

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γυμνασίου

Άλγεβρα

Κεφάλαιο 1^ο

Αλγεβρικές Παραστάσεις





ΜΑΘΗΜΑ Α1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε στην κατακόρυφη στήλη να προκύψει το έτος γέννησής σας.
- $$\begin{aligned} -5 + 12 - 3 \dots &= \square \\ 3 - 9 - 1 \dots &= \square \\ 2(-3) - 4 \dots &= \square \\ -4(-3) + 7 \dots &= \square \end{aligned}$$
- 2) Να γίνουν οι πράξεις:
- $$\alpha) -3 - (-2 + 3 - 7) - (7 + 2 - 5) \quad , \quad \beta) -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{7}{12}\right) - \left(-\frac{-5}{-24}\right)$$
- 3) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $-\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - 1\right) + \left(-2 + \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right)$
- 4) Να γίνουν οι πράξεις:
- $$\alpha) 3 + (-14) : (+7) - (-3)(-4) \quad , \quad \beta) 6 : (-3) - (-5) \cdot (-10) - (-2) \cdot (+3) - 15 \cdot 0$$
- $$\gamma) -(-7) \cdot (-3 - 5) \cdot (-7 + 6) - (-1)(-2)(-3)(-12 + 12)$$
- 5) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
- $$\left(-2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - \left(2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$
- 6) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
- $$\alpha) \frac{-2 \cdot \frac{1}{3} + 1}{2 - \frac{1}{8}} \quad , \quad \beta) \frac{\frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{3}\right) + 2}{-5 - \frac{1}{2} : (-4)}$$
- 7) Αν οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι να βρείτε την τιμή της παράστασης:
- $$-\left(\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta}{5} - 1\right) + (-2\alpha)(-3\beta)$$
- 8) Να αποδείξετε την παρακάτω ισότητα:
- $$6(12:4 - x - y) - 3(4 - 2x - 2y) = 6$$
- 9) Αν $\alpha + \beta = -2$ και $\beta - \gamma = 5$, να υπολογίσετε την παράσταση:
- $$K = -8(2 - \beta) - 3(\beta - \gamma) + 3\alpha - 5\gamma$$
- 10) Αν οι αριθμοί $\beta - 2\alpha + \delta$ και $2\alpha - \beta + \gamma$ είναι αντίθετοι να αποδείξετε ότι και οι αριθμοί γ και δ είναι αντίστροφοι.



ΜΑΘΗΜΑ Α1.1 Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να γράψετε καθεμιά από τις παρακάτω παραστάσεις ως μια δύναμη:

- 1) α) $2^{12} \cdot 2^5$, β) $(-2)^1 \cdot (-2)^5 \cdot (-2)^4$, γ) $(-2)^{10} : (-2)^6$, δ) $\frac{(-2)^4 \cdot (-2)^7}{(-2)^3 \cdot (-2)^5}$
ε) $2^{12} \cdot 2^{-6}$, στ) $(-2)^1 \cdot (-2)^{-5} \cdot (-2)^4$, ζ) $(-2)^{10} : (-2)^{-6}$, η) $\frac{(-2)^{-4} \cdot (-2)^7}{(-2)^3 \cdot (-2)^{-5}}$

Να γράψετε καθεμιά από τις παρακάτω παραστάσεις ως μια δύναμη:

- 2) α) $(2^{12})^3$, β) $[(-2)^1]^3 \cdot [(-2)^5]^{-2} \cdot (-2)^{-7}$, γ) $(-2^3)^{11} : (-2^5)^6$, δ) $\frac{(-2)^4 \cdot [(-2)^7]^{-2}}{[(-2)^{-2}]^3 \cdot ((-2)^{-3})^5}$

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

- 3) $A = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \frac{2^{100}}{2^{98}} - \frac{(-2)^{35}}{(-2)^{32}}$, $B = \frac{(+100)^3}{(-50)^3} - \frac{(-12)^4}{(-6)^4} - \frac{(-23)^{-5}}{(-46)^{-5}}$

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

- 4) α) $3x^3 \cdot 2x^{-1}$, β) $-2x^{-5} \cdot 3x^4 \cdot 5x$, γ) $(-2x^3y^2) \cdot \left(-\frac{3}{2}xy^{-2}\right)$
δ) $\left(-\frac{7}{2}x^3y^7\omega^5\right) \cdot \left(-\frac{2}{21}xy\omega^{-4}\right)$, ε) $\left(-\frac{3}{2}a^2b^{-2}\gamma\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}a\beta\gamma\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}a^{-3}\beta^3\gamma\right)$

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

- 5) α) $(-3x^3)^2$, β) $(-2x^{-4})^{-1} : 8x^4$, γ) $(-2x^3y^2) : \left(-\frac{1}{2}x^3y^{-5}\right)$
δ) $\left(-\frac{3}{2}x^3y^7\omega^5\right)^2 : \left(-\frac{2}{21}xy\omega^{-4}\right)$, ε) $\left(-\frac{2012}{2}a^2b^{-2}\gamma\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}a\beta\gamma\right) : \left(-\frac{2012}{5}a^{-3}\beta^3\gamma\right)$

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

- 6) $A = 1 - (-3)^3 - 3^2 - (-3)^2$, $B = -2(-3)^2 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{2^{-1}}\right) \cdot 2^2 - 8 \cdot (-2)^{-2}$

- 7) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 9$ όταν $x = -2$

- 8) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = 3^x - 3^{x+1} - 3^{x-1} - x^4$ όταν $x = -1$

Αν οι αριθμοί a και β είναι αντίστροφοι να βρείτε την τιμή της παράστασης:

- 9) $A = (5a^{-2}\beta)^3 \cdot \left(-\frac{1}{5}a^2\beta^{-1}\right)^2 \cdot 2a^3$



ΜΑΘΗΜΑ Α1.1 Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

1) $A = 2\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{75}$, $B = 2(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{7})^2 + (\sqrt{3})^4$
 $\Gamma = \sqrt{121} - \sqrt{225} + \sqrt{625}$, $\Delta = \sqrt{(-13)^2} - \sqrt{144} + \sqrt{1^{2014}}$

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

2) $A = \sqrt{18} - \sqrt{12} + \sqrt{16}$, $B = \sqrt{8\sqrt{1} + \sqrt{9}}$, $\Gamma = \sqrt{\sqrt{625}}$
 $\Delta = \sqrt{\frac{121}{64}} + \sqrt{\frac{25}{49}}$, $E = \sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$, $Z = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} + \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

3) $A = \sqrt{4 + \sqrt{29 - \sqrt{6 + \sqrt{100}}}}$, $B = \sqrt{115 + \sqrt{34 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}}$

Να κάνετε τις πράξεις:

4) α) $\sqrt{2} \cdot (2\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{6}$, β) $\sqrt{3} \cdot (5\sqrt{12} - \sqrt{27})$, γ) $(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})$

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

5) α) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{5}}$, β) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{20}}$, δ) $\frac{\sqrt{45} : \sqrt{5}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}}$, β) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{48} + \sqrt{12}}{\sqrt{300}}$

Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα, σε ισοδύναμα με ρητούς παρονομαστές:

6) α) $\frac{2}{\sqrt{2}}$, β) $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, γ) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$, δ) $\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{32}}{\sqrt{18}}$, γ) $\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{3}{\sqrt{2}}$

Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ και $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ είναι αντίστροφοι.

7) Να τρέψετε το κλάσμα $\frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

Να λύσετε τις εξισώσεις:

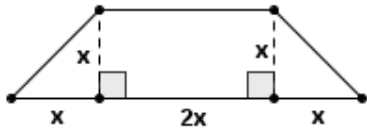
8) α) $7\sqrt{3} + 12x = \sqrt{12} + 2x$, β) $(2\sqrt{2} + \sqrt{32})x = \sqrt{50}$, γ) $x\sqrt{12} - 5 = 2x\sqrt{3}$



ΜΑΘΗΜΑ Α1.2 Αλγεβρικές παραστάσεις - Μονώνυμα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Να βρείτε ποιες από τις παραστάσεις είναι μονώνυμα.
 $1 - x^3y^2$, $-x^3y^2$, $(1 - \sqrt{2})x^5yz$, $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot x^3y^2$, $\frac{2}{3}x^{-3}y^2$, $2x^3 + y^2$
- 2) Να βρείτε τρεις ομάδες ομοίων μονωνύμων από τα παρακάτω:
 x^3y^2 , $-xy^2$, 3 , $\frac{3}{2}y^2x^3$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $5y^2x$, $\frac{y^2x^3}{7}$
- 3) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:
 $x^3y^2 + 2y^2x - xy$ όταν $x = -3$ και $y = -1$
- 4) Για ποια τιμή του λ η αλγεβρική παράσταση $(4\lambda - 3)x^5y^7z$ είναι το μηδενικό μονώνυμο
- 5) Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή $-\frac{5}{2}$ και μεταβλητές a και β .
Να βρείτε το μονώνυμο αν ο βαθμός του ως προς a είναι 3 και ως προς β και β είναι 7.
- 6) Το μονώνυμο $(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2) \cdot a^2\beta^{\kappa}\gamma^{\kappa-2}$ είναι βαθμού 8ου ως προς a , β και γ .
Να βρείτε το κ και να γράψετε το μονώνυμο σε απλούστερη μορφή.
- 7) Να βρείτε την τιμή του v , ώστε το μονώνυμο $2x^2y^v$
α) να είναι 7ου βαθμού ως προς y
β) να είναι 7ου βαθμού ως προς x και y
γ) να έχει αριθμητική τιμή 72 όταν $x = -2$ $y = -3$
- 8) Να βρείτε το μονώνυμο που εκφράζει την περίμετρο του διπλανού τραπεζίου.
Ποια η τιμή της περιμέτρου όταν $x = 3\text{cm}$.





