν ένοικο.



Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των συνόλων (τομή, ένωση κ.τ.λ.) να εκφράσετε τα ενδεχόμενα, ο ένοικος που επιλέγουμε:

**α)** έχει αυτοκίνητο και μηχανή.

**β)** έχει αυτοκίνητο ή μηχανή.

**γ)** δεν έχει αυτοκίνητο ή μηχανή.

**δ)** δεν έχει αυτοκίνητο και δεν έχει μηχανή. **ε)** δεν έχει (και) αυτοκίνητο και μηχανή. **στ)** δεν έχει αυτοκίνητο ή δεν έχει μηχανή.

**ζ)** έχει μόνο αυτοκίνητο ή έχει μόνο μηχανή.

**η)** έχει αυτοκίνητο ή μηχανή, αλλά δεν ανήκει σε αυτούς που έχουν και αυτοκίνητο και μηχανή.

Λύση

**α)** ΑΒ **β)** ΑΒ

**γ)** (Α  Β)΄ **δ)** Α΄ Β΄ **ε)** (Α  Β)΄ **στ)** Α΄ Β΄

**ζ)** (Α  Β)  (Β  Α)

**η)** (Α  Β)  ( Α  Β)

Σχόλιο: Φαίνεται ότι κάποιες λεκτικές διατυπώσεις περιγράφουν το ίδιο σύνολο ενοίκων. Αυτές αντιστοιχούν σε ίσα ενδεχόμενα, όπως φαίνεται στην επόμενη άσκηση.

**Άσκηση 2**

Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δ.χ. Ω να αντιστοιχίσετε τα ενδεχόμενα της πρώτης στήλης με τα ίσα προς αυτά ενδεχόμενα της δεύτερης στήλης.

AB*΄*

Α Β*΄*

A B B A

1η στήλη

Α*΄* Β*΄*

ABAB

A*΄* Β*΄*

2η στήλη

Στη συνέχεια να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα του πίνακα. Ποιες λεκτικές εκφράσεις αντιστοιχούν σε ίσα ενδεχόμενα;

Λύση

(Α  Β)΄  Α΄  Β΄ . Οι λεκτικές εκφράσεις που αντιστοιχούν σε αυτά τα ίσα ενδεχόμενα είναι «Το αντίθετο του ενδεχομένου "πραγματοποιείται το Α ή το Β"» και «Δεν πραγματοποιείται ούτε το Α ούτε το Β».

(Α  Β)΄  Α΄  Β΄ . Οι λεκτικές εκφράσεις που αντιστοιχούν σε αυτά τα ίσα ενδεχόμενα

είναι «Δεν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β» και «Δεν πραγματοποιείται το Α ή δεν πραγματοποιείται το Β».

( Α  Β)  (Β  Α )  ( Α  Β)  ( Α  Β) . Οι λεκτικές εκφράσεις που αντιστοιχούν σε αυτά τα ίσα ενδεχόμενα είναι «Πραγματοποιείται μόνο το Α ή μόνο το Β» και

«Πραγματοποιείται το Α ή το Β, αλλά όχι και τα δύο συγχρόνως».

**ΕΝΟΤΗΤΑ 1.2 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ: ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

**Λύσεις των Ασκήσεων**

**Άσκηση 1**

Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα των ρίψεων. Ποιες είναι οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

**α)** Το άθροισμα των ρίψεων είναι ίσο με 4.

**β)** Το άθροισμα των ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 4.

**γ)** Το άθροισμα των ρίψεων είναι περιττός αριθμός.

Λύση

Ως δ.χ. του πειράματος τύχης θεωρούμε τον Ω που παριστάνεται με τον παρακάτω πίνακα:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 |
| 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 |
| 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,6 |
| 4,1 | 4,2 | 4,3 | 4,4 | 4,5 | 4,6 |
| 5,1 | 5,2 | 5,3 | 5,4 | 5,5 | 5,6 |
| 6,1 | 6,2 | 6,3 | 6,4 | 6,5 | 6,6 |

Είναι Ν(Ω) = 36.

**α)** Έστω Α το ενδεχόμενο «το άθροισμα των ρίψεων είναι ίσο με 4».

Είναι Α = {(1,3), (2,2), (3,1)}, άρα P(A) = $\frac{3}{36}$ =$ \frac{1}{12}$

**β)** Έστω Β το ενδεχόμενο «το άθροισμα των ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 4». Το πλήθος των στοιχείων του Β είναι Ν(Β) = 30.

Άρα P(B) = $\frac{30}{36}$ =$ \frac{5}{6}$

**γ)** Έστω Γ το ενδεχόμενο «το άθροισμα των ρίψεων είναι περιττός αριθμός». Π.χ. ένα στοιχείο του Γ είναι το (2,1) καθώς 2+1=3, περιττός.

Είναι Ν(Γ) =18 και Ρ(Γ) = $\frac{18}{36}$ =$ \frac{1}{2}$

**Άσκηση 2**

Να αποδείξετε ότι ο απλός προσθετικός νόμος προκύπτει ως συνέπεια του κλασικού ορισμού.

Λύση

Έστω δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω, τα οποία είναι ασυμβίβαστα. Επίσης υποθέτουμε ότι Ν(Ω) = ν, Ν(Α) = α και Ν(Β) = β.

Τότε, όλα τα στοιχεία των Α και Β αποτελούν την ένωση ΑΒ. Επίσης, κανένα στοιχείο των Α και Β δεν είναι κοινό, καθώς είναι ασυμβίβαστα. Επομένως, το πλήθος των στοιχείων της ένωσης είναι α+β, δηλαδή Ν( Α  Β) =α  β .

