

**Συνημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών**

**συν(α - β) = συνα∙συνβ + ημα∙ημβ**

**συν(α + β) = συνα∙συνβ - ημα∙ημβ**

**Ημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών**

**ημ(α+β) = ημα∙συνβ + συνα∙ημβ**

**ημ(α - β) = ημα∙συνβ - συνα∙ημβ**

**Εφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών**

****

**εφ(α + β) =**

****

**εφ(α - β) =**

**Συνεφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών**

****

**σφ(α + β) =**



**σφ(α - β) =**

**Λυμένες ασκήσεις**

**1)** Να απλοποιήσετε την παράσταση: συν(α+45ο)⋅συνα+ημ(α+45ο)⋅ημα.

**Λύση**

H παράσταση γίνεται:

συν(α+45ο)συνα+ημ(α+45ο)ημα=συν[(α+45ο)–α]=συν45ο=. . .

**2)** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

**α**) ημσυν+συνημ, **β**) συν12οσυν48ο–ημ12οημ48ο.



**Λύση**

**α**) Η παράσταση γίνεται:

ημσυν+συνημ=ημ=. . .



**β**) Η παράσταση γίνεται: συν12οσυν48ο–ημ12οημ48ο=

=συν(12ο+48ο)=συν60ο=. . .

**3)** Να απλοποιήσετε την παράσταση: .



**Λύση**

Η παράσταση γίνεται: =εφ=εφπ=. . .



**4)** Αν ημα=0,4 και συνβ=0,7 , να υπολογίσετε την παράσταση: ημ(α+β)+ημ(α–β).

**Λύση**

Έχουμε: ημ(α+β)+ημ(α–β)= ημα⋅συνβ+συνα⋅ημβ+ημα⋅συνβ**–**συνα⋅ημβ=

=2ημα⋅συνβ=2⋅0,4⋅0,7=**0,56**.

**5)** Αν εφα=2, να υπολογίσετε την παράσταση εφ(45ο–α).

**Λύση**

Έχουμε: εφ(45ο–α)= = = −

**6)** Αν α+β+γ=90ο (1), να δείξετε ότι: σφα+σφβ+σφγ = σφα⋅σφβ⋅σφγ.

**Λύση**

(1) α+β=90ο–γ σφ(α+β)=σφ(90ο–γ) =εφγ



= (σφασφβ−1)σφγ = σφα+σφβ



σφα⋅σφβ⋅σφγ − σφγ = σφα+σφβ σφα⋅σφβ⋅σφγ = σφα+σφβ+σφγ .

**7)** Αν α+β= (1) και εφα=, να υπολογίσετε την εφβ.



**Λύση**

(1) εφ(α+β)=εφ =1



και στη συνέχεια λύνουμε την τελευταία σχέση ως προς εφβ.

**8)** Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, αν ημΑσυνΒ+ημΒσυνΑ=1 (1) .

**Λύση**

(1) ημ(Α+Β)=1 ημ(Α+Β)=ημ90ο.

Επειδή πρόκειται για γωνίες τριγώνου προκύπτει ότι: Α+Β=90ο.

Οπότε: Α+Β+Γ =180ο 90ο+Γ =180ο Γ=90ο .

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ.

**9)** Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, αν ημΑσυνΒ–ημΒσυνΑ=0 (1) .

**Λύση**

(1) ημ(Α–Β)=0 ημ(Α–Β)=ημ0ο.

Επειδή πρόκειται για γωνίες τριγώνου προκύπτει ότι: Α–Β=0ο.

Οπότε: Α=Β.

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΓΑ=ΓΒ.

**10)** Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, αν ημΓ=2ημΑσυνΒ (1) .

**Λύση**

Ισχύει: Α+Β+Γ=180ο Γ = 180ο−(Α+Β) ημΓ=ημ[180ο−(Α+Β)]

ημΓ=ημ(Α+Β) (2) . Οπότε λόγω της (2) η δοσμένη σχέση (1) γράφεται:

ημ(Α+Β)=2ημΑσυνΒ ημΑσυνΒ+ημΒσυνΑ=2ημΑσυνΒ

ημΑσυνΒ+ημΒσυνΑ–2ημΑσυνΒ=0 ημΒσυνΑ–ημΑσυνΒ=0

−(ημΑσυνΒ−ημΒσυνΑ)=0 −ημ(Α–Β)=0 ημ(Α–Β)=0

Α–Β=0ο Α=Β το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΓΑ=ΓΒ.

**11)** Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 165ο.

**Λύση**

Έχουμε ότι: ημ165ο=ημ(120ο+45ο)=ημ120οσυν45ο+ημ45οσυν120ο=

= ημ(180ο−60ο)συν45ο +ημ45οσυν(180ο−60ο)=

= ημ60οσυν45ο+ημ45ο(–συν60ο)= .



Το συν165ο μπορούμε να το βρούμε από τον τύπο ημ2165ο +συν2165ο =1.

Την εφ165ο μπορούμε να τη βρούμε από τον τύπο εφ165ο=.



**12)** Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 15ο.

**Λύση**

Έχουμε: ημ15ο=ημ(45ο–30ο)=ημ45οσυν30ο–ημ30οσυν45ο=

**=**.



Οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί βρίσκονται κατά τα γνωστά.

**13)** Να υπολογίσετε τους αριθμούς **α**) ημ και **β**) συν.



**Λύση**

Επειδή έχουμε:



**α**) ημ=ημ=ημσυν+ ημσυν =



**β**) συν=συν=συνσυν−ημημ=



**14)** Να δείξετε ότι: συν(α+β)συν(α–β)=συν2α+συν2β–1.

**Λύση**

Έχουμε: συν(α+β)συν(α–β)=[συνα⋅συνβ–ημα⋅ημβ][συνα⋅συνβ+ημα⋅ημβ]=

=συν2ασυν2β–ημ2αημ2β= συν2ασυν2β–(1–συν2α)(1–συν2β)=

= συν2ασυν2β–(1–συν2β− συν2α + συν2ασυν2β)=

= συν2ασυν2β–1+συν2β+ συν2α − συν2ασυν2β= συν2α+συν2β–1.

**15)** Να λύσετε την εξίσωση: συνx⋅συν–ημx⋅ημ= (1)



**Λύση**

(1) συν(x+)=συν



( x+=2kπ+ (2) ή x+=2kπ– (3) , όπου κ∈Z )



Στη συνέχεια λύνουμε κατά τα γνωστά τις (2) και (3).