ΜΑΘΗΜΑ Α1.2 Πράξεις με μονώνυμα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να κάνετε τις πράξεις:

- α) $15a + 3a - 10a$, β) $12x - 10x + 3x$, γ) $-\frac{3}{2}xy + \frac{1}{2}xy$
1) δ) $-\frac{5}{3}x^2y^3 + \frac{1}{3}y^3x^2 + \frac{1}{3}x^2y^3$, ε) $\frac{2}{5}xy - yx + \frac{1}{10}xy - \frac{1}{2}xy$
στ) $2\sqrt{2} \cdot a^2\beta + \sqrt{2} \cdot \beta a^2 - \sqrt{18} \cdot a^2\beta$, ε) $-5\sqrt{3}x^2 - \sqrt{27}x^2 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^2$

Να βρείτε τα γινόμενα:

- α) $2a(-3a)$, β) $-2a^2(-3a^3)$, γ) $-\frac{2}{3}xy \cdot \left(-\frac{1}{2}xy\right)$,
2) δ) $-\frac{\sqrt{2}}{3}x^3y^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}xy\right)$, ε) $(-4x)(3x^2)(-x)$, στ) $(2\sqrt{2}x^2)(-\sqrt{2}x^3)$
ζ) $\left(-\frac{4}{3}x^3y\right) \cdot \left(\frac{15}{16}xy^3\right)$, η) $(\sqrt{2}a^2\beta\gamma)(-\sqrt{2}a\beta^2\gamma)(-2a\gamma^2\beta)$

Να βρείτε τα πηλικά:

- α) $-2a^2:(-3a)$, β) $2a^7:(-4a^{10})$, γ) $-\frac{2}{3}x^2y : \left(-\frac{2}{9}xy^3\right)$
3) δ) $10xy^3:5x^3y$, ε) $20a^4 : (-5a\beta\gamma)$, στ) $\frac{6x^2y^3z}{2xy^3z^2}$

Να κάνετε τις πράξεις:

- α) $(2a^2\beta^3\gamma)^2$, β) $(2a)^2 \cdot 3a$, γ) $-\frac{3}{2}(xy^2)^2 + \frac{1}{2}x^2y^4$
4) δ) $(2a^2\beta\gamma)^3 \cdot (a\beta^2\gamma) \cdot a\beta\gamma$, ε) $(-4a^2\beta\gamma)^3 : (\sqrt{2}a\beta^2\gamma)^2$

- 5) Να γράψετε ως ένα μονώνυμο την παράσταση $A = \frac{2x^2y^3z + 3x^2y^3z}{5xyz - 2xyz}$

Να γράψετε ως ένα μονώνυμο την παράσταση

- 6) $B = -\frac{2}{7}x^2y \cdot \left(-\frac{7}{2}xy^2\right) + 3x^3y^3 - (2xy)^3$

Να κάνετε τις πράξεις:

- 7) α) $(-2x^2)^3 + (-x^3)^2 + 12x^6$, β) $(-2x^2)^2 : x^3 + (-2x) + 12 \cdot \frac{x^6y}{x^5y}$



ΜΑΘΗΜΑ Α1.3 Πολυώνυμο – Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Αν $P(x) = -2x^3 + 3x^4 - 3x - 5x^2 + 7$
α) να γράψετε το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x
β) να βρείτε το $P(1)$ και το $P(-2)$
- 2) Δίνεται το πολυώνυμο $A(x) = -2x^2y + 3y^2x^2 - 3xy^3 + x^3y$
α) να γραφεί κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x
β) να γραφεί κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του y
γ) να βρείτε το βαθμό του ως προς x , ως προς y και ως προς x και y
- 3) Να κάνετε τις αναγωγές ομοίων όρων:
α) $2x + 3y - 5 + 3x - 2y$, β) $-5x^2 + 5x + 7 - 3x - 2x^2 + 3$
γ) $-3x^3y + 2y^2x^2 - 7yx^3 + 2y^3x - 11 + 2y^2x^2 - 35$
- 4) Να κάνετε τις αναγωγές ομοίων όρων:
α) $5a - (2a - 1) + (9 - 3a) - (-7a - 3)$, β) $5a - 3\beta - [3\alpha - (\beta - 2\alpha)] - 2\beta$
γ) $3x^2 - x + 5 - (x^3 + 3x^2 + 2x - 1)$, δ) $1 + \left(\frac{1}{3}a^2 - a\right) - \left(\frac{1}{6}a - a^2 - 3\right)$
ε) $3xy^2 - (x^2y - 2xy) + (-2xy^2 + xy) - (3x^2y - xy)$
στ) $-\frac{5}{2}xy^2 - \left(-\frac{1}{2}xy^2\right) + \frac{2}{3}x^2 + \left(-\frac{3}{2}x^2y\right) - \left(+\frac{1}{4}x^2y\right) + \frac{x^2}{3}$
ζ) $12\alpha + 5\beta - 3\gamma - [(23\alpha - 13\beta + 2\gamma) - (\alpha + 2\beta + 4\gamma)] - (-\alpha + \beta - \gamma) + (2\alpha - 3\beta + 4\gamma)$
- 5) Αν $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - x - 5$ και $Q(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x - 2$ να βρείτε τα πολυώνυμα $P(x) + Q(x)$ και $P(x) - Q(x)$.
- 6) Αν $P(x) = 1 - (x - 3x^2) - 2x + x^2$ και $Q(x) = \alpha x^2 + \beta x - \gamma$ να βρείτε τα α , β και γ ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.
- 7) Αν $A(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $B(x) = -x^3 + 2x - 1$ και $\Gamma(x) = x^2 + 2x$ να βρείτε τα πολυώνυμα $A(x) + B(x)$, $A(x) + B(x) - \Gamma(x)$ και $A(x) - B(x) + \Gamma(x)$.
- 8) Αν $P(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ να αποδείξετε ότι $P(-x) = P(x)$.
- 9) Αν $P(x) = x^2 + 2x - 3$ να βρείτε τα πολυώνυμα $P(2x)$ και $P(x^2)$.



ΜΑΘΗΜΑ Α1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρείτε τα γινόμενα:

- 1) α) $5(2a-1)$, β) $5a(2a-1)$, γ) $-2(2x-3)$, δ) $x(2x^2-3x+1)$
ε) $-3x(x^2-2x+4)$, στ) $5x^2(2x^2-3x+7)$, ζ) $3(-2x^2+x)-3x(-2x-10)$

Να κάνετε τις πράξεις:

- 2) α) $3x(x-2)+5(x^2-x)-x$, β) $1-2x^2(3x-1)-(-x)(3x-5)$
γ) $xy^2(x+y-2)+3xy(2xy-y^2+1)$, δ) $4a^2\beta-2a(a-3\beta)\beta+(2a-\beta)(-2a)^2$
ε) $6x\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right)+4\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x\right)-\frac{2}{3}x\left(\frac{3}{2}x+1\right)+\frac{2x}{3}$

Να κάνετε τις πράξεις:

- 3) α) $(x-2)(x+1)$, β) $(3x-1)(-x+3)$
γ) $(2x-3)(3x+2)$, δ) $(x-1)(x^2+x+1)$
ε) $(2x-5)(-2x^2-4x+1)$, στ) $(x^2y-xy)(xy^2+3xy+2x)$

- 4) Να αποδείξετε ότι: $(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)-(\beta-\alpha)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=0$

Να κάνετε τις πράξεις:

- 5) α) $(x-1)(x+2)(x-2)$, β) $(3x-1)(-x+3)(x+3)$
γ) $-3x(2x+5)(2x-5)$, δ) $(2x-3)(3x-2)(x+5)$
ε) $(x^2-x-1)(x^2+2x-3)$, στ) $(x-1)(x^2-2x+3)(3x^2+2)$

Να κάνετε τις πράξεις:

- 6) α) $3x(x^2-2x+1)(x-1)-3x^2(x+2)(x+1)$
β) $6x^2y(3xy-9x^2y)-4xy(x+1)(y+2)$
γ) $(-x^3+5x^2+x)(-2x^2+3x)-(5x-7x^2)(-3+4x-6x^2+x^3)$
δ) $(2x-3)(2x+3)(x-1)(x+1)$, στ) $(2x-3)(3x+2)(x-2)(2x+1)$

- 7) Αν $P(x) = 3(x+1)(-x+1)2x$ και $Q(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x + \delta$, να βρείτε τις τιμές των α , β , γ και δ ώστε $P(x) = Q(x)$.

- 8) Να κάνετε τις πράξεις στην παράσταση $(2x-3)(x^2-x+1)-(x-2)(x^2-1)+2x^3$
Κατόπιν να βρείτε την αριθμητική τιμή της όταν $x = -1$.



ΜΑΘΗΜΑ Α1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι ταυτότητες;
 $2x = 4$, $x^2 - 1 = 0$, $4x + 2 = 2 + 4x$, $x^3 \cdot x^4 = x^7$

2) Να χαρακτηρίσετε Σωστή ή Λάθος κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση	Σωστό	Λάθος
$(-\alpha + \beta)^2 = (-\alpha)^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$		
$(-\alpha + \beta)^2 = (-\alpha)^2 + 2(-\alpha)\beta + \beta^2$		
$(-\alpha - \beta)^2 = -\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2$		
$(-\alpha - \beta)^2 = (-\alpha)^2 + 2(-\alpha)(-\beta) + (-\beta)^2$		
$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$		
$(2\alpha - 5)^2 = 4\alpha^2 - 10\alpha + 25$		
$(9x - 3)^2 = 81x^2 - 9$		

3) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

- α) $(x+1)^2$ β) $(y+3)^2$ γ) $(2a+5)^2$ δ) $(2y+3x)^2$
 ε) $\left(a + \frac{2}{a}\right)^2$ στ) $(y^2+2)^2$ ζ) $(x^4+x)^2$ η) $(2x^2+5x^3)^2$
 θ) $(2x+\sqrt{6})^2$ ι) $(2\sqrt{x}+5\sqrt{y})^2$ ια) $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{7}\right)^2$ ιβ) $(x^2y+xy^2)^2$

4) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

- α) $(x-1)^2$ β) $(y-5)^2$ γ) $(2\omega-3)^2$ δ) $(8y-7x)^2$
 ε) $\left(a - \frac{3}{a}\right)^2$ στ) $(y^2-4)^2$ ζ) $(x^4-9x)^2$ η) $(3x^5-5x^3)^2$
 θ) $(x-\sqrt{2})^2$ ι) $\left(2\sqrt{x} - \frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2$ ια) $\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)^2$ ιβ) $\left(2x^2y - \frac{1}{2}xy^2\right)^2$

5) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

- α) $(-x-1)^2$ β) $(-y+11)^2$ γ) $(-2\omega+\sqrt{3})^2$ δ) $(-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$
 ε) $(-3x+y)^2$ στ) $(-3y^2-5)^2$ ζ) $(-2+xy\sqrt{3})^2$ η) $(-2\sqrt{x}-\sqrt{12})^2$