Άρα P(AB) = $\frac{Ν\left(Α∪Β\right)}{Ν\left(Ω\right)} $= $\frac{α + β}{ν}$ = $\frac{α }{ν}$ + $\frac{β}{ν}$ = P(A) + P(B)

**Άσκηση 3**

Ένα κέρμα είναι κατασκευασμένο έτσι ώστε κατά τη ρίψη του η πιθανότητα του ενδεχομένου «εμφανίζεται κεφαλή» είναι 0,95. Θεωρείτε ότι το πείραμα αυτό είναι πείραμα τύχης;

Λύση

Ναι, είναι πείραμα τύχης, καθώς δεν μπορούμε να προβλέψουμε την έκβασή του. Αν και η πιθανότητα του ενδεχομένου «εμφανίζεται κεφαλή» είναι αρκετά μεγάλη, δηλαδή 0,95, ωστόσο η πιθανότητα του ενδεχομένου «εμφανίζονται γράμματα» είναι 1-0,95=0,05, δηλαδή υπάρχει. Άρα δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα την έκβαση της ρίψης του κέρματος.

Με απλά λόγια, σε μια ρίψη του κέρματος είναι πιθανές και οι δύο εκβάσεις και δεν μπορούμε να προβλέψουμε ποιο θα είναι το αποτέλεσμα. Το γεγονός ότι αναμένουμε ως πιο πιθανή έκβαση την εμφάνιση κεφαλής, δεν αίρει την αδυναμία μας να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα.

**Άσκηση 4**

Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα των ρίψεων. Να αντιστοιχίσετε τα ενδεχόμενα της 1ης στήλης με τις πιθανότητες της 2ης στήλης:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1η στήλη |  | 2η στήλη |
| * Έρχεται διπλή ζαριά (το ίδιο αποτέλεσμα και
 |  |
| στα δύο ζάρια.) | $$\frac{1}{6}$$ |
| * Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι
 |
| περιττός αριθμός. |  |
| * Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι

άρτιος αριθμός. | $$\frac{1}{4}$$ |
|  |  |
| * Τουλάχιστον ένα από τα δύο ζάρια φέρνει
 |  |
| άρτιο αποτέλεσμα. | $$\frac{3}{4}$$ |
| * Το αποτέλεσμα και των δύο ζαριών είναι άρτιος
 |
| αριθμός. |  |
| * Το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δύο
 | **0,5** |
| ζαριών είναι άρτιος αριθμός. |  |

Λύση

Με τη βοήθεια του δειγματικού χώρου του πειράματος τύχης (βλέπε λύση άσκησης 1), βρίσκουμε τα εξής:

Έρχεται διπλή ζαριά: πιθανότητα $\frac{6}{36}$ = $\frac{1}{6}$ .

Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι περιττός: πιθανότητα $\frac{18}{36}$ = $\frac{1}{2}$ = 0,5.

Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι άρτιος: πιθανότητα, ομοίως 0,5.

Τουλάχιστον ένα από τα δύο ζάρια φέρνει άρτιο αποτέλεσμα: πιθανότητα $\frac{27}{36}$ = $\frac{3}{4}$ .

Το αποτέλεσμα και των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός: πιθανότητα $\frac{9}{36}$ = $\frac{1}{4}$ .

Το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός: πιθανότητα 0,5.

**Άσκηση 5**

Να μοντελοποιήσετε το πείραμα τύχης της εφαρμογής 2, χρησιμοποιώντας το μέτρο του κάθε τόξου σε rad αντί σε μοίρες, για να ορίσετε τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων ωi. Να συγκρίνετε τους δύο τρόπους μοντελοποίησης. Τι παρατηρείτε;

Λύση

Μετατρέπουμε τις μοίρες σε ακτίνια (rad) για κάθε ένα από τα τόξα. Όλος ο κύκλος αντιστοιχεί σε 2π ακτίνια (rad).

Επίσης για να υπολογίσουμε μια γωνία (ή ένα τόξο) σε ακτίνια βρίσκουμε τον λόγο της γωνίας (ή του τόξου) προς τις 360 (κύκλος) και πολλαπλασιάζουμε επί 2π, δηλαδή επί τον κύκλο σε ακτίνια.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Χρώμα | Μοίρες | Ακτίνια (rad) | Πιθανότητα αντίστοιχου ενδεχομένου |
| Πράσινο | 60 | $$\frac{60^{ο}}{360^{ο}}2π=\frac{1}{6}2π=\frac{π}{3}$$ | p1 =$ \frac{\frac{π}{3}}{2π} $= $\frac{\frac{π}{3}}{\frac{2π}{1}} $=$ \frac{1∙π}{3∙2π} $=$ \frac{1}{6}$ |
| Γαλάζιο | 100 | $$\frac{100^{ο}}{360^{ο}}2π=\frac{5}{18}2π=\frac{5π}{9}$$ | p2 =$ \frac{\frac{5π}{9}}{2π} $= $\frac{\frac{5π}{9}}{\frac{2π}{1}} $=$ \frac{1∙5π}{9∙2π} $=$ \frac{5}{18}$ |
| Κίτρινο | 40 | $$\frac{40^{ο}}{360^{ο}}2π=\frac{1}{9}2π=\frac{2π}{9}$$ | p3 =$ \frac{\frac{2π}{9}}{2π} $= $\frac{\frac{2π}{9}}{\frac{2π}{1}} $=$ \frac{1∙2π}{9∙2π} $=$ \frac{1}{9}$ |
| Γκρι | 110 | $$\frac{110^{ο}}{360^{ο}}2π=\frac{11}{36}2π=\frac{11π}{18}$$ | p4 =$ \frac{\frac{11π}{18}}{2π} $= $\frac{\frac{11π}{18}}{\frac{2π}{1}} $=$ \frac{1∙11π}{18∙2π} $=$ \frac{11}{36}$ |
| Κόκκινο | 50 | $$\frac{50^{ο}}{360^{ο}}2π=\frac{5}{36}2π=\frac{5π}{18}$$ | p5 =$ \frac{\frac{5π}{18}}{2π} $= $\frac{\frac{5π}{18}}{\frac{2π}{1}} $=$ \frac{1∙5π}{18∙2π} $=$ \frac{5}{36}$ |

Παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες των ενδεχομένων p1, p2, p3, p4, p5 είναι ίδιες, ανεξάρτητα αν η μοντελοποίηση θα γίνει χρησιμοποιώντας μοίρες ή ακτίνια (rad).

