**ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ 2α**

**(1)**

**ημ2α = 2ημασυνα**

**συν2α = συν2α - ημ2α**

**(2)**

 **= 2συν2α - 1**

 **= 1 - 2ημ2α**



**(3)**

**Από τους τύπους (2) μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθ­μούς της γωνίας α, αν γνωρίζουμε το συν2α. Πράγματι, έχουμε:**

**⦁ συν2α = 2συν2α - 1 2συν2α = 1+συν2α**



**⦁ συν2α = 1 - 2ημ2α 2ημ2α = 1 - συν2α**



**⦁**

**+**

**Επομένως:**



**(4)**



**(5)**



**(6)**

**Παρατήρηση 1**

Βάζοντας στους τύπους (1), (2), (3) του διπλάσιου τα μισά των αντίστοιχων γωνιών προκύπτουν οι αντίστοιχοι τύποι για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας συναρτήσει των τριγωνομετρικών αριθμών του ημίσεως της γωνίας αυτής:

ημα = 2ημσυν , συνα = , εφα =

**Παρατήρηση 2**

Σε αρκετές περιπτώσεις είναι χρήσιμες οι σχέσεις:

**● (ημα+συνα)2** = ημ2α+συν2α+2ημα⋅συνα = **1+ημ2α**

**● (ημα–συνα)2** = ημ2α+συν2α–2ημα⋅συνα = **1–ημ2α**

**Λυμένες Ασκήσεις**

**1)** Αν ημα=, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α.

**Λύση**

Αφού γνωρίζουμε ότι: ημα=, από τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα: ημ2α+συν2α=1 βρίσκουμε ότι: συνα= ή συνα=− . Οπότε:

 Αν είναι συνα= , τότε:

●ημ2α=2ημα⋅συνα=2⋅⋅= (Θυμίζουμε ότι **δεν** ισχύει: ημ2α=2ημα)

●συν2α=2συν2α−1=2−1=2 $\frac{3}{4} $−1= $\frac{3}{2} $−1= $\frac{1}{2}$

●εφ2α = $\frac{ημ2α}{συν2α}$ = $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$ = $\sqrt{3}$

 ●σφ2α = $\frac{1}{εφ2α}$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

 Αν είναι συνα=− , εργαζόμαστε ανάλογα . . . .

**2)** Να υπολογίσετε το ημ15ο.

**Λύση**

Η γωνία α=15ο είναι το μισό της γωνίας 2α=30ο. Οπότε εφαρμόζοντας τον τύπο:

ημ2α = $\frac{1-συν2α}{2}$ για α=15ο έχουμε ότι:

ημ215ο==.

 Άρα και επειδή είναι ημ15ο > 0 προκύπτει ότι: ημ15ο== $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} $.

**3)** Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, αν 1–2ημ2=0.

**Λύση**

Εφαρμόζοντας τον τύπο: συνα = 1–2ημ2 $\frac{α}{2}$της **Παρατήρησης 1** έχουμε σύμφωνα και με την εκφώνηση ότι:

συνΑ=0 συνΑ=συν (αφού 0 < Α < π)

Α= το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α.

**4)** Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: 1–συνΑ=ημ, να βρείτε τη γωνία Α.

**Λύση**

Ο τύπος: συνα = 1–2ημ2 $\frac{α}{2}$της **Παρατήρησης 1** γράφεται: 1–συνα=2ημ2 $\frac{α}{2}$.

Άρα θέτοντας όπου α το Α προκύπτει ότι: 1–συνΑ=2ημ2, oπότε σύμφωνα και με την εκφώνηση έχουμε ότι:

2ημ2=ημ 2ημ2− ημ= 0 ημ(2ημ− 1) = 0

( είναι ημ≠ 0, διότι αν ήταν ημ= 0, τότε θα ήταν ημ= ημ0 = 0 ή = π, άτοπο )

2ημ− 1= 0 2ημ=1 ημ= ημ=ημ $\frac{π}{6}$

$\left\{\begin{array}{c}\frac{Α}{2}=2κπ + \frac{π}{6} ή\\\frac{Α}{2}=2κπ + π - \frac{π}{6}\end{array}\right. $ $\left\{\begin{array}{c}2∙\frac{Α}{2}=2∙2κπ + 2∙\frac{π}{6} ή\\2∙\frac{Α}{2}=2∙2κπ + 2π - 2∙\frac{π}{6}\end{array}\right. $ $\left\{\begin{array}{c}Α=4κπ + \frac{π}{3} ή\\Α=4κπ + 2π - \frac{π}{3}\end{array}\right. $

$\left\{\begin{array}{c}Α=4κπ + \frac{π}{3} ή \\Α=4κπ + \frac{5π}{3}\end{array}\right. $ , κ∈Z ( διότι είναι 0< Α< π )

 Α= $\frac{π}{3} $.