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

6) α) $(x+1)^3$ β) $(y+4)^3$ γ) $(2a+3\beta)^3$ δ) $(x^2+2)^3$
ε) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^3$ στ) $(y^2+y)^3$ ζ) $(x^4+y^5)^3$ η) $(2x^2+\sqrt{2})^3$

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

7) α) $(x-2)^3$ β) $(y-5)^3$ γ) $(2a-1)^3$ δ) $(2x-3y)^3$
ε) $(y^2-4)^3$ στ) $(y^2+2y)^3$ ζ) $(x^3-y^4)^3$ η) $(4x^4-\sqrt{3})^3$

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

8) α) $(x-1)(x^2+x+1)$ β) $(x-3)(x^2+3x+9)$
γ) $(y+2)(y^2-2x+4)$ δ) $(2\omega+1)(4\omega^2-2\omega+1)$
ε) $(2x+7y)(2x-7y)$ στ) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$
ζ) $(2x^2+3y^3)(2x^2-3y^3)$ η) $(\sqrt{x}-x^5)(\sqrt{x}+x^5)$

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

9) α) $(x-1)(x+1)$ β) $(y+3)(y-3)$
γ) $(3-\omega)(3+\omega)$ δ) $(x-y)(-x-y)$
ε) $(x^2-5)(x^4+5x+25)$ στ) $(x^3+x^2)(x^6-x^5+x^4)$

Να βρείτε τα ισοδύναμα των παρακάτω κλασμάτων με ρητό παρονομαστή:

10) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$, $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$, $\frac{5}{3+\sqrt{2}}$, $\frac{12}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

11) α) $(x+y+1)^2$, β) $(x-y+3)^2$, γ) $(2\alpha-3\beta+5)^2$, δ) $(3x-y^2-4)^2$

Να κάνετε τις πράξεις:

12) α) $(x+y)^2-(x-2y)(x+2y)+(2x-y)^2$, β) $(x^2-1)^2-(x^2-2)(x^2+2)$
γ) $(x-4)^2-(2x+5)^2$, δ) $(3\alpha+2)^3-(3\alpha-2)^2$
ε) $(\alpha-\beta)^3+(\alpha+\beta)^3+3(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)+3(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^2$
ζ) $(-x+3x^2)^3-3(3x^3-x^2)^2$, η) $(\alpha-1)^3-2(3\alpha+2)^3-a(a+2)(a-2)$
θ) $(x+y)^3-y(x-y)(x+y)+x(x-y)^2$

Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

13) α) $(x-2y)^2-(2x-y)^2+3x^2=3y^2$, β) $(\alpha-3\beta)^2+(\beta-3\alpha)^2+8(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=0$
γ) $(\alpha-3\beta)^2+(3\alpha-2\beta)(3\alpha-2\beta)-(3\alpha-\beta)^2=\alpha^2+4\beta^2$,
δ) $(\alpha-4)^2+(2\alpha-3)^2=\alpha^2+(2\alpha-5)^2$, ε) $(x+2y)^2-(2x-y)^2=3(y-x)(x+y)$
στ) $(\alpha^2-\beta^2)^2+(2\alpha\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2)^2$, ζ) $(2x^2+2x)^2+(2x+1)^2=(2x^2+2x+1)^2$

14) Αν $x + \frac{1}{x} = 4$ να υπολογίσετε τα $x^2 + \frac{1}{x^2}$ και $x^3 + \frac{1}{x^3}$

15) Αν $x = 3 + \sqrt{5}$ και $y = 3 - \sqrt{5}$ να υπολογίσετε τα παρακάτω:
 xy , $x^2 - y^2$, $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $x^2 + xy + y^2$, $x^3 - y^3$

16) Αν $\alpha = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
 $A = 5\alpha^2 - 9\alpha\beta + 5\beta^2$

Με τη βοήθεια των αξιοσημειωτών ταυτοτήτων να υπολογίσετε τα:
 α) $99^2 + 2 \cdot 99 + 1^2$, β) $102^2 - 2 \cdot 204 + 4^2$, γ) $100.001^2 - 100.000^2$
 17) δ) $101 \cdot 99$, ε) $7,5^2 - 3,5^2$, στ) $\frac{7,23^2 - 4,23^2}{11,46}$, ζ) $185^2 - 184^2$
 η) $99^3 + 3 \cdot 99^2 + 3 \cdot 99 + 1^3$, θ) $101^3 - 3 \cdot 101^2 + 3 \cdot 101 - 1$

18) Αν $\alpha - \beta = (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
 $A = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta + (\alpha - \beta)^{2013}$

19) Να αποδείξετε ότι $\left(x + \frac{5}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{5}{x}\right)^2 = 20$ και κατόπιν να υπολογίσετε τις τιμές
 αριθμών $\alpha = \left(2010 + \frac{1}{402}\right)^2 - \left(2010 - \frac{1}{402}\right)^2$ και $\beta = \left(1000 - \frac{1}{200}\right)^2 - \left(1000 + \frac{1}{200}\right)^2$

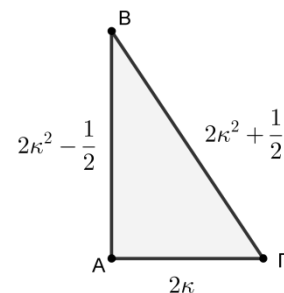
20) Αν $\alpha \cdot \beta = 5$ και $\alpha^2 \cdot \beta + \alpha \cdot \beta^2 + \alpha + \beta = 24$ να βρείτε την τιμή $\alpha^2 + \beta^2$

21) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (x-3)^2 - 10(x-1)(x+1) + (3x+1)^2$
 είναι σταθερό.

Για το πολυώνυμο $P(x) = -2x^2 + 2x + 800$
 22) α) να αποδείξετε ότι: $P(1-x) = P(x)$,
 β) να υπολογίσετε τις τιμές των $P(100)$ και $P(-99)$

23) Αν $x - \frac{2}{x} = -4$ να υπολογίσετε τα $x^2 + \frac{4}{x^2}$ και $x^3 - \frac{8}{x^3}$

24) Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ΑΓ = 2κ$, $ΑΒ = 2κ^2 - \frac{1}{2}$ και
 $ΒΓ = 2κ^2 + \frac{1}{2}$, όπου ο αριθμός $κ > \frac{1}{2}$.
 Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.





ΜΑΘΗΜΑ Α1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις: (**Κοινός παράγοντας**)

- 1) α) $3\alpha + 6\beta$, β) $2x - 8$, γ) $8\omega^2 + 6\omega$, δ) $-9x^2 - 6x$, ε) $8\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2$
στ) $\alpha x^2 + 3\alpha x + 5\alpha$, ζ) $3x^2 + 12x - 9x^4$, η) $x(\alpha - \beta) + y(\alpha - \beta)$
θ) $2\alpha(x + y) + 4a^2(x + y)$, ι) $(3x - 1)(x - 2) - (x - 4)(x - 2)$,
ια) $\alpha^2(\alpha - 2) - 3(2 - \alpha)$, ιβ) $2x^2(x - 3) - 6x(x - 3)^2$, ιγ) $3x^2 + 12x - 9x^4$,
ιδ) $(x^2 + 1)^3 + x(x^2 + 1)^2 + (x^2 + 1)^4$, ιε) $(x - 1)^3 - 3(x - 1)^2 - x + 1$

Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις: (**Ομαδοποίηση**)

- 2) α) $x^3 - x^2 + x - 1$, β) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20$, γ) $4x^2 - 8x - \alpha x + 2\alpha$,
δ) $9\alpha\beta - 18\beta^2 + 10\beta - 5\alpha$, ε) $12x^2 - 8xy - 15x + 10y$, ζ) $x^3 + \sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2}$,
η) $\sqrt{6}x^2 + 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}x - 2$, θ) $9x^3 - 15xy^3 - 10y^4 + 6x^2y$

Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις: (**Διαφορά τετραγώνων**)

- 3) α) $x^2 - 49$, β) $\alpha x^2 - 8\beta^2$, γ) $16x^2 - 1$, δ) $\alpha^2\beta^2 - 4$, ε) $\frac{1}{x^2} - 16$,
στ) $36\omega^2 - (\omega + 5)^2$, ζ) $4(x + 1)^2 - 9(x - 2)^2$, η) $x^2 - 5$, θ) $x^2 - 2y^2$

Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις: (**Κοινός παράγων και διαφορά τετραγώνων**)

- 4) α) $2x^2 - 32$, β) $28 - 7y^2$, γ) $5\alpha x^2 - 80\alpha$, δ) $2(x - 1)^2 - 8$

Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις: (**Άθροισμα και διαφορά κύβων**)

- 5) α) $x^3 - 27$, β) $8 + y^3$, γ) $\omega^3 + 64$, δ) $8x^3 - 1$, ε) $27\omega^3 + 1000\phi^3$,
στ) $3x^3 - 24$, ζ) $16\alpha^4 + 2\alpha$, η) $\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$, θ) $\alpha^4\beta - \alpha\beta^4$

Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις: (**Ανάπτυγμα ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2$**)

- 6) α) $x^2 + 2x + 1$, β) $x^2 - 4x + 4$, γ) $\omega^3 + 6\omega + 6$, δ) $\alpha^2 - 10\alpha + 25$,
ε) $1 - 8\beta + 16\beta^2$, στ) $4y^2 - 12xy + 9y^2$, ζ) $\frac{y^2}{9} - 2y + 9$, η) $16x^2 + 8xy + y^2$

Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις: (**Ανάπτυγμα ταυτότητας $(\alpha + \beta)^3$**)

- 7) α) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$, β) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, γ) $x^6 + 9x^4 + 27x^2 + 27$,
δ) $16\alpha^3 - 72\alpha^2\beta + 108\alpha\beta^2 - 54\beta^3$, ε) $(x - 1)^3 + 3(x - 1)^2y + 3(x - 1)y^2 + y^3$

Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις: (**Τριώνυμο**)

- 8) α) $x^2 + 3x + 2$, β) $\omega^2 + 5\omega + 6$, γ) $y^2 - 4y + 3$, δ) $x^2 - 7x + 12$,
ε) $y^2 - y + 12$, στ) $\alpha^2 + 3\alpha - 10$, ζ) $-y^2 + 4y - 3$, η) $3\alpha^2 - 12\alpha - 15$

Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις: (**Μέθοδος διάσπασης**)

- 9) α) $7\alpha^2 + 10\alpha\beta + 3\beta^2 = 7\alpha^2 + 7\alpha\beta + 3\alpha\beta + 3\beta^2 = \dots$,
β) $5x^2 - 8xy + 3y^2 = 5x^2 - 5xy - 3xy + 3y^2 = \dots$,
γ) $x^2 + (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = x^2 + 2x + \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = \dots$,
δ) $x^2 + (3 + \sqrt{2})x - 3\sqrt{2} = x^2 + 3x - \sqrt{2}x - 3\sqrt{2} = \dots$,

Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις: (**Μέθοδος προσθαφαίρεσης**)

- 10) α) $x^4 + y^4 + x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = \dots$,
β) $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2..$,
γ) $x^2 - 2x - y^2 + 4y - 3 = x^2 - 2x + 1 - y^2 + 4y - 3 - 1 = (x^2 - 2x + 1) - (y - 2)^2 = ..$,

Να κάνετε γινόμενα τις παραστάσεις: (**Συνδυασμός περιπτώσεων**)

- 11) α) $(x^2 + 9)^2 - 36x^2$, β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha + 4\beta$, γ) $x^4 - 1 + x^3 - x$,
δ) $2\alpha^2 - 2\alpha + \alpha\beta - \beta + \alpha x - x$, ε) $2\alpha\beta - 4\beta + 5\alpha - 10 + 2\alpha\gamma - 4\gamma$,
στ) $x^2y^2 - 4y^2 - x^2 + 4$, ζ) $1 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2$, η) $x^3(x^2 - 1) + 1 - x^2$
θ) $2(x - 1)(x^2 - 4) - 5(x - 1)(x - 2)^2$, ι) $(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) - 4\alpha^2\beta^2$,
ια) $(x^2 + 9)(a^2 + 4) - (\alpha x + \beta)^2$, ιβ) $(y^2 - 4)^2 - (y + 2)^2$
ιγ) $y^2 - x^2 - 10y + 25$, ιδ) $x^2 - 2xy + y^2 - \omega^2$, ιε) $x^3 + 2\sqrt{3}x^2 + 3x$

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- 12) α) $(x^2 - 4)^2 - (x^2 + 1)(x - 2)^2$, β) $(\alpha + 2\beta)x^6 - 64(\alpha + 2\beta)$, γ) $\alpha x(x^2 - \alpha^2) + \alpha^3(x + \alpha)$
δ) $\alpha^3x^2 - \alpha^3y^2 + 8x^2 - 8y^2$, ε) $(3 - 2x)(x + 1) + (2x - 3)(3x + 2) + (4x^2 - 9)$,
στ) $4\alpha - \alpha\gamma - 4\beta + 2\gamma + \beta\gamma - 8$, ζ) $\alpha x^2 - \alpha\gamma - \beta x^2 + \gamma y + \beta y - x^3$,
η) $x^5 - 1 + x^4 - x$, θ) $x^4 + x^3 - x^2 - x$, ι) $4x^3 - 16x + (x + 2)^2$
ια) $x^3 - 1 - 2(x^2 - 1) - (x - 1)^2$, ιβ) $\alpha^3x^3 - \beta^3x^3 + \alpha^3 - \beta^3$, ιγ) $\alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha + 2$
ιδ) $x^2 - y^2 - (x - y)^2$, ιε) $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - \beta^3$, ιζ) $\alpha^5 + \alpha^2\beta^3 - \alpha^4\beta - \alpha\beta^4$



ΜΑΘΗΜΑ Α1.7 Διαίρεση πολυωνύμων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- Να κάνετε τις διαιρέσεις
- 1) α) $(2x^3 + x^2 - 3x + 6) : (x + 2)$, β) $(6x^3 - x^2 - 10x + 5) : (3x + 1)$
γ) $(6x^4 - x^2 + 2x - 7) : (x - 1)$, δ) $(4x^3 + 5x - 8) : (2x - 1)$
ε) $(x^5 - x^4 + 3x^2 + 2) : (x^2 - x + 2)$, στ) $(9x^4 - x^2 + 2x - 1) : (3x^2 - x + 1)$
ζ) $(8x^4 - 6x^2 - 9) : (2x^2 - 3)$, η) $(3x^5 - 2x^3 - 4) : (3x^2 - 1)$
θ) $(8x^4 + 42x^3 + 26x^2 + 25x + 14) : (4x^2 + x + 2)$
- 2) Ποιο πολυώνυμο διαιρούμενο με $x^2 - x + 1$ δίνει πηλίκο $2x + 3$ και υπόλοιπο $3x + 2$; [Υπόδειξη: $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$]
- 3) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = 2x - 3$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 9x - 18$.
- 4) Να κάνετε τη διαίρεση $(x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9) : (x^2 - 9)$ και κατόπιν να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9$.
- 5) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ αν γνωρίζεται ότι έχει παράγοντα το $x + 1$.
- 6) Για το πολυώνυμο $P(x) = (x^3 + 2)(x^2 - 5) + 4x^2 - 6x + 7$ να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης α) $P(x) : (x^3 + 2)$ και β) $P(x) : (x^2 - 5)$
- 7) Να βρείτε την τιμή του a ώστε η διαίρεση $(6x^3 + a) : (x - 1)$ να είναι τέλεια.
- 8) Αν ένας παράγοντας του $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$ είναι το $(x - 1)^2$ να βρείτε τον άλλο παράγοντα.
- 9) Να κάνετε τη διαίρεση $(x^4 - 17x^2 + 16) : (x^2 - 1)$ και κατόπιν να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 17x^2 + 16$.
- 10) Να κάνετε τη διαίρεση $(5x^3 - 4x^2 - 3x + \lambda) : (x - 1)$ και να βρείτε την τιμή του λ ώστε η διαίρεση να είναι τέλεια.



 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να αναλύσετε τους αριθμούς 18 , 48 και 120 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και να βρείτε το Ε.Κ.Π(18,48,120) και τον Μ.Κ.Δ(18,48,120).

Κατόπιν να βρείτε το Ε.Κ.Π και το Μ.Κ.Δ των $18x^2y^4$, $48xy^3\omega$, $120x^3y^2\omega^4$

2) Να βρείτε το Ε.Κ.Π και το Μ.Κ.Δ των αλγεβρικών παραστάσεων:

A) $9a^4b^2\gamma$, $12a^3b^4\gamma$, $15a^4b^4$

B) $3a(a-\beta)^2$, $6a\beta(a-\beta)$, $9a^2\beta^3(a-\beta)$

Γ) $(x+1)^2(x-2)^3$, $(x+1)(x-3)$, $(x-2)(x+1)^3$

3) Να βρείτε το Ε.Κ.Π και το Μ.Κ.Δ των αλγεβρικών παραστάσεων:

A) $28a^2b^3$, $12a\beta^4$, $6a^5$, $14\beta^2a^3$

B) $45x^4y^2\omega$, $10x^2\omega^3$, $25y\omega^2$, $30xy\omega$

Γ) $3x(x-y)$, $7x^2(x-y)$, $21(x-y)x^3$

4) Αφού παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις να βρείτε το Ε.Κ.Π και το Μ.Κ.Δ τους.

A) $6(x^2 - y^2)$, $4(x-y)^2$, $12(x-y)^3$

B) $a^2 - 3a + 2$, $a^2 - 4$, $a^3 - 4a$

Γ) $x^3 - x^2$, $(x^2 - x)(x^2 - 1)$, $x^3 - 2x^2 + x$

5) Να βρείτε το Ε.Κ.Π και το Μ.Κ.Δ των παραστάσεων:

A) $x^2 - 6x + 9$, $x^2 - 5x + 6$, $x^2 - 9$

B) $a^3 - 4a^2 + 4a$, $3a^2 - 12a + 12$, $a^2 - 4a$

Γ) $x^4 - y^4$, $8xy^3 - 8x^3y$, $x^2y - xy^2$



ΜΑΘΗΜΑ Α1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:
- α) $\frac{x-1}{x}$, β) $\frac{x-y}{x+2}$, γ) $\frac{3x+1}{2x-3}$, δ) $\frac{\omega+4}{4(\omega-1)}$, ε) $\frac{2x-3}{(x-3)(x+2)}$,
στ) $\frac{x+5}{x^2+x}$, ζ) $\frac{x^2+x+y}{x^2-1}$, η) $\frac{2x-1}{(x-1)^2}$

- 2) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
- α) $\frac{8\alpha^3}{16\alpha^5}$, β) $\frac{15x^2y^3z^4}{20xy^4z^2}$, γ) $\frac{3(x+1)^2}{6(x+1)^3}$, δ) $\frac{\omega-2}{4-2\omega}$, ε) $\frac{x-3}{(3-x)^2}$,
στ) $\frac{x-5}{(5-x)^3}$, ζ) $\frac{(2x-5)(1-x)}{(5-2x)(x-1)}$, η) $\frac{2x-1}{(x-1)^2}$, θ) $\frac{(x-1)^3}{(x-1)(1-x)(-1-x)}$

- 3) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
- α) $\frac{2x-4}{x^2-2x}$, β) $\frac{x-4}{x^2-16}$, γ) $\frac{\alpha+2}{\alpha^2+4\alpha+4}$, δ) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+3x}$,
ε) $\frac{y^2-8y+16}{y^2-16}$, ζ) $\frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}$, η) $\frac{2\alpha^2-2\beta^2}{2\alpha^2+12\alpha\beta+18\beta^2}$,
θ) $\frac{(x-1)(x-3)-(1-x)(x-5)}{x^2-1}$, ι) $\frac{\alpha^2\beta-\alpha\beta^2}{(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2}$

- 4) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
- α) $\frac{\alpha^2-9}{\alpha^2+4\alpha+3}$, β) $\frac{3x^3y+3xy^3-6x^2y^2}{6x^3y-6xy^3}$, γ) $\frac{x^3-2x^2+2-x}{x^2-3x+2}$,
δ) $\frac{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}{\alpha^4-\alpha\beta^3}$, ε) $\frac{\alpha^2-\beta+\alpha\beta-\alpha}{\alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3}$, ζ) $\frac{x^2-\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2-x^2+2\beta x}$