**Άσκηση 6**

Κάθε ένα από τα παρακάτω τρία σχήματα (δύο τετράγωνα και ένα κυκλικό) εμφανίζεται στην οθόνη ενός από τρεις ίδιους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.

Ένα πρόγραμμα στον υπολογιστή επιλέγει τυχαία και χρωματίζει με μαύρο χρώμα ένα pixel μέσα στο σχήμα. Σε κάθε πλαίσιο ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου, το pixel που θα χρωματιστεί:

**α)** Να ήταν κόκκινο;

**β**) Να ήταν γαλάζιο ή κίτρινο;

**γ)** Να μην ήταν κόκκινο;

Λύση

Μοντελοποιούμε το πείραμα τύχης ως εξής, σε κάθε πλαίσιο: Ω: δειγματικός χώρος το σύνολο των pixel στο σχήμα

ΑΧ: το ενδεχόμενο «το pixel που γίνεται μαύρο ήταν χρώματος Χ»

P(AX) = $\frac{εμβαδόν μέρους σχήματος με χρώμα Χ}{συνολικό εμβαδόν σχήματος}$ = μέρος του συνολικού εμβαδού με χρώμα Χ

Για το πλαίσιο 1

Προσεγγιστικά, μπορούμε να υποθέσουμε (όπως στο παρακάτω σχήμα) ότι το πλαίσιο 1 αποτελείται από 6 ίσα ορθογώνια, από τα οποία τα 4 είναι γαλάζια, το ένα κόκκινο και το ένα κίτρινο.

Οπότε, η επιφάνεια κόκκινου χρώματος είναι το $\frac{1}{6}$ του πλαισίου 1,

η επιφάνεια κίτρινου χρώματος είναι το $\frac{1}{6}$ του πλαισίου 1 και

η επιφάνεια γαλάζιου χρώματος είναι τα $\frac{4}{6}$ = $\frac{2}{3}$ του πλαισίου 1.

Έτσι έχουμε:

 **α)** P(AΚΟΚΚΙΝΟ) = $\frac{1}{6}$

 **β)** P(AΚΙΤΡΙΝΟ) = $\frac{1}{6}$ και P(AΓΑΛΑΖΙΟ) = $\frac{2}{3}$ . Άρα, από τον απλό προσθετικό νόμο είναι:

 P(AΓΑΛΑΖΙΟ AΚΙΤΡΙΝΟ) = $\frac{2}{3}$ + $\frac{1}{6}$ = $\frac{4}{6}$ + $\frac{1}{6}$ = $\frac{5}{6}$

**γ)** Το ενδεχόμενο «το pixel που γίνεται μαύρο δεν ήταν κόκκινο» είναι ίδιο με το ενδεχόμενο «το pixel που γίνεται μαύρο ήταν γαλάζιο ή κίτρινο», του οποίου η

$$\frac{5}{6}$$

πιθανότητα έχει υπολογιστεί στο β) και είναι ίση με

Για το πλαίσιο 2

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι:

η επιφάνεια γαλάζιου χρώματος είναι το $\frac{1}{4}$ του πλαισίου 2,

η επιφάνεια κίτρινου χρώματος είναι το $\frac{1}{8}$ του πλαισίου 2 και

η επιφάνεια κόκκινου χρώματος είναι τα $\frac{5}{8}$ του πλαισίου 2.

Άρα, οι απαντήσεις στα ερωτήματα της άσκησης είναι:

**α)** $\frac{5}{8}$ , **β)** $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{8}$ = $\frac{3}{8}$ , **γ)** $\frac{3}{8}$

Για το πλαίσιο 3



Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι:

η επιφάνεια γαλάζιου χρώματος είναι το $\frac{1}{8}$ του πλαισίου 3,

η επιφάνεια κόκκινου χρώματος είναι το $\frac{1}{8}$ του πλαισίου 3 και

η επιφάνεια κίτρινου χρώματος είναι τα $\frac{3}{4}$ του πλαισίου 3.

Άρα, οι απαντήσεις στα ερωτήματα της άσκησης είναι:

**α)** $\frac{1}{8}$ , **β)** $\frac{1}{8}$ + $\frac{3}{4}$ = $\frac{7}{8}$ , **γ)** $\frac{7}{8}$

**Άσκηση 7**

O βοτανολόγος Γκρέγκορ Μέντελ, στα μέσα του 19ου αιώνα, πειραματίστηκε με την εμφάνιση των κληρονομικών χαρακτηριστικών των μοσχομπίζελων, διατυπώνοντας τους νόμους της Μενδελικής κληρονομικότητας. Από τα πειράματά του συμπέρανε τον νόμο της ομοιομορφίας, σύμφωνα με τον οποίο το χρώμα του άνθους μοσχομπίζελου είναι αποτέλεσμα του συνδυασμού δύο «κληρονομικών παραγόντων» που σήμερα

ονομάζονται αλληλόμορφα γονίδια. Για το χρώμα υπάρχουν δύο γονίδια: το επικρατές B, που αντιστοιχεί στο ιώδες και το υπολειπόμενο b που αντιστοιχεί στο λευκό χρώμα.