**4)** Να δείξετε ότι: .

**Λύση**

 Έχουμε ότι:

=εφα.

**Παρατήρηση**

Όταν εμφανίζονται όροι της μορφής **1+συν2α** ή **1–συν2α**, τότε από τις τρεις εκφράσεις του συν2α επιλέγουμε αυτή με την οποία θα γίνει απαλοιφή του 1.

**5)** Να δείξετε ότι: =σφα.

**Λύση**

Σύμφωνα και με την **Παρατήρηση** της προηγούμενης Άσκησης, έχουμε ότι: =σφα.

**6)** Να δείξετε ότι: .

**Λύση**

Επειδή στο δεύτερο μέλος υπάρχει μόνο η γωνία , θα μετατρέψουμε καταρχήν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α σε τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α και στη συνέχεια θα μετατρέψουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α σε τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας .

Έχουμε λοιπόν ότι:

=



 $\frac{2ημ\frac{α}{2}συν\frac{α}{2}}{2συν^{2}\frac{α}{2}}$ = $\frac{ημ\frac{α}{2}}{συν\frac{α}{2}}$ = εφ  .

**7)** Να λύσετε την εξίσωση: συν2x+συνx+1=0.

**Λύση**

Επειδή στο 1ο μέλος της εξίσωσης εμφανίζεται το συν2x+1, επιλέγουμε να αντικαταστήσουμε το συν2x με το 2συν2x–1, έτσι ώστε να γίνει απαλοιφή του 1.

Έχουμε λοιπόν ότι:

συν2x+συνx+1=0 2συν2x–1+συνx+1=0 2συν2x+συνx=0

συνx(2συνx+1)=0

( συνx=0 (1) ή 2συνx+1=0 συνx= – (2) )

Στη συνέχεια λύνουμε κατά τα γνωστά τις (1) και (2).

**8)** Να λύσετε την εξίσωση: συν2x+2=0.

**Λύση**

Παρατηρούμε ότι στην εξίσωση εμφανίζονται το συν2x και το συν2. Για τον λόγο αυτό θα τα μετατρέψουμε και τα δύο με τη βοήθεια του συνx ως εξής:

● Γνωρίζουμε καταρχήν από βασικό τύπο της παρούσας παραγράφου ότι:

συν2x=2συν2x–1 (1)

● Ακόμη από τους τύπους της **Παρατήρησης 1** έχουμε ότι:

συνx=2−1 2= συνx+1 (2)

Λόγω λοιπόν των (1) και (2) η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

(2συν2x–1)+ (συνx+1)=0 2συν2x+συνx=0 συνx(2συνx+1)=0

( συνx=0 (3) ή 2συνx+1=0 συνx= – (4) )

Στη συνέχεια λύνουμε κατά τα γνωστά τις (3) και (4).

**9)** Έστω η συνάρτηση f(x)=(ημx+συνx)2 , x∈r.

**α**) Να αποδείξετε ότι f(x)=1+ημ2x, για κάθε x∈r.

**β**) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .

**Λύση**

**α**) Για κάθε x∈r έχουμε ότι:

f(x)=(ημx+συνx)2= ημ2x+2ημx⋅συνx+συν2x=1+ημ2x.

**β**)

● Επειδή η περίοδος της συνάρτησης ημ2x είναι Τ = $\frac{2π}{2}$ = π, συμπεραίνουμε ότι και η περίοδος της f(x)=1+ημ2x είναι Τ=π.

● Επειδή η μέγιστη τιμή της συνάρτησης ημ2x είναι το 1, συμπεραίνουμε ότι η μέγιστη τιμή της f(x)=1+ημ2x είναι το 1+1=2.

Τη μέγιστη δε αυτή τιμή την παρουσιάζει η f(x) όταν:

ημ2x=1 ημ2x=ημ 2x=2κπ + **x=**κπ **+** $\frac{π}{4}$ , κ∈Z .

● Επειδή η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης ημ2x είναι το −1, συμπεραίνουμε ότι η ελάχιστη τιμή της f(x)=1+ημ2x είναι το 1+(−1) =0.

Την ελάχιστη δε αυτή τιμή την παρουσιάζει η f(x) όταν:

ημ2x= –1 ημ2x=ημ

( 2x=2κπ+ ή 2x=2κπ+π–)

( 2x=2κπ+ ή 2x=2κπ–)

( x=κπ + $\frac{3π}{4}$ ή x=κπ – $\frac{π}{4}$ ) , κ∈Z