- 5) Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:
- α) $\frac{\alpha^2-2}{\alpha^2+2\sqrt{2}\alpha+2}$, β) $\frac{6xy^3+6x^3y+12x^2y^2}{12x^3y-12xy^3}$, γ) $\frac{(x^2+2x+1)(x^2-2x+1)}{(2x^2-2)^2}$



ΜΑΘΗΜΑ Α1.10 Α' Πολλαπλασιασμός και διαίρεση ρητών παραστάσεων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

1) α) $\frac{\alpha}{\alpha-\beta} \cdot (\alpha-\beta)^2$, β) $(x^2-y^2) \frac{1}{x-y}$, γ) $\frac{\alpha^2+\alpha\beta}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}$,
 δ) $\frac{2x-6y}{4x+3y} \cdot \frac{16x^2-9y^2}{(x-3y)^2}$, ε) $\frac{x^2-4}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x+2}$, στ) $\frac{x-y}{20y} \cdot \frac{4x}{y-x} \cdot \frac{5y}{x}$,

Να κάνετε τις διαιρέσεις:

2) α) $\frac{8\alpha}{3} : \frac{12}{\alpha}$, β) $8 : \frac{4}{x}$, γ) $\frac{\alpha^2}{5} : \frac{\alpha}{15}$, δ) $\frac{x}{y} : \frac{x^2}{y^2}$, ε) $\frac{\alpha^4\beta^5\gamma^2}{x^3y^2} : \frac{\alpha^2\beta^5\gamma}{x^4y}$,
 στ) $\frac{\alpha+\beta}{2} : \frac{\alpha+\beta}{16}$, ζ) $\frac{10x^2}{x-2y} : \frac{5y}{y-2x}$, η) $\frac{5}{x^2-y^2} : \left(-\frac{10}{x+y}\right)$,
 θ) $\frac{\alpha^2+\alpha\beta}{\beta} : \left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{-2\beta^2}\right)$, ι) $\frac{4x^2+4x+1}{6x^2-3x} : \left(-\frac{12x^2-3}{2x}\right)$, ια) $(4xy+6x+8x^2) : 2x$

Να κάνετε τις πράξεις:

3) α) $\frac{6}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-25}{2} \cdot \frac{(x+2)^2}{3x-15}$, β) $\frac{x^3-y^3}{x-y} \cdot \frac{x^2-y^2}{2x^2+2xy+2y^2} \cdot \frac{4}{2x-2y}$,
 γ) $\frac{x^2-6x-7}{x^2} \cdot \frac{x^2+x}{2x^2-2}$, δ) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-4x+3} \cdot \frac{x^3-2x^2+x}{x^2-3x}$,
 ε) $\frac{\alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y}{x^2-y^2} \cdot \frac{2\alpha^2+2\alpha\beta}{4x^2-4xy}$, στ) $\frac{2y^2}{2y-2} \cdot \frac{y^2-36}{4y+4} : \frac{y-6}{y+1}$

Να κάνετε τις πράξεις:

4) α) $\frac{x^2-y^2}{x^3+xy} : \frac{\alpha^2-2\alpha}{2\alpha^2-8}$, β) $\frac{\beta\gamma^2-\gamma^3}{\gamma\beta^2-\beta^3}$, γ) $\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2} : \frac{x^2-xy+y^2}{xy^2} \cdot \frac{2x-2y}{x^2y^2}$

Να κάνετε τις πράξεις:

5) α) $\left(\frac{\omega-5}{\omega+3} : \frac{3\omega-15}{\omega^2+3\omega}\right) \cdot \frac{2\omega^2-98}{\omega^2+7\omega}$, β) $\left(\frac{x^2-6x+9}{x^2-2x} \cdot \frac{x^2-4}{2x^2-6x}\right) : \frac{x^2-x-6}{x^2+x}$



ΜΑΘΗΜΑ Α1.10 Β' Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών παραστάσεων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

1) α) $\frac{x}{2y} + \frac{y}{4}$, β) $\frac{\alpha}{2\beta} - \frac{1}{\alpha\beta}$, γ) $\frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{\beta}{\alpha\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha\beta}$, δ) $\frac{x^2+4x}{3x+2} - \frac{x^2-x-2}{3x+2}$

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

2) α) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1}$, β) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$, γ) $\frac{x}{x+4} - \frac{4}{-x-4}$, δ) $\frac{x}{x+4} - \frac{x}{x-4}$

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

3) α) $\frac{3}{6x} - \frac{1}{4x^2}$, β) $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2}$, γ) $1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, δ) $\frac{1}{2x-2} - \frac{x}{x^2-1}$

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

4) α) $\frac{\alpha}{\alpha^2-4} - \frac{1}{2-\alpha} + \frac{2}{3\alpha+6}$, β) $\frac{1}{2y+6} - \frac{y-1}{3y-y^2} - \frac{y}{y^2-9}$

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

5) α) $\frac{5}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}$, β) $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$,
γ) $\frac{4x+5}{x^2+x+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{3x^2-5}{x^3-1}$, δ) $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} - \frac{1}{x+y} + \frac{3y^2}{x^3+y^3}$

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

6) α) $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{xy}{x^2-y^2}$, β) $\left(1 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) : \left(\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x}\right)$, γ) $\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) : \left(\frac{\alpha-\beta}{\beta^2}\right)$

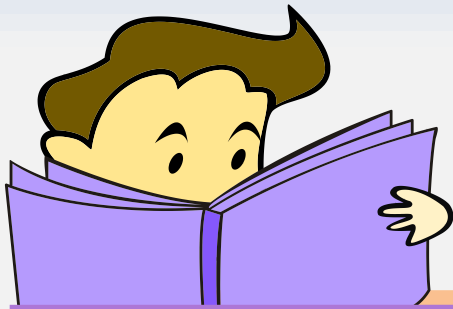
Να κάνετε τις πράξεις:

7) α) $\frac{x-4+\frac{4}{x}}{x-\frac{4}{x}}$, β) $\frac{x+\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}-1} \cdot \frac{x^2+1}{x^3+1}$, γ) $\frac{\frac{x^2+y^2}{y}-2x}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$, δ) $\frac{\frac{x}{x+1}+1}{1-\frac{3x^2}{1-x^2}}$

Να κάνετε τις πράξεις:

8) α) $\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) : \frac{x^4-1}{x^4-x^3}$, β) $\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha-2} + \frac{6}{2\alpha^2-2} - \frac{\alpha+3}{2\alpha+2}\right) : \frac{3}{4\alpha^2-4}$

9) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα $\frac{\alpha-\beta}{\gamma} + \frac{\beta-\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma-\alpha}{\beta} = 0$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γυμνασίου

Άλγεβρα

Κεφάλαιο 2^ο

Εξισώσεις - Ανισώσεις





ΜΑΘΗΜΑ Α2.1 Η εξίσωση $ax+b=0$

 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- 1) α) $5x-10=0$, β) $7y+42=0$, γ) $3x-1=2x+7$, δ) $3x-1=3x+6$
ε) $2(x-2)-5=3(x-2)$, στ) $3(x-3)-4(x+4)=10(x+3)$

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- 2) α) $x-\frac{2x-1}{3}=1-\frac{x-1}{6}$, β) $\frac{2x-1}{2}-\frac{4x-1}{6}-1=2x$
γ) $\frac{3y-4}{4}-\frac{2y-1}{3}=4+\frac{4y-9}{5}$, δ) $10+\frac{2x+5}{3}-\frac{3x}{4}=11+\frac{2x-1}{3}-\frac{7x-1}{8}$

- 3) Δίνεται η εξίσωση: $(2\lambda+1)x-\frac{\lambda+1}{3}\left(\frac{2x-1}{2}+1\right)=-\frac{3}{2}$

Αν η εξίσωση έχει λύση $x=3$ να βρείτε την τιμή του αριθμού λ .

- 4) Να βρείτε τον αριθμό του οποίου το διπλάσιο αυξημένο κατά 2 είναι ίσο με το μισό του αριθμού ελαττωμένο κατά 3.

- 5) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 15cm και η μια πλευρά του είναι η διπλάσια της άλλης. Να βρείτε τις πλευρές του.

- 6) Υπάρχουν τρεις διαδοχικοί αριθμοί με άθροισμα 46;



ΜΑΘΗΜΑ Α2.2 Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού (Με παραγοντοποίηση)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $(3x-2)(x+5)=0$, β) $2x(x-3)(x+1)=0$, γ) $3x(2x-10)(2x+1)=0$

2) Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $3x^2+6x=0$, β) $y^2-y=0$, γ) $x^2=2x$, δ) $\sqrt{2}x^2-\sqrt{8}x=0$
ε) $-3x^2-12x=0$, στ) $9y^2=-2y$, ζ) $x^2-2=0$

3) Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^2-9=0$, β) $y^2-1=0$, γ) $x^2=16$, δ) $\sqrt{2}x^2-\sqrt{8}=0$
ε) $-3x^2+12=0$, στ) $4y^2=9$, ζ) $-3x^2=12$, θ) $x^2+1=0$
ι) $-2x^2-6=0$, ια) $9y^2=-4$, ιβ) $4x^2+3=1$, θ) $x^2+2=0$

4) Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $(x-3)^2=81$, β) $(y-1)^2-36=0$, γ) $(3x+2)^2=64$,
δ) $5(x+3)^2=180$, ε) $\frac{(2x+3)^2}{4}-25=0$, στ) $(3x^2-1)(x^2+1)=0$

5) Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^2+6x+9=0$, β) $81y^2-18y+1=0$, γ) $x^2-6x=-9$,
δ) $x^2-9x+18=0$, ε) $x^2-x-2=0$, στ) $3x^2+5x+2=0$

6) Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $(9x^2-4)(x^2-225)=0$, β) $(2y-1)^2=(3y-2)^2$, γ) $(6x+1)(4x^2-4x+1)=0$
δ) $16x^2(3x-5)+25(5-3x)=0$, ε) $x^5=x$, στ) $x^3-3x^2-4x+12=0$

7) Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $(x-2)^2+(2x-4)^2=0$, β) $(x+2)^2+(x^2+5x+6)^2=0$

8) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης $121(x+1)^2-100(x-1)^2=0$ είναι αριθμοί αντίστροφοι.

9) Αν η μια ρίζα της εξίσωσης $x^2+\lambda x-9=0$ είναι αριθμός -3 να βρεθεί η άλλη.