Σε ένα φυτό, το χρώμα του άνθους του οφείλεται σε ένα αλληλόμορφο γονίδιο που κληρονομεί από το πατρικό μοσχομπίζελο κι ένα αλληλόμορφο γονίδιο που κληρονομεί από το μητρικό. Όπως φαίνεται στον πίνακα για να προκύψει μοσχομπίζελο με λευκό άνθος, πρέπει και τα δύο αλληλόμορφα γονίδια να είναι τύπου b. Σε κάθε άλλη περίπτωση προκύπτει μοσχομπίζελο με ιώδες άνθος.

Διασταυρώνουμε δύο μοσχομπίζελα: ένα τύπου BB και ένα με λευκό άνθος. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να προκύψει μοσχομπίζελο με λευκό άνθος:

**α)** στην 1η (θυγατρική) γενιά.

**β)** στην 2η (θυγατρική) γενιά.

Λύση

**α)** Το λευκό μοσχομπίζελο της πατρικής γενιάς έχει κληρονομήσει δύο γονίδια b. Άρα είναι τύπου bb. Διασταυρώνουμε τα μοσχομπίζελα και στα αχρωμάτιστα κελιά του πίνακα φαίνονται οι πιθανοί τύποι των μοσχομπίζελων 1ης θυγατρικής γενιάς:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Β | Β |
| b | Bb | Bb |
| b | Bb | Bb |

Ας θεωρήσουμε το πείραμα τύχης «διασταυρώνουμε τα δύο μοσχομπίζελα τύπων BB και bb και γράφουμε τον τύπο ενός μοσχομπίζελου που μπορεί να προκύψει στην 1η θυγατρική γενιά». Ο δ.χ. του πειράματος τύχης είναι:

Ω = {Bb, Bb, Bb, Bb}

Άρα η πιθανότητα του ενδεχομένου το μοσχομπίζελο να είναι bb (δηλαδή λευκό) είναι 0. Το ενδεχόμενο είναι αδύνατο.

**β)** Συνεχίζοντας στη 2η θυγατρική γενιά (που προκύπτει από διασταυρώσεις της 1ης), έχουμε:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | B | b |
| B | BB | Bb |
| B | Bb | bb |

Για το πείραμα τύχης «διασταυρώνουμε τα δύο μοσχομπίζελα τύπων Bb και Bb (1ης γενιάς) και γράφουμε τον τύπο ενός μοσχομπίζελου που μπορεί να προκύψει στην 2η θυγατρική γενιά». Ο δ.χ. του πειράματος τύχης είναι:

Ω = {BB, Bb, Bb, bb}

Άρα, η πιθανότητα του ενδεχομένου το μοσχομπίζελο να είναι bb (δηλ. λευκό) είναι $\frac{1}{4}$.

**Άσκηση 8**

Σε ένα μαιευτήριο τον προηγούμενο μήνα από τα παιδιά που γεννήθηκαν το 30% ήταν αγόρια και το 70% ήταν κορίτσια. Με ποιες από τις παρακάτω προτάσεις συμφωνείτε; **α)** Σε αυτό το μαιευτήριο τον προηγούμενο μήνα γεννήθηκαν περισσότερα κορίτσια.

**β)** Αν ένα ζευγάρι που περιμένει παιδί επιλέξει αυτό το μαιευτήριο για τον τοκετό, τότε η πιθανότητα να γεννηθεί κορίτσι είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι.

**γ)** Αν επιλέξουμε τυχαία ένα παιδί από τον κατάλογο των νεογέννητων του προηγούμενου μήνα σε αυτό το μαιευτήριο, τότε η πιθανότητα να είναι αγόρι είναι ίση με 0,3.

**δ)** Αν επιλέξουμε ένα παιδί στην τύχη από την λίστα των παιδιών που έχουν γεννηθεί σε αυτό το μαιευτήριο, τότε η πιθανότητα να είναι κορίτσι είναι 0,7.

Λύση

**α)** Σωστό,

**β)** Λάθος (δεν προκύπτει από τα δεδομένα τρόπος να τεκμηριώσουμε ότι η γέννηση αγοριού ή κοριτσιού είναι πιθανότερη),

**γ)** Σωστό,

**δ)** Λάθος (δεν αναφέρεται στον προηγούμενο μήνα).

**Άσκηση 9**

Σε μία κλειστή κάλπη τοποθετούνται 5 κόκκινα και 6 πράσινα σφαιρίδια. Από την κάλπη βγάζουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο. Αφού βγάλουμε το σφαιρίδιο, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου να υπάρχει στην κάλπη ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα; Αν στην κάλπη αρχικά υπήρχαν περισσότερα σφαιρίδια, αλλά πάλι τα πράσινα ήταν περισσότερα από τα κόκκινα κατά 1, να διερευνήσετε αν και πόσο θα άλλαζε η πιθανότητα του ίδιου ενδεχομένου.

Λύση

Στην κάλπη υπάρχουν συνολικά 11 σφαιρίδια. Η πιθανότητα να βγάλουμε κόκκινο

σφαιρίδιο είναι $\frac{5}{11}$ , ενώ η πιθανότητα να βγάλουμε πράσινο σφαιρίδιο είναι $\frac{6}{11}$ .

Βγάζουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την κάλπη. Το ενδεχόμενο «στην κάλπη απομένει ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα» είναι ίδιο με το ενδεχόμενο «το σφαιρίδιο που βγάλαμε είναι πράσινο».

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{6}{11}$ $\frac{6}{11}$ .

Για το δεύτερο μέρος της άσκησης, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν ν κόκκινα σφαιρίδια, με ν>5 (εφόσον τα σφαιρίδια είναι περισσότερα από πριν). Τότε τα πράσινα σφαιρίδια είναι ν+1. Το σύνολο των σφαιριδίων είναι 2ν+1.

