**ΦΥΛΛΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ & ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

ΑΛΓΕΒΡΑ B’ ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ 4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ**

**⮚ Μορφή μονώνυμου :** α·xν

 α είναι ένας πραγματικός αριθμός και π.χ. 2x3, - 34 x5, 0x4, 2x

 ν ένας θετικός ακέραιος.

 Μονώνυμο επίσης είναι κάθε πραγματικός αριθμός

**⮚ Μορφή πολυωνύμου :** ανxν + αν-1xν-1 + … + α1x + α0

 αν, αν-1, …, α1, α0 είναι πραγματικοί αριθμοί και

 ν ένας θετικός ακέραιος. π.χ. 3x3 + 2x2 - x + 2,

 ⚫ Το x λέγεται **μεταβλητή** του πολυωνύμου 0x2 - 5x + 1,

 ⚫ Τα μονώνυμα ανxν, αν-1xν-1, …, α1x, α0  5x3 - 23 x2 + 0x + 13

 λέγονται **όροι** του πολυωνύμου

 ⚫ Οι αριθμοί αν, αν-1, …, α1, α0

λέγονται **συντελεστές** του πολυωνύμου

 ⚫ Ο α0  λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου

**⮚ Μηδενικό πολυώνυμο** : 0xν + 0xν-1 + … + 0x + 0

 Όλοι οι συντελεστές είναι 0 π.χ. 0x2 - 0x + 0 ή 0

**⮚ Σταθερό πολυώνυμο** : 0xν + 0xν-1 + … + 0x + α0

 Όλοι οι συντελεστές είναι 0

 εκτός του σταθερού όρου π.χ. 0x2 - 0x + 2 ή 2

**⮚ Ίσα πολυώνυμα :**

 Τα πολυώνυμα **αμxμ+ … +α1x+α0   και   βνxν+ … +β1x+β0, με μ≥ν , θα λέμε ότι είναι ίσα**

 όταν **α0 = β0, α1 = β1, …, αν = βν**

 **και   αν+1 = αν+2 = … = αμ = 0** π.χ. νx3 + μx2 - x + κ = 5x2 - λx + 2

 όταν ν = 0, μ = 5, λ = 1 και κ = 2

**⮚ Βαθμός πολυωνύμου :**

 Ο μεγαλύτερος εκθέτης του x π.χ. 3x3 + 2x2 - 0x + 2, 3ου βαθμού

 που δεν έχει συντελεστή 0. 0x2 - 5x + 1, 1ου βαθμού

 Τα σταθερά πολυώνυμα έχουν βαθμό 0 13, 0ου βαθμού

 ⚫ για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός

**⮚ Ονομασία - συμβολισμός πολυωνύμου :**

 Κάθε πολυώνυμο το συμβολίζουμε με ένα π.χ. P(x) = 3x3 + 2x2  + 2,

 κεφαλαίο γράμμα του αγγλικού αλφαβήτου και Q(x) = 5x9 - 23x4 + 0x + 13

 μέσα σε παρένθεση γράφουμε τη μεταβλητή του. R(w) = - $\frac{3}{7} $w8 – 14w5 + $\sqrt{11}$w – 1,9

**⮚ Αριθμητική τιμή** ή απλούστερα **τιμή** **πολυωνύμου :**

ο πραγματικός αριθμός που προκύπτει π.χ. P(x) = 3x3 + 2x2 + 2, P(1) = 3·13 + 2·12 + 2 = **7**

αν αντικαταστήσουμε σε ένα πολυώνυμο Q(x) = 2x3 - 3x2 + 1, Q(2) = 2·23 - 3·22 + 1 = **5**

το x με έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό.

**⮚ Ρίζα πολυωνύμου :**

Η τιμή του x, για την οποία η π.χ. P(x) = x2  - 5x + 6,

αριθμητική τιμή του πολυωνύμου είναι 0 P(**2**) = 22  -5·2+ 6 = 4 – 10 +6 = **0**

 άρα το x = **2** είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x)

**ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ:**

● Το σταθερό πολυώνυμο c έχει τιμή c για όλες τις τιμές του x και

● Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x

**⮚**  Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι:

● Αν ένα πολυώνυμο έχει τιμή c για όλες τις τιμές του x, τότε αυτό είναι το σταθερό πολυώνυμο c και

● Αν δυο πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x, τότε τα πολυώνυμα αυτά είναι ίσα.

**Πράξεις μεταξύ πολυωνύμων**

**⮚ Πρόσθεση πολυωνύμων :**

**1.** (x3 + 2x2 - 5x + 7) + (4x3 - 5x2 + 3) =  x3 + 2x2 - 5x + 7 + 4x3 - 5x2 + 3

 =  (1 + 4)x3 + (2 - 5)x2 - 5x + (7 + 3)

 =  5x3 - 3x2 - 5x + 10      [Πολυώνυμο 3ου βαθμού]

**2.**  (2x3 - x2 + 1) + (-2x3 + 2x - 3) =  2x3 - x2 + 1 - 2x3 + 2x - 3

 =  -x2 + 2x - 2       [Πολυώνυμο 2ου βαθμού]

**⮚ Αφαίρεση πολυωνύμων :**

**1.** (x3 - 3x2 - 1) - (x3 - 3x2 - 1)  =  x3 - 3x2 - 1 - x3 + 3x2 + 1 = 0

 [Μηδενικό πολυώνυμο]

**2.** (x3 + 2x2 - 5x + 7) - (4x3 - 5x2 + 3)  =  x3 + 2x2 - 5x + 7 - 4x3 + 5x2 - 3

 =  -3x3 + 7x2 - 5x + 4       [Πολυώνυμο 3ου βαθμού]

**⮚ Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων :**

**1.** (x2 + 5x)(2x3 + 3x - 1)  =  x2(2x3 + 3x - 1) + 5x(2x3 + 3x - 1)

 =  2x5 + 3x3 - x2 + 10x4 + 15x2 - 5x

 =  2x5 + 10x4 + 3x3 + 14x2 - 5x       [Πολυώνυμο 5ου βαθμού]

**⮚** Για το βαθμό του αθροίσματος και του γινομένου δυο πολυωνύμων αποδεικνύεται ότι:

●  Αν το άθροισμα δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο βαθμός του είναι ίσος ή μικρότερος από το μέγιστο των βαθμών των δυο πολυωνύμων.