10) Δίνονται οι εξισώσεις: $(x^2+1)(3x+2)=0$ και $9x^2+kx=-4$.
Να βρεθεί η τιμή του αριθμού k αν γνωρίζεται ότι οι εξισώσεις έχουν κοινή λύση.



ΜΑΘΗΜΑ Α2.2 Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού (Με τη βοήθεια του τύπου)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 9x + 18 = 0$, β) $2x^2 + 5x - 3 = 0$, γ) $4x^2 + 7x - 2 = 0$

2) Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $4x^2 + 20x + 25 = 0$, β) $2x^2 + 5x + 1 = 0$, γ) $2x^2 - 3x + 7 = 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις:

3) α) $x^2 - 4\sqrt{3}x + 8 = 0$, β) $\phi^2 - 6\sqrt{2}\phi + 9 = 0$, γ) $\kappa^2 - \sqrt{5}\kappa + \sqrt{2} = 0$,

δ) $(2x+3)(2x^2 - 7x - 4) = 0$, ε) $2(x-1)x^2 - 5x(1-x) - 3x + 3 = 0$

στ) $(x+5)(x^2 - 10x + 9) = 0$, ζ) $(4x^2 - 25)(x^2 - 8x + 7) = 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις:

4) α) $(x+1)^2 - (x-1)(x+2) = -2x(x-3)$, β) $x(5x-1) = 3(5x-1) - 9$,

γ) $(y+1)^2 - (2y-5)^2 = (3y-8)^2$, δ) $\omega(\omega-1)^2 - \omega^3 = (5\omega-3)^2 - (4\omega-3)^2$

5) Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x^2 - 5x + 2 = 0$, $\lambda \in R$. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

6) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 = 0$, $\lambda \in R$. Να βρείτε την τιμή του κ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 2. Να δείξετε ότι το 2 είναι διπλή ρίζα.

7) Να δείξετε ότι για $\alpha \neq 0$ η εξίσωση $\alpha x^2 + 2x - (\alpha - 2) = 0$ έχει πραγματικές ρίζες.

8) Δίνεται η εξίσωση $-x^2 + 9x + 2\lambda^2 - \lambda + 9 = 0$, $\lambda \in R$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1.

Για κάθε τιμή του λ που θα βρείτε να λύσετε την εξίσωση.

9) Για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ η εξίσωση $x^2 - 6x + \lambda + 2 = 0$ έχει:

α) δυο ρίζες άνισες , β) ρίζες ίσες , γ) δεν έχει ρίζες

10) Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2 - 3x + 2$, β) $x^2 - 2x - 3$, γ) $x^2 + x - 6$, δ) $2x^2 - 3x + 1$

11) α) Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα: $6x^2 - x - 1$ και $4x^2 - 4x + 1$

β) Να κάνετε τις πράξεις στην παράσταση $\frac{-4x^2 + 4x - 1}{-6x^2 + x + 1}$

12) α) Να λυθούν οι εξισώσεις $2x^2 - 3x - 2 = 0$ και $6x^2 - 5x + 1 = 0$

β) Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα: $2x^2 - 3x - 2$ και $6x^2 - 5x + 1$

γ) Να κάνετε τις πράξεις στην παράσταση $\frac{4x^2 - 1}{2x^2 - 3x - 2} : \frac{6x^2 - 5x + 1}{x^2 - 4}$

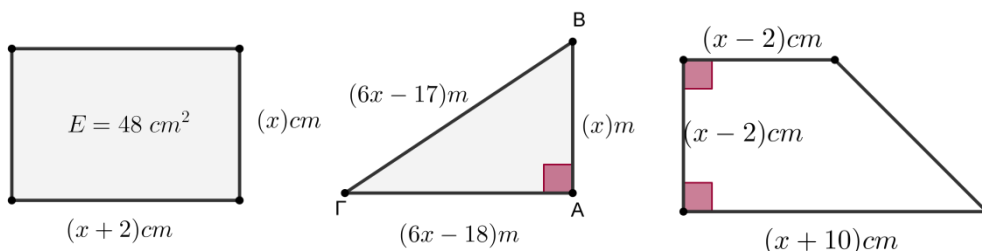


ΜΑΘΗΜΑ Α2.3 Προβλήματα εξισώσεων 2^{ου} βαθμού

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογίσετε το x σε κάθε περίπτωση:

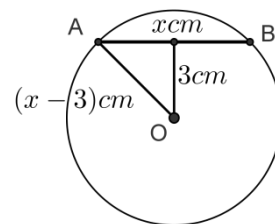
1)



- 2) Να βρείτε δυο αριθμούς που έχουν άθροισμα 25 και γινόμενο 156.
- 3) Να βρείτε δυο αριθμούς που έχουν διαφορά 4 και γινόμενο 357.
- 4) Να βρείτε έναν αριθμό, τέτοιο ώστε το οκταπλάσιό του να είναι κατά 12 μεγαλύτερο από το τετράγωνό του.
- 5) Να βρείτε έναν αριθμό, τέτοιο ώστε το γινόμενό του με τον κατά 5 μικρότερό του να ισούται με 266.
- 6) Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 9, ενώ το άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων του είναι 41. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;
- 7) Ένα τρίγωνο έχει εμβαδό 12cm^2 . Η βάση του είναι κατά 5cm μεγαλύτερη από το αντίστοιχο ύψος. Να υπολογίσετε τη βάση και το ύψος του τριγώνου.

8)

Στο διπλανό κύκλο ακτίνας $OA = (x - 3)\text{cm}$ φέρουμε τη χορδή $AB = x\text{cm}$. Αν η κάθετη από το κέντρο στην χορδή είναι 3cm να βρείτε το μήκος της χορδής και την ακτίνα του κύκλου.



- 9) Αν αυξήσουμε τη μια πλευρά ενός τετραγώνου κατά $4,5\text{cm}$ και ελαττώσουμε την άλλη κατά $3,5\text{cm}$ προκύπτει ένα ορθογώνιο με εμβαδό 523cm^2 . Να βρείτε την πλευρά του τετραγώνου αυτού.
- 10) Να βρείτε τον αρνητικό αριθμό που όταν αφαιρεθεί από το τετράγωνό του μας δίνει 20.
- 11) Ένα τρίγωνο έχει πλευρές 6cm , 9cm και 12cm . Αν κάθε πλευρά του ήταν μεγαλύτερη κατά $x\text{cm}$, τότε το τρίγωνο θα ήταν ορθογώνιο. Να βρείτε τον αριθμό x .



ΜΑΘΗΜΑ Α2.4 Κλασματικές εξισώσεις

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να λύσετε τις εξισώσεις:

1) α) $\frac{x^2-1}{2x+2}=0$, β) $\frac{x^2-5x+6}{2x-4}=0$, γ) $\frac{x}{x+1}=1-\frac{x}{x+4}$, δ) $\frac{x+1}{x-2}+\frac{1-2x}{x+1}=0$

Να λύσετε τις εξισώσεις:

2) α) $\frac{1}{x}-\frac{x}{x-1}=\frac{6x+5}{x^2-x}$ [Απάντηση: -3, -2] , β) $1-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2-x}=\frac{2x}{x^2-4}$ [Απάντηση: 0] ,

γ) $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}=\frac{2(x^2+2)}{x^2-4}$ [Απάντηση: Αδύνατη]

Να λυθούν οι εξισώσεις:

3) α) $\frac{x-1}{2x-4}-\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{8}$, β) $\frac{5}{x+2}-\frac{3}{2-x}=\frac{2x}{x^2-4}$

γ) $\frac{2(x-3)}{x}-\frac{2x^2}{x^2-2x}=\frac{3}{x-2}$, δ) $\frac{x-1}{x}+\frac{x}{2-x}=\frac{x+1}{x^2-4}$

Να λυθούν οι εξισώσεις:

4) α) $\frac{x-2}{x}=\frac{4}{2-x}+\frac{8}{x^2-2x}$, β) $\frac{x^2-7}{1-x^2}+\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x-1}$

γ) $\frac{2x+1}{x^2-3x}+\frac{19}{x^2-9}=\frac{2x+3}{x^2+3x}$, δ) $\frac{x-1}{x}+\frac{10+x^2}{x-x^2}=0$

5) Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{1}{1-\frac{3}{x}}+\frac{2}{x+3}=\frac{x+6}{9-x^2}$

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{9x^2-36}{(x-2)(x^2+4x+4)}$

- 6) α) να παραγοντοποιήσετε τους όρους του κλάσματος
β) να βρείτε τις τιμές του x που το κλάσμα έχει νόημα
γ) να λύσετε την εξίσωση $A = 1-x$

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{2}{x+2}$, $B = \frac{3}{2x-4}$, $\Gamma = \frac{x-14}{2x^2-8}$

- 7) α) να βρείτε τις τιμές του x που ορίζεται κάθε παράσταση
β) να λύσετε την εξίσωση $A = B + \Gamma$



ΜΑΘΗΜΑ Α2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις μ' έναν άγνωστο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να συμπληρώσετε τα κενά με ένα από τα σύμβολα: $<$, $>$, \geq , \leq

- 1) i) Αν $a > 3$ τότε $a - 3 \dots 0$, ii) Αν $a < \beta$ και $\beta < \gamma$ τότε $a \dots \gamma$,
iii) Αν $a > 0$ και $\beta < 0$ τότε $a\beta \dots 0$, iv) Αν $\gamma < 0$ και $a\gamma < \beta\gamma$ τότε $a \dots \beta$,
v) Αν $a \neq 0$ τότε $a^2 \dots 0$, vi) Αν $a \leq 0$ και $\beta \leq 0$ τότε $a + \beta \dots 0$

- 2) Αν $x > y$ να συγκρίνεται τους αριθμούς $A = 3x - 4\omega$ και $B = 3y - 4\omega$

- 3) α) Αν $x > -3$ να αποδείξετε ότι $2x + 6 > 3 + x$
β) Αν $a > 4$ να αποδείξετε ότι $2a + 5 > 13$
γ) Αν $x > 3$ και $y > 4$ να αποδείξετε ότι $3x + 4y > 25$

- 4) Αν $2 < x < 5$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχονται οι παραστάσεις:
 $A = x - 2$, $B = 3x + 1$, $\Gamma = 1 - 4x$

- 5) Αν $3 < x < 9$ και $-2 < y < 8$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχονται οι παραστάσεις: $A = 3x + 2y$, $B = 3x - 2y$, $\Gamma = -4x - 5y$

Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x και y , να αποδείξετε ότι:

- 6) α) $x^2 + 9 \geq 6x$, β) $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$, γ) $(x + y)^2 + 4xy \geq -8y^2$

Πότε ισχύει η ισότητα σε κάθε περίπτωση:

- 7) Για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x , να αποδείξετε ότι:

- α) $2x^2 + 2x > -1$, β) $x^2 - 4x + 5 > 0$

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- 8) α) $2(x + 1) + 3 \geq 5(x - 2) + 7$, β) $\frac{x + 4}{3} - 2 < \frac{x - 4}{5} + \frac{3x - 1}{15}$
γ) $\frac{3x}{4} - 5 \leq \frac{7x}{12} + \frac{x}{6}$, δ) $\frac{x + 1}{2} \geq x - \frac{2x + 3}{4}$

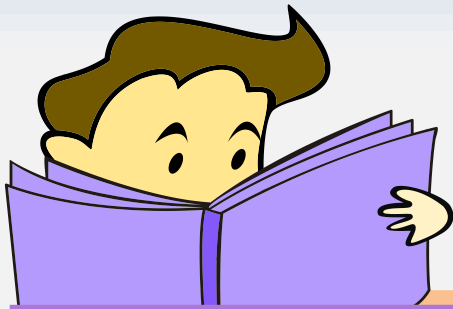
Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

- 9) α) $4x + 1 \geq 5x - 2$ και $3x + 8 \geq 2(x - 1)$,
β) $\frac{x - 1}{3} - \frac{x - 2}{2} < \frac{x}{6}$ και $x - \frac{x - 1}{2} < \frac{x - 2}{3}$

- 10) Αν γνωρίζεται ότι $-6 < 2 - 4x < 9$ μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το x ;

11) Να λύσετε τις ανισώσεις:

- α) $3(x + 1)^2 - 6(x + 1) \geq x(3x - 1)$, β) $(x - 2)^3 \geq x^3 + 6x(x - 3)$



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γυμνασίου

Άλγεβρα

Κεφάλαιο 3^ο

*Συστήματα γραμμικών
εξισώσεων*





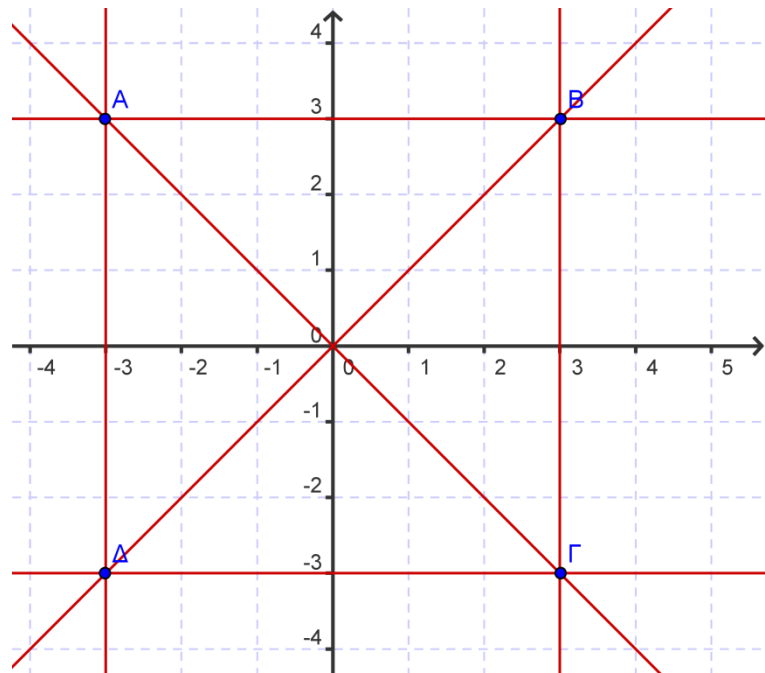
ΜΑΘΗΜΑ Α3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Ποια από τα ζεύγη: $(-15, 50)$, $(1, 8)$, $(0, 4)$, $(0, 6)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ είναι λύσεις της γραμμικής εξίσωσης $3x + y = 5$;

2)

Στο διπλανό σχήμα να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ΑΒ), (ΒΓ), (ΓΔ), (ΑΔ), (ΑΓ) και (ΒΔ).



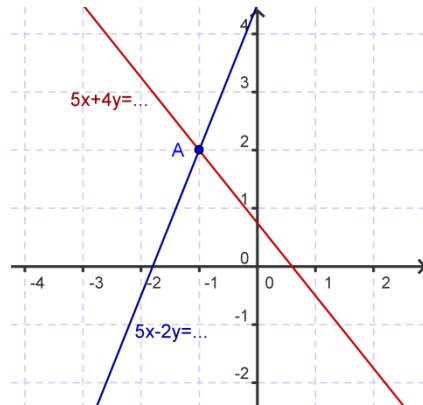
- 3) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες:
 $\varepsilon_1 : x + y = 1$, $\varepsilon_2 : 2x + 2y = 4$ και $\varepsilon_3 : -3x - 3y = 6$. Τι παρατηρείτε;
- 4) Να σχεδιάσετε τις ευθείες με εξισώσεις:
α) $\varepsilon : -2x + 3y = 1$, β) $\zeta : 2x - 3y = 6$ και γ) $\eta : 2(x - 1) - 3(y + 2) = 0$
- 5) Η ευθεία $\varepsilon : 5x + 4y = 20$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε:
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β
β) Να κάνετε γραφική παράσταση την ευθεία ε
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό (ΑΒΟ) του τριγώνου ΑΒΟ, όπου $O(0,0)$ η αρχή των αξόνων.
- 6) Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : 4x + y = 10 - 2\lambda$
α) Να βρείτε τον αριθμό λ , ώστε η ευθεία ε να διέρχεται από την αρχή O των αξόνων , β) Για $\lambda = 5$ να σχεδιάσετε την ευθεία.
- 7) Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : \lambda x - y + 2 = 0$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-7, -12)$
α) Να βρείτε τον αριθμό λ , β) Να σχεδιάσετε την ευθεία.



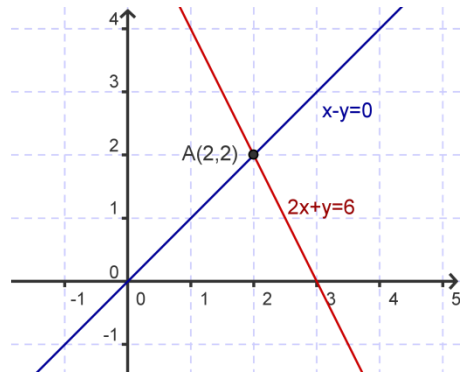
ΜΑΘΗΜΑ Α3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Να συμπληρώσετε τους αριθμούς που λείπουν στο σύστημα:
- $$\begin{cases} 5x + 4y = \dots \\ 5x - 2y = \dots \end{cases}$$
- αν γνωρίζεται ότι η γραφική του επίλυση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



- 2) Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος να βρείτε τη λύση σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα:
- α) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$, β) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$
- γ) $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$, β) $\begin{cases} x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$



- 3) Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:
- α) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ [Απ: (2,1)] , β) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 12 \end{cases}$ [Απ: ΑΔΥΝΑΤΟ] , γ) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$ [Απ: ΑΟΡΙΣΤΟ]

- 4) Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:
- α) $\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2 \end{cases}$, β) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$, γ) $\begin{cases} x + y = -4 \\ y = x \end{cases}$, δ) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

- 5) Να προσδιορίσετε γραφικά το πλήθος των λύσεων σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα:
- α) $\begin{cases} x - y = -5 \\ x - y = 5 \end{cases}$, β) $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$, γ) $\begin{cases} 8x - 16y = -4 \\ -2x + 4y = 1 \end{cases}$, δ) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 1,5x + 4y = 5 \end{cases}$

- α) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες:
 $\varepsilon_1 : x - y = 1$ και $\varepsilon_2 : x + y = 3$,
- 6) β) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$,
- γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 με τον άξονα $x'x$.



ΜΑΘΗΜΑ Α3.3 Άλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να λύσετε με τη μέθοδο της αντικατάστασης τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ y = 2 \end{cases}$, β) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x = -1 \end{cases}$, γ) $\begin{cases} y = 15 - x \\ 2x + y = 14 \end{cases}$, δ) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

2) Να λύσετε με τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$, β) $\begin{cases} 3x - y = 9 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$, γ) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$, δ) $\begin{cases} 2y + x = 1 \\ 3x + y = -12 \end{cases}$

3) Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 3(x + y) - 5(y - x) = 14 \\ 3(x + y) - 2(x - y) = 7 \end{cases}$, β) $\begin{cases} 0,3x - 0,5y = 4,4 \\ 0,9x + 0,2y = 1,3 \end{cases}$, γ) $\begin{cases} 0,3x + 0,5y = 4,7 \\ 0,9x - 0,2y = 2,2 \end{cases}$

4) Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \frac{3x}{2} + \frac{y}{5} = 6 \\ \frac{x+2}{4} - \frac{y-3}{6} = 2 \end{cases}$, β) $\begin{cases} \frac{x+y}{8} - \frac{y-x}{6} = 5 \\ \frac{x+y}{4} - \frac{x-y}{3} = 10 \end{cases}$, γ) $\begin{cases} \frac{2x-y}{3} + \frac{x+2y}{4} = 3 \\ 3(2x-y) - \frac{x+2y}{4} = 7 \end{cases}$

5) Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \frac{2x}{3} + y = x - y \\ x + \frac{y}{4} = 2y + \frac{3}{2} \end{cases}$, β) $\begin{cases} \frac{x+y}{3} - \frac{8-y}{4} = -\frac{2}{3} \\ 2x - \frac{1+y}{2} = 9 \end{cases}$, γ) $\begin{cases} x - \frac{x+y}{3} = 5 - 2y \\ 1 - \frac{2x-3y}{5} = \frac{x+6}{10} - y \end{cases}$

6) Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 + 5 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$, β) $\begin{cases} x^2 - 9y^2 = 5 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

7) Να λύσετε τα συστήματα:

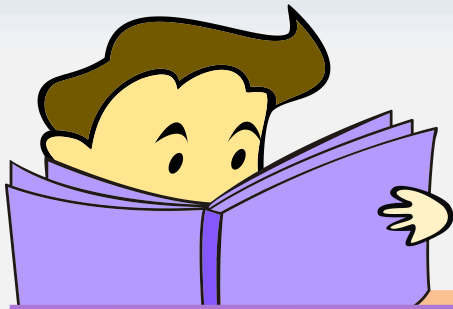
α) $\begin{cases} 2x - y(x-1) = -1 + x(3-y) \\ xy - x(2x-1) = 1 - (2x-y)(x+1) \end{cases}$, β) $\begin{cases} (x+5)(2y+7) - (x+1)(2y-9) = 12 \\ 2x + 10 - (6y-1) = 0 \end{cases}$

8) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $y=ax+\beta$ που διέρχεται από τα σημεία $A(2, 7)$ και $B(-3, -3)$.

9) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(2, 5)$ και $B(1, 3)$.

10) Να βρείτε τα a, β ώστε η εξίσωση: $x^2 + ax + \beta = 0$ να έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1 = 2$ και $x_2 = -1$.

- 11) Να βρείτε τις τιμές των α , β αν γνωρίζεται ότι οι εξισώσεις:
 $x^2 - (2\alpha + 1)x + 2\beta = 0$ και $x^2 - (\beta + 2)x + 5\alpha = 0$ έχουν λύση την $x=3$.
- 12) Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} (\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)y = 9 \\ (2\alpha + 3\beta)x + (2\alpha - \beta)y = 4 \end{cases}$, το οποίο έχει λύση την $(x, y) = (3, 4)$. Να βρείτε τις τιμές των α και β .
- 13) Να υπολογίσετε δυο αριθμούς που έχουν άθροισμα 25 και η διαίρεση του μεγαλύτερου από αυτούς με το μικρότερο δίνει πηλίκο 2 και υπόλοιπο 4.
- 14) Ένα ξενοδοχείο έχει συνολικά 26 δίκλινα και τρίκλινα δωμάτια στα οποία υπάρχουν συνολικά 68 κρεβάτια. Να βρείτε πόσα δίκλινα και πόσα τρίκλινα δωμάτια έχει το ξενοδοχείο.
- 15) Μια μηχανή παράγει 40 βίδες την ώρα ενώ μια άλλη, παλαιότερο μοντέλο, παράγει 30 βίδες την ώρα. Για μια ποσότητα 400 βίδες οι δυο μηχανές λειτούργησαν συνολικά 12 ώρες. Πόσες ώρες λειτούργησε η κάθε μηχανή;
- 16) Ένας παίκτης του Basket πέτυχε συνολικά 59 πόντους σε έναν αγώνα. Πέτυχε 36 καλάθια δίποντα και ελεύθερες βολές μαζί. Πόσα δίποντα και πόσες ελεύθερες βολές πέτυχε σε αυτόν τον αγώνα;
- 17) Να χωρίσετε τον αριθμό 2100 σε δύο μέρη ώστε το πηλίκο τους να είναι ο αριθμός 4.
- 18) Πριν 18 έτη η Μαρία είχε τη διπλάσια ηλικία από την Ελένη. Μετά από 9 έτη η ηλικία που θα έχει η Μαρία θα ισούται με τα $\frac{5}{4}$ της τότε ηλικίας της Ελένης. Ποια είναι η σημερινή ηλικία των δυο κοριτσιών;
- 19) Ένας χωρικός έχει στο αγρόκτημά του πρόβατα και κότες. Όταν ρωτήθηκε πόσα ζώα έχει απάντησε ως εξής: «Τα ζώα μου έχουν 35 κεφάλια και 100 πόδια». Πόσα πρόβατα και πόσες κότες έχει στο αγρόκτημα;
- 20) Σε ένα εργοστάσιο εργάζονται άνδρες και γυναίκες. Αν γνωρίζουμε ότι οι άνδρες και το $\frac{1}{3}$ των γυναικών είναι 18 άτομα, ενώ αν από το διπλάσιο των ανδρών αφαιρέσουμε τις γυναίκες έχουμε 16 άτομα, να βρείτε πόσοι άνδρες και πόσες γυναίκες εργάζονται σε αυτό το εργοστάσιο.
- 21) Αν η βάση ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου αυξηθεί κατά 2cm και το ύψος του ελαττωθεί κατά 3cm, το εμβαδό του ελαττώνεται κατά 27 cm^2 . Αν όμως η βάση ελαττωθεί κατά 4cm και το ύψος του αυξηθεί κατά 5cm, το εμβαδό του αυξάνεται κατά 7 cm^2 . Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γυμνασίου

Άλγεβρα

Κεφάλαιο 4^ο

Συναρτήσεις

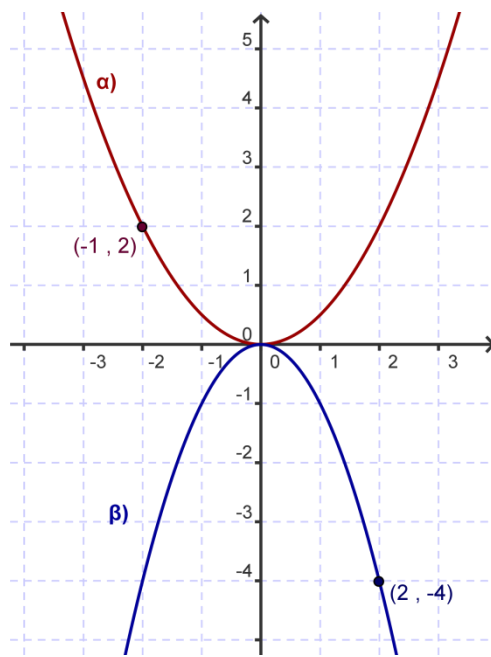




ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1)

Στο διπλανό σχήμα βλέπετε τη γραφική παράσταση δυο παραβολών α) και β).
Να βρείτε τις εξισώσεις των παραβολών αυτών.



2)

Να σχεδιάσετε τις παραβολές με εξισώσεις:

α) $y = 3x^2$, β) $y = -3x^2$, γ) $y = \frac{1}{2}x^2$, δ) $y = -\frac{1}{2}x^2$

3)

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις παραβολές με εξισώσεις:

α) $y = \frac{3}{2}x^2$ και β) $y = -\frac{3}{2}x^2$

4)

Να βρείτε τα σημεία της παραβολής $y = 9x^2$ με τεταγμένη 36.
Υπάρχουν σημεία της παραβολής με τεταγμένη -36;

5)

Δίνεται η εξίσωση της παραβολής $y = (\lambda - 2)x^2$.

Αν το σημείο $A(2, 9)$ ανήκει στην παραβολή τότε:

- α) να υπολογίσετε την τιμή του αριθμού λ
β) να σχεδιάσετε την παραβολή για την τιμή του λ που βρήκατε

6)

α) Να σχεδιάσετε την παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{3}x^2$ για τις τιμές $-3 \leq x \leq 3$.

β) Να σχεδιάσετε τη συμμετρική της παραβολής του προηγούμενου ερωτήματος, ως προς τον άξονα $x'x$ και να βρείτε την εξίσωσή της.

7)

Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με κορυφή την αρχή $O(0,0)$, άξονα συμμετρίας τον $y'y$ η οποία διέρχεται από το σημείο $M\left(-\frac{5}{9}, -\frac{1}{3}\right)$.



ΜΑΘΗΜΑ Α4.2 Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

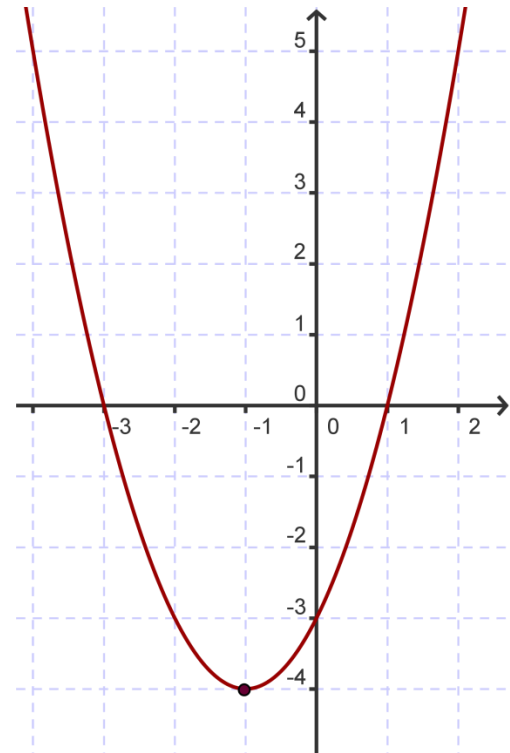
Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $y = x^2 + 2x - 3$.

Να συμπληρώσετε τα κενά:
Έχουμε $a = \dots$, $b = \dots$, $c = \dots$ αφού $a > 0$ η παραβολή παίρνει \dots τιμή
 $y = -\frac{\Delta}{4a} = -\dots$ όταν $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\dots$

- 1) Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\dots$
Η παραβολή έχει κορυφή το $K(\dots, \dots)$
Η γραφική παράσταση της παραβολής τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(\dots, \dots)$ και τον $x'x$ στα σημεία $A(\dots, \dots)$ και $\Gamma(\dots, \dots)$.

Μερικά σημεία της είναι:

x	-3	-2	-1	0	1
y					



- 2) Για την παραβολή $y = x^2 - 4x$ να βρείτε:
α) τον άξονα συμμετρίας της, β) την κορυφή της γ) να κατασκευάσετε πίνακα τιμών για $-1 \leq x \leq 4$ και δ) να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

- 3) Να σχεδιάσετε τις παραβολές α) $y = x^2 - 2$ και β) $y = -x^2 + 1$.
Σε κάθε περίπτωση να βρείτε το μέγιστο ή το ελάχιστο της συνάρτησης.

- 4) Να σχεδιάσετε τις παραβολές α) $y = x^2 - 4x + 3$ και β) $y = -x^2 + 2x + 3$.
Σε κάθε περίπτωση να βρείτε το μέγιστο ή το ελάχιστο της συνάρτησης.

- 5) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση της παραβολής $y = x^2 - 5x + 4$.
Αν Α, Β και Γ είναι τα σημεία που τέμνει τους άξονες, να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

- 6) Να βρείτε τις εξισώσεις των παραβολών των διπλανών γραφικών παραστάσεων.