Άρα η πιθανότητα να εξάγουμε τυχαία ένα πράσινο σφαιρίδιο από την κάλπη είναι

$\frac{ν+1}{2ν+1} $.

Επομένως η πιθανότητα του ενδεχομένου «στην κάλπη απομένει ίδιος αριθμός

σφαιριδίων από τα δύο χρώματα» είναι $\frac{ν+1}{2ν+1} $.

Η πιθανότητα του ενδεχομένου σε αυτή την περίπτωση θα άλλαζε κατά:

$$\frac{ν+1}{2ν+1} - \frac{6}{11}= \frac{11(ν+1)-6(2ν+1)}{11(2ν+1)}=\frac{11ν+11-12ν-6}{11(2ν+1)}=\frac{5-ν}{11(2ν+1)}$$

Εφόσον ν > 5  ν − 5 > 0  5 − ν < 0 . Άρα: $\frac{5-ν}{11(2ν+1)} $ < 0.

Επομένως, σε αυτό το πείραμα τύχης, η πιθανότητα του ενδεχομένου «στην κάλπη απομένει ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα» θα μειωνόταν, αν αυξανόταν ο αριθμός των σφαιρών.

**Άσκηση 10**

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο κέρμα δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα. Ορίζουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

**Α:** έρχεται το πολύ μία φορά Κεφαλή.

**Β:** έρχεται τουλάχιστον μία φορά Κεφαλή.

**Γ:** το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων είναι διαφορετικό.

**Δ:** το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων είναι το ίδιο.

**α)** Να αποδείξετε ότι Ρ(Α)=Ρ(Β) και ότι Ρ(Γ)=Ρ(Δ).

**β)** Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων ΑΒ, ΑΒ, ΑΒ.

**γ)** Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Γ ' , ΓΔ, ΓΔ, ΒΓ'. Λύση

Ένας δ.χ. του πειράματος τύχης είναι Ω = {ΚΚ, ΓΚ, ΚΓ, ΓΓ}.

Είναι A = {ΓΚ, ΚΓ, ΓΓ}, Β = {ΚΚ, ΓΚ, ΚΓ}, Γ= {ΓΚ, ΚΓ}, Δ = {ΚΚ, ΓΓ}.

**α)** Τα Α και Β έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, άρα ισχύει P(A) = P(B). Ομοίως, για τα ενδεχόμενα Γ και Δ.

**β)** Α  Β  {ΚΚ,ΓΚ,ΚΓ,ΓΓ}  Ω , Α  Β  {ΓΚ,ΚΓ} , Α  Β  {ΓΓ } .

Άρα P( A  B)  P(Ω)  1, P( A  B)  $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{2} $ ,P( A − B) $\frac{1}{4}$

**γ)** Γ΄  {ΚΚ, ΓΓ} , Γ  Δ   , Γ  Δ Ω , Β  Γ΄  {ΚΚ,ΓΚ,ΚΓ,ΓΓ}  Ω .

$$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Άρα P(Γ΄)  ,P(Γ Δ )  P()  0 , P(Γ  Δ)  Ρ(Ω)  1, P(B  Γ΄)  1 .

**Πρόσθετο υλικό**

**Άσκηση 1**

Από τον ορισμό της πιθανότητας (κλασικό και αξιωματικό) γνωρίζετε ότι Α *P*Α  0**.** Ισχύει το αντίστροφο; Μπορεί να υπάρχει ενδεχόμενο Α ενός δ.χ., που να μην είναι κενό και να ισχύει PA  0 ;

Λύση

Καταρχάς, ο αξιωματικός ορισμός δεν αποκλείει να αποδώσουμε σε κάποιο/α ενδεχόμενο/α πιθανότητα 0. Έτσι, θα μπορούσε να είναι Ρ(Α)=0, χωρίς το Α να είναι το κενό σύνολο.

Ως παράδειγμα, ας φανταστούμε το πείραμα με τον δίσκο της εφαρμογής 2. Μοντελοποιούμε το πείραμα ως εξής:

Ως δειγματικό χώρο θεωρούμε το σύνολο όλων των δυνατών θέσεων του βέλους. Υποσύνολα του δ.χ. είναι τα ενδεχόμενα Α: "το βέλος σταματάει στο πράσινο"

Β: "το βέλος σταματάει στο γαλάζιο" Γ: "το βέλος σταματάει στο κίτρινο" Δ: "το βέλος σταματάει στο γκρι"

Ε: "το βέλος σταματάει στο κόκκινο"

Αποδίδουμε ως πιθανότητα καθενός από αυτά τα ενδεχόμενα το κλάσμα που δείχνει το μέρος του κύκλου που καλύπτεται με το συγκεκριμένο χρώμα:

P(Α) =$\frac{60^{ο}}{360^{ο}}=\frac{1}{6}$ , P(Β) =$\frac{100^{ο}}{360^{ο}}=\frac{5}{18}$ , P(Γ) =$\frac{40^{ο}}{360^{ο}}=\frac{1}{9}$ , P(Δ) =$\frac{110^{ο}}{360^{ο}}=\frac{11}{36}$ , P(Ε) =$\frac{50^{ο}}{360^{ο}}=\frac{5}{36}$

Η μοντελοποίηση αυτή ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις του αξιωματικού ορισμού.

Σε αυτό το παράδειγμα, το ενδεχόμενο "το βέλος σταματάει στη διαχωριστική γραμμή μεταξύ του κόκκινου και του πράσινου" δεν είναι κενό, αλλά η πιθανότητα να συμβεί είναι 0.