●  Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

**Σημείωση:** Η διαίρεση πολυωνύμων θα αναλυθεί στην επόμενη παράγραφο.

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**1.**  **Να βρεθούν οι τιμές του λ ∈ R για τις οποίες το πολυώνυμο**

 **P(x) = (λ2 - 1)x3 + (λ2 - 3λ + 2)x + λ - 1 είναι το μηδενικό πολυώνυμο.**

Απάντηση: πρέπει **λ2 – 1 = 0**

 **και λ2 - 3λ + 2 = 0 η κοινή λύση είναι λ = 1**

 **και** **λ – 1 = 0**

**2.** **Να βρεθούν οι τιμές του λ ∈ R για τις οποίες τα πολυώνυμa**

 **P(x) = λ2x3 + (λ - 2)x2 + 3 και Q(x) = (5λ - 6)x3 + (λ2 - 4)x2 + λ + 1 είναι ίσα.**

Απάντηση: πρέπει **λ2 = 5λ – 6  λ2 - 5λ + 6 =0**

 **και λ – 2 = λ2 - 4  λ2 – λ -2 = 0 η κοινή λύση είναι λ = 2**

 **και** **3= λ + 1  λ = 2**

**3.**  **Να βρεθούν οι τιμές του μ ∈ R για τις οποίες το πολυώνυμο**

 **P(x) = (4μ3 - μ)x3 + 4(μ2 -**$\frac{1}{4}$**)x - 2μ + 1 είναι το μηδενικό πολυώνυμο.**

Απάντηση: πρέπει **4μ3 - μ = 0  μ(4μ2 – 1) = 0  ……………………**

 **και μ2 -**$\frac{1}{4}$ **= 0  ………………………….**

 **και** **……………… = 0  ………………………….**

 **η κοινή λύση είναι μ = …….**

**4.** **Να βρεθούν οι τιμές του α ∈ R για τις οποίες τα πολυώνυμa**

 **P(x) = (α2 - 3α)x3 + x2 + α και Q(x) = -2x3 + α2x2 + (α3 - 1)x + 1 είναι ίσα.**

Απάντηση: πρέπει **α2 - 3α = -2  ………………………………**

 **και 1 = ………….  ……………………………..**

 **και …. = …………  ………………………………**

 **και** **α = ………  ………………………………**

 **η κοινή λύση είναι α = ……..**

**5.** **Δίνονται τα πολυώνυμα P(x) = x2 - 5x + 2 και Q(x) = x3 + 3x + 1. Να βρεθούν τα πολυώνυμα:**

 **i) P(x) + Q(x) ii) 2P(x) - 3Q(x) iii) P(x)·Q(x) iv) [P(x)]2**

Απάντηση:

**i) P(x) + Q(x) = (x2 - 5x + 2) + (x3 + 3x + 1) = ……………………………………………………………………………….**

**ii) 2P(x) - 3Q(x) = 2·(x2 - 5x + 2) - 3·(…………………………..) = ……………………………………………………….**

 = ……………………………………………………………………………………………………………………………..

**iii) P(x)·Q(x) = (x2 - 5x + 2) · (x3 + 3x + 1) = …………………………………………………………………………………**

 = ……………………………………………………………………………………………………………………………..

**iv) [P(x)]2 = (x2 - 5x + 2)2 = (x2 - 5x + 2) ·(x2 - 5x + 2) = …………………………………………………………..**

 = ……………………………………………………………………………………………………………………………..

**6.** **Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς, που δίνονται με τα παρακάτω πολυώνυμα, είναι ρίζες τους.:**

**i) P(x) = 2x3 - 3x2 + 2x + 7, x = -1, x = 1**

**ii) Q(x) = -x4 + 1 x = -1, x = 1 x = 3.**

Απάντηση:

**i) P(x) = 2x3 - 3x2 + 2x + 7, τότε :**

 **P(-1) = 2(-1)3 - 3(-1)2 + 2(-1) + 7 = - 2 – 3 – 2 + 7 = 0 το x = -1 είναι ρίζα του P(x)**

 **P(1) = 2·13 - 3·12 + 2·1 + 7 = 2 – 3 + 2 + 7 = 8 το x = 1 δεν είναι ρίζα του P(x)**

**ii) Q(x) = -x4 + 1, τότε :**

 **Q(-1) = -(-1)4 + 1 = …………………………………………………. το x = -1 …..…..……. ρίζα του P(x)**

 **Q(1) = -14 + 1 = …………………………………………………. το x = 1 …..…..………. ρίζα του P(x)**

 **Q(3) = -34 + 1 = …………………………………………………. το x = 3 …..…..………. ρίζα του P(x)**

**7.** **Να βρείτε για ποιες τιμές του k ∈ R το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου**

 **P(x) = x3 - kx2 + 5x + k**

Απάντηση:

 Για να είναι το 2 ρίζα του **P(x)** πρέπει το **P(2) = 0 . Δηλαδή**

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………