**Άσκηση 2**

**α)** Παρακάτω περιγράφεται ένα παιχνίδι (πείραμα τύχης) με αμερόληπτο κέρμα, για δύο παίκτες, την Άννα και τον Βασίλη.

Η Άννα κάνει 2 ρίψεις του κέρματος, στη συνέχεια κάνει 1 ρίψη ο Βασίλης και καταγράφεται το αποτέλεσμα των ρίψεων. Η Άννα κερδίζει αν φέρνει περισσότερες κεφαλές (Κ) από τον Βασίλη. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις κερδίζει ο Βασίλης. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει η Άννα; Είναι δίκαιο το παιχνίδι;

**β)** Τι θεωρείτε ότι θα συνέβαινε στην πιθανότητα να κερδίσει η Άννα στο προηγούμενο παιχνίδι, αν γίνονταν περισσότερες ρίψεις του νομίσματος (η Άννα κάνει ν+1 ρίψεις και ο Βασίλης ν ρίψεις);

Λύση

**α)** Στο παρακάτω δεντροδιάγραμμα οι δύο πρώτες ρίψεις είναι εκείνες που κάνει η Άννα και η τρίτη είναι του Βασίλη.

Κ

Κ

Γ

Κ

Γ

Γ

Κ

Γ Κ Γ Κ Γ Κ

Γ

Ο δειγματικός χώρος είναι   { , ,  , ,  , ,  , }

Το ενδεχόμενο "κερδίζει η Άννα" είναι   { , , , }

Άρα, Ρ(Α)=0,5. Οπότε, το παιχνίδι είναι δίκαιο.

**β)** Στην περίπτωση που η Άννα κάνει ν+1 ρίψεις και ο Βασίλης ν ρίψεις, θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: "η Άννα φέρνει περισσότερα Κ από τον Βασίλη", και Β: "η Άννα φέρνει περισσότερα Γ από τον Βασίλη".

Στο τέλος του παιχνιδιού, εφόσον η Άννα κάνει περισσότερες ρίψεις από τον Βασίλη, σίγουρα ένα από τα Α ή Β θα έχει συμβεί (δεν μπορεί η Άννα να μην ξεπέρασε ούτε τα Κ ούτε τα Γ του Βασίλη). Οπότε Α Β = Ω .

Επιπλέον, δεν μπορεί να συμβούν και τα δύο, εφόσον η Άννα κάνει μόνο μία περισσότερη ρίψη. Άρα, τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα: Α Β =  .

Προφανώς, τα Α και Β έχουν ίσες πιθανότητες να συμβούν (λόγω συμμετρίας).

Οπότε τελικά Ρ(Α) = Ρ(Β) = $\frac{1}{2}$

Δηλαδή το ενδεχόμενο να κερδίσει η Άννα έχει πιθανότητα 0,5, που σημαίνει ότι το

παιχνίδι είναι δίκαιο.

**ΕΝΟΤΗΤΑ 1.3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ**

**Λύσεις των Ασκήσεων**

**Άσκηση 1**

Το 50% των δωματίων ενός ξενοδοχείου έχουν τζάκι, το 20% έχουν καλοριφέρ και το 10% και τζάκι και καλοριφέρ. Επιλέγουμε τυχαία ένα δωμάτιο του ξενοδοχείου.

Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου το δωμάτιο που επιλέξαμε:

**α)** να μην έχει τζάκι,

**β)** να μην έχει ούτε τζάκι ούτε καλοριφέρ,

**γ)** να έχει μόνο τζάκι;

Λύση

Επιλέγουμε τυχαία ένα δωμάτιο. Ονομάζουμε τα εξής ενδεχόμενα: Α: «Το δωμάτιο που επιλέξαμε έχει τζάκι».

Β: «Το δωμάτιο που επιλέξαμε έχει καλοριφέρ». Τότε P(A) = 0,5 και P(B) = 0,2.

Το ενδεχόμενο «το δωμάτιο που επιλέξαμε έχει τζάκι και καλοριφέρ» γράφεται ως

ΑΒκαι είναι P(A  B)  0,1 .

**α)** Το ενδεχόμενο «το δωμάτιο που επιλέξαμε δεν έχει τζάκι» γράφεται ως A΄ και

P(A΄)  1  0,5  0,5 (από Π1).

**β)** Το ενδεχόμενο «το δωμάτιο που επιλέξαμε δεν έχει ούτε τζάκι, ούτε καλοριφέρ»

 γράφεται ως (Α  Β)΄ και P((Α  Β)΄)  P(A

Β) (από Π1).

P(A  B)  P(A)  P(B) P(A  B) , άρα P(A  B)  0,5  0,2  0,1  0,6 .

Έτσι, θα έχουμε P((Α  Β)΄)  1 P(A  B) =1—0,6=0,4.

**γ)** Το ενδεχόμενο «το δωμάτιο που επιλέξαμε έχει μόνο τζάκι» γράφεται ως Α Β. Από Π2: P(A)  P(A  B)  P(A  B) , άρα 0,5  0,1  P(A  B)  P(A  B)  0, 4 .

**Άσκηση 2**

Ας υποθέσουμε ότι Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δ.χ. Ω. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ή λάθος, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

**α)** Αν ισχύει ότι *P**A*  0,8 και *P**B*  0,1, τότε ισχύει ότι Β  Α , γιατί *P* *B*  *P*  *A* .

**β)** Αν

*P**A*  0,3 ,

*P* *B*  0,4

και

*P**A**B*  0,6

, τότε τα Α και Β δεν είναι

ασυμβίβαστα.

**γ)** Αν *P**A*  0,4 και *P* *B*  0,6 , τότε το συμπληρωματικό του Α είναι το Β.

**δ)** Ισχύει πάντα ότι *P* *A*  *P**B*  1.

**ε)** Ισχύει πάντα ότι *P**A*  *P**B* *P**A**B* 1.

**στ)** Αν ισχύει *P**A*  *P**B* 1,5, τότε τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

**ζ)** Αν ισχύει *P* *A*  *P**B*  1, τότε τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.

**η)** Ισχύει ότι *P**A**B* *P**A* .

Λύση

**α)** Λάθος. Δεν είναι απαραίτητα το ΒΑ . Π.χ. θα μπορούσαν τα Α και Β να είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.

Ας φανταστούμε το πείραμα τύχης "επιλέγομε τυχαία έναν φυσικό αριθμό από τους 1, 2, 3, …, 10". Είναι Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Αν ονομάσουμε

Α={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} και Β={9}, είναι Ρ(Α) = 0,8 και Ρ(Β) = 0,1 , χωρίς να είναι Β  Α .

**β)** Σωστή.

Από Π4 έχουμε ότι P(A  B)  P(A)  P(B) P(A  B), άρα 0,6  0,3  0,4P(A  B)  P(A  B)  0,1 , επομένως τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

**γ)** Λάθος. Θα μπορούσε να είναι σωστή μόνο στην περίπτωση που τα Α και Β ήταν ασυμβίβαστα. Για παράδειγμα, στο πείραμα του (α), αν ονομάσουμε Γ={1, 2, 3, 4} και

Δ={1, 2, 5, 6, 9, 10}, είναι Ρ(Γ) = 0,4 και Ρ(Δ)  0,6 συμπληρωματικά.

 χωρίς τα Γ και Δ να είναι

**δ)** Λάθος. Στην περίπτωση που τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα μπορεί να ισχύει

P(A)  P(B)  1 . Π.χ. αν P(A)  0,6 , P(B)  0,7 και P(A  B)  0,5 , τότε από Π4 έχουμε:

P(A  B)  P(A)  P(B) P(A  B)  P(A  B)  0,6  0,7  0,5  0,8 .

Σε αυτή την περίπτωση P(A)  P(B)  1,3 .

**ε)** Σωστή. Από Π4 ισχύει P(A  B)  P(A)  P(B)  P(A B) και P(A  B)  1 (από τον ορισμό της πιθανότητας). Άρα P(A)  P(B) P(A  B)  1 .

**στ)** Σωστή. Στην περίπτωση αυτή τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα. Γενικότερα, αν P(A)  P(B)  1 , τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα, εφόσον αν ήταν ασυμβίβαστα θα ήταν Ρ(Α Β) = Ρ(Α) + Ρ(Β) > 1 , που είναι άτοπο .

**ζ)** Λάθος. Δεν είναι απαραίτητο να είναι ασυμβίβαστα. Π.χ. βλέπε β), όπου P(A)+P(B)=0,7, ωστόσο τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

**η)** Σωστή, λόγω της Π3 καθώς Α Β  Α .

**Άσκηση 3**

Να απαντήσετε στα ίδια ερωτήματα με την εφαρμογή 2, αν αντί για τα ποσοστά που δίνονται, γνωρίζετε αυτή τη φορά ότι το Λύκειο έχει συνολικά 120 μαθητές/τριες, από

τους/τις οποίους/ες οι 32 συμμετέχουν στη θεατρική ομάδα, οι 28 στην ομάδα στίβου και 16 μαθητές/τριες συμμετέχουν και στις δύο ομάδες.

Λύση

Αν Α είναι το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει στην θεατρική ομάδα» και Β

«ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει στην ομάδα στίβου», τότε:

P(Α) = $\frac{32}{120}$ = $\frac{4}{15}$ και P(Β) = $\frac{28}{120}$ = $\frac{7}{30}$ .

Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει και στις δύο ομάδες» είναι το A B

$$Από τα δεδομένα του προβλήματος P(A  B) =\frac{16}{120}=\frac{2}{15}$$

**α)** Από το Π4, η πιθανότητα του ενδεχομένου Α Β είναι

P(A  B)  $\frac{4}{15} $ + $\frac{7}{30} $ − $\frac{2}{15}$ = $\frac{8}{30} $ + $\frac{7}{30} $ − $\frac{4}{30}$ = $\frac{11}{30}$

**β)** Από Π2 για την πιθανότητα του ενδεχομένου Α Β έχουμε:

$\frac{4}{15} $ = $\frac{2}{15}$ + P(A B) P(A B) = $\frac{4}{15} $ − $\frac{2}{15} $= $\frac{2}{15}$

**γ)** Πρώτα θα βρούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου», δηλαδή του ενδεχομένου Β  Α , από Π2:

P(B)  P(A  B)  P(B  A) $\frac{7}{30}$ = $\frac{2}{15}$ + P(B  A) P(B  A) = $\frac{7}{30}$ − $\frac{2}{15}$ = $\frac{7}{30}$ − $\frac{4}{30}$ = $\frac{3}{30}$ = $\frac{1}{10}$ = 0,1

Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει σε μία μόνο από τις δύο ομάδες» είναι

η ένωση των ασυμβίβαστων ενδεχομένων Α Β και Β  Α .

Σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο

 P((A B)  (B  A))  P(A B)  P(B  A) 

P((A B)  (B  A))  $\frac{2}{15} $+ 0,1 = $\frac{4}{30}$ + $\frac{3}{30} $= $\frac{7}{30}$

 **δ)** το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια δεν συμμετέχει σε καμία ομάδα» είναι το Α Β'

και από Π1 έχουμε ότι: P((A  B)΄)  1 P(A  B) −$ \frac{11}{30}$ = $\frac{19}{30}$

**Άσκηση 4**

Από τους/τις μαθητές/τριες της Β΄ τάξης ενός Λυκείου το 55% είναι μαθήτριες, το 40% παίζουν μπάσκετ και το 10% είναι μαθήτριες που παίζουν μπάσκετ. Επιλέγουμε τυχαία έναν/μια μαθητή/τρια.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες να είναι:

**α)** μαθήτρια ή να παίζει μπάσκετ,

**β)** μαθήτρια και να μην παίζει μπάσκετ,

**γ)** μαθητής και να παίζει μπάσκετ,

**δ)** μαθητής ή να παίζει μπάσκετ.

Λύση

Επιλέγουμε τυχαία ένα/μια μαθητή/τρια. Θεωρούμε τα εξής ενδεχόμενα: Κ: «μαθήτρια» με P(K)=0,55.

M: «ο/η μαθητής/τρια παίζει μπάσκετ» με P(M)=0,4.

«μαθήτρια που παίζει μπάσκετ»: ΚΜ με P(K  M)  0 ,1 .

**α)** Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου ΚΜ. Από Π4 έχουμε:

P(K  M)  P(K)  P(M) P(K  M)  P(K  M)  0, 55  0, 4  0,1  0,85 .

**β)** Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου Κ Μ . Από Π2 έχουμε:

P(K)  P(K  M)  P(K  M)  0, 55  0,1  P(K M)  P(K  M)  0, 45 .

**γ)** Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «μαθητής και να παίζει μπάσκετ», το οποίο είναι το ίδιο με το ενδεχόμενο «να μην είναι κορίτσι και να παίζει μπάσκετ», άρα ΜΚ. Από Π2: P(M)  P(M  K)  P(M K)  0, 4  0,1  P(M K)  P(M  K)  0,3 .

Ένας άλλος τρόπος να εκφράσουμε το ενδεχόμενο «μαθητής και να παίζει μπάσκετ» είναι ο εξής: Κ΄Μ. Άρα P(K΄ Μ)  0,3 .

**δ)** Θα βρούμε πρώτα την πιθανότητα να είναι μαθητής, δηλαδή Κ΄, με τη βοήθεια του Π1: P(K΄) = 1 – P(K) = 1 – 0,55 = 0,45.

Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «μαθητής ή να παίζει μπάσκετ», δηλαδή του ενδεχομένου Κ΄Μ. Άρα, P(Κ΄ Μ)  P(Κ΄)  P(M)  P(Κ΄ Μ) .

Με αντικατάσταση έχουμε P(Κ΄ Μ)  0,45  0,4  0,3  0,55 .

**Άσκηση 5**

Όλοι οι κάτοικοι μιας μικρής επαρχιακής πόλης έχουν συμβόλαιο κινητού τηλεφώνου. Το 47% των κατοίκων έχει συμβόλαιο με την εταιρεία FONATEL, το 35% των κατοίκων έχει συμβόλαιο με την TELEVIBE. Παίρνουμε τυχαία τηλέφωνο έναν κάτοικο της πόλης. Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο κάτοικος που πήραμε τηλέφωνο δεν έχει συμβόλαιο με καμία από τις FONATEL και TELEVIBE» είναι 23%.

Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου, ο κάτοικος που πήραμε τηλέφωνο:

**α)** να έχει συμβόλαιο με την FONATEL ή με την TELEVIBE,

**β)** να έχει συμβόλαιο και με τις δύο εταιρείες.

Λύση

Για το πείραμα τύχης που περιγράφεται στην άσκηση έχουμε τα εξής ενδεχόμενα: F: «ο κάτοικος που πήραμε έχει συμβόλαιο με την FONATEL»

T: «ο κάτοικος που πήραμε έχει συμβόλαιο με την TELEVIBE»

«ο κάτοικος που πήραμε δεν έχει συμβόλαιο με καμιά από τις FONATEL και TELEVIBE»:

(F  T)΄ .

Άρα P(F)  0,47 , P(T)  0,35 και P((F  T)΄)  0,23 .

**α)** Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου F  T .

Από Π1: P(F  T)  1 P((F  T)΄)  1  0,23  0,77 .

**β)** Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου F T .

Από Π4, P(F  T)  P(F)  P(T) P(F  T) και με αντικατάσταση έχουμε:

P(F  T)  0,47  0,35  0,77  0,05 .

**Άσκηση 6**

Από τον πληθυσμό μιας πόλης το 42% δεν έχουν κάνει ποτέ σκι, το 58% δεν έχουν ταξιδέψει ποτέ με αεροπλάνο, αλλά το 29% έχουν ήδη κάνει σκι και έχουν ταξιδέψει με αεροπλάνο. Αν πάρουμε τυχαία έναν κάτοικο της πόλης ποια είναι η πιθανότητα να μην έχει κάνει ποτέ σκι και να μην έχει ταξιδέψει ποτέ με αεροπλάνο;

Λύση

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

S: «ο κάτοικος έχει κάνει σκι»

A: «ο κάτοικος έχει ταξιδέψει με αεροπλάνο»

«ο κάτοικος έχει κάνει σκι και έχει ταξιδέψει με αεροπλάνο»: *S*A

Από τα δεδομένα έχουμε P(S΄)  0,42 , P(A΄)  0,58 και P(S  A)  0,29 .

Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο κάτοικος δεν έχει κάνει σκι, ούτε έχει ταξιδέψει με αεροπλάνο», δηλαδή (S  A)΄ .

Αρχικά βρίσκουμε τις πιθανότητες P(S)  1 P(S΄)  1  0,42  0,58 και

P(A) 1 P(Α΄)  1  0,58  0,42 .

Άρα P(S  A)  P(A)  P(S)  P(S  A)  0,42  0,58  0,29  0,71 .

Επομένως P((S  A)΄)  1  P(S  A)  1  0,71  0,